Ο κύκλος του Mohr για τάσεις στο επίπεδο

Οι εξισώσεις μετασχηματισμού των τάσεων μπορούν να παρασταθούν γραφικά, στον κύκλο του Mohr.
Ο κύκλος Mohr χρησιμοποιείται ιδιαίτερα στην εδαφομηχανική για την μελέτη των τάσεων στο έδαφος.

Εξισώσεις κύκλου Mohr

Από τις εξισώσεις μετασχηματισμού των τάσεων (5) και (6) έχουμε

$$\sigma'_{xx} - \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2} = \frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\cos 2\Theta + \sigma_{xy}\sin 2\Theta \qquad (22)$$

$$\sigma'_{xy} = -\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\sin 2\Theta + \sigma_{xy}\cos 2\Theta \qquad (23)$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο και προσθέτοντας τις (22), (23) κατά μέλη έχω

$$\left(\sigma'_{xx} - \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma'^2_{xy} = \left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma^2_{xy} \qquad (24)$$

Επειδή $\sigma_{aver} = \dfrac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2}$ (25)

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma^2_{xy}} \qquad (26)$$

η (24) δίνει

$$\left(\sigma'_{xx} - \sigma_{aver}\right)^2 + \sigma'^2_{xy} = R^2 \qquad (27)$$

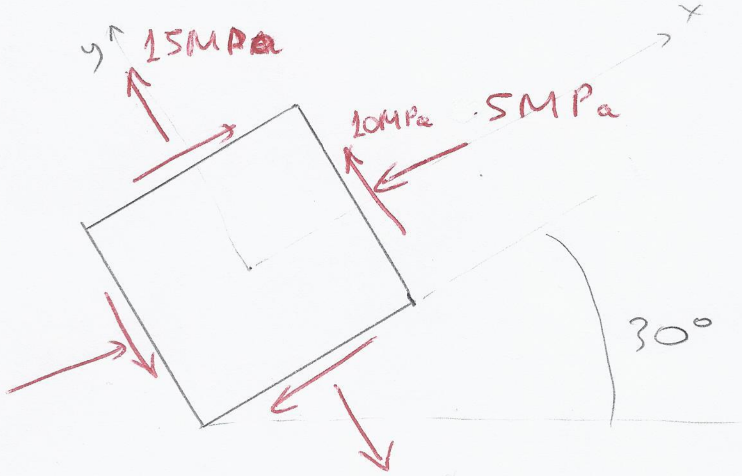
που είναι η εξίσωση κύκλου Mohr με ακτίνα R και κέντρο τα σημεία ($\sigma'_{xx} = \sigma_{aver}$, $\sigma'_{xy} = 0$). Οι μετασχηματισμένες τάσεις (σ'_{xx}, σ'_{xy}), σε όλα τα στραμμένα επίπεδα, απέχουν στην περιφέρεια αυτού του κύκλου.

Παράδειγμα

Ενα ορθογωνικό στοιχείο επίπεδης πλάκας είναι στραμμένο έτσι ώστε ο άξονας των x να σχηματίζει γωνία 30° με το οριζόντιο επίπεδο.
Οι τάσεις που ασκούνται στις έδρες του στοιχείου είναι $\sigma_{xx} = -5$ MPa $\sigma_{yy} = 15$ MPa, $\sigma_{xy} = 10$ MPa.
Να βρεθούν με την χρήση του κύκλου του Mohr:

1) Οι κύριες τάσεις σ_1, σ_2 και οι κύριες διευθύνσεις
2) Οι τάσεις σ'_{xx}, σ'_{yy}, σ'_{xy} στο στοιχείο αφού στραφεί κατά γωνία $\theta = 40°$
3) Η μέγιστη διατμητική τάση και η διεύθυνση του επιπέδου όπου αυτή ασκείται.

Να επαληθεύσετε τα αποτελέσματα με τους αναλυτικούς τύπους μετασχηματισμού των τάσεων


y
x
15MPa
10MPa
5MPa
30°

Διαδικασία κατασκευής του κύκλου του Mohr

i) Σχεδιάζω ένα σύστημα συντεταγμένων με τετμημένες σ'_{xx} (ο θετικός ημιάξονας προς τα δεξιά) και τεταγμένες σ'_{xy} (ο θετικός ημιάξονας προς τα κάτω)

ii) Σημειώνω το κέντρο του κύκλου C, με συντεταγμένες

$$\sigma'_{xx} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} = \frac{-5MPa + 15MPa}{2} = 5Mpa$$

$$\sigma'_{xy} = 0$$

iii) Σημειώνω το σημείο A, που παριστάνει τις τάσεις στην έδρα την κάθετη στον άξονα των x, με συντεταγμένες

$$\sigma'_{xx} = \sigma_{xx} = -5MPa$$

$$\sigma'_{xy} = \sigma_{xy} = 10MPa$$

iv) Σημειώνω το σημείο B, που παριστάνει τις τάσεις στην έδρα την κάθετη στον άξονα y, με συντεταγμένες

$$\sigma'_{xx} = \sigma_{yy} = 15MPa$$

$$\sigma'_{xy} = -\sigma_{xy} = -10MPa$$

v) Με κέντρο το C, σχεδιάζω τον κύκλο του Mohr με ακτίνα CA. Ο κύκλος περνά και από το σημείο B,

Εύρεση του πόλου O_p (original planes) του κύκλου Mohr.

Από το σημείο $A(\sigma_{xx}, \sigma_{xy})$ φέρνω παράλληλη προς την έδρα όπου ασκούνται οι τάσεις σ_{xx}, σ_{xy}. Η ευθεία αυτή τέμνει τον κύκλο στο σημείο O_p. Το σημείο O_p λέγεται πόλος.
Αν φέρω από το O_p παράλληλη προς την έδρα όπου ασκούνται οι τάσεις σ_{yy}, $-\sigma_{xy}$, συναντώ το σημείο Β $(\sigma_{yy}, -\sigma_{xy})$

Εύρεση των κυρίων τάσεων και διευθύνσεων

Στρέφω το δίπεδο AO_pB έτσι ώστε τα σημεία τομής του με τον κύκλο να είναι τα D και E, όπου $\sigma'_{xy} = 0$. Το D δίνει $\sigma_2 \simeq -9{,}20\,MPa$ και το E δίνει $\sigma_1 \simeq 19{,}26\,MPa$. Το στοιχείο με τις κύριες τάσεις είναι στραμμένο κατά $-22{,}7^\circ$ ($B\hat{O_p}E$ ωρολογιακά) σε σχέση με το αρχικό

Εύρεση των τάσεων στο στοιχείο το στραμμένο κατά 40° σε σχέση με το αρχικό

Στρέφω το δίπεδο AO_pB κατά 40° αντιωρολογιακά και τα νέα σημεία τομής του με τον κύκλο, F και G, ορίζουν τις τάσεις στις αντίστοιχες έδρες. Το F δίνει $\sigma'_{xx} \cong 13{,}35$ MPa, $\sigma'_{xy} = 11{,}5$ MPa. Το G δίνει $\sigma'_{xx} = -3{,}5$ MPa, $\sigma'_{xy} = -11{,}25$ MPa.

Εύρεση της μέγιστης διατμητικής τάσης και του προσανατολισμού του στοιχείου που αυτή ασκείται

Στρέφω το δίπεδο AO_pB μέχρι αυτό να συναντήσει τα πιο απομακρυσμένα κάτω και άνω σημεία K, H.
Το K δίνει $\sigma'_{xx} = 5$ Mpa, $\sigma'_{xy} = 14{,}25$ MPa
Το H δίνει $\sigma'_{xx} = 5$ Mpa, $\sigma'_{xy} = -14{,}26$ MPa
Το στοιχείο είναι στραμμένο κατά 22,2° (αντιωρολογιακά) σε σχέση με το αρχικό.

Έλεγχος αποτελεσμάτων με τους αναλυτικούς τύπους μετασχηματισμού

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2}$$

$$= 5\,MPa \pm \sqrt{(10\,MPa)^2 + (10\,MPa)^2} =$$

$$= 5\,MPa \pm 14.14\,MPa \Rightarrow \sigma_1 = 19,14\,MPa$$

$$\sigma_2 = -9,14\,MPa$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}} = \frac{2 \times 10MPa}{-20MPa} = -1$$

$$\Rightarrow 2\theta_p = -45^\circ, +135^\circ \Rightarrow \theta_p = -22.5^\circ$$

$$\theta_p = 67,5^\circ$$

Η έδρα με $\sigma_1 = 19,26\,MPa$ πιό κοντά ($-22,5^\circ$) στην έδρα με $\sigma_{xx} = 15\,MPa$

Για στροφή $\theta = 40^\circ$

$$\sigma'_{xx} = 5MPa - 10MPa\cos 80^\circ + 10MPa\sin 80^\circ =$$

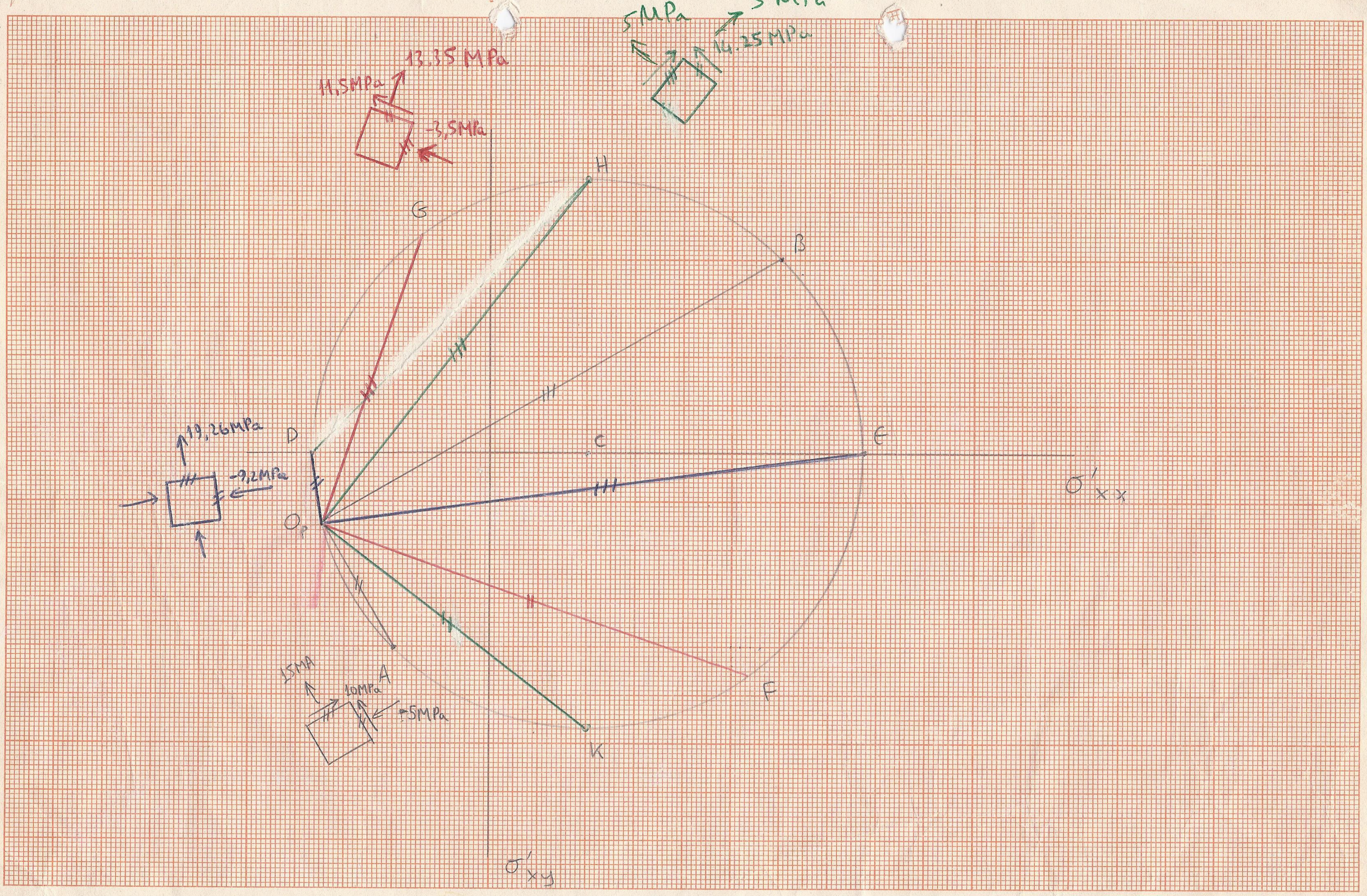
$$= 5MPa - 1,74MPa + 9,85MPa = 13,11\,MPa$$

$$\sigma'_{yy} = 5MPa + 1.74MPa - 9,85MPa = -3.1\,MPa$$

$$\sigma'_{xy} = \cancel{+}1,74MPa + 9,85MPa = 11,59\,MPa$$

$$\tau_{max} = \sqrt{(10\,MPa)^2 + (10\,MPa)^2} = 14.14\,MPa$$

$$\theta_{s_2} = \theta_{p_2} - 45^\circ = -22,5^\circ - 45^\circ = -67,5^\circ$$


13.35 MPa
11,5MPa
-3,5MPa
5MPa
5MPa
14.25MPa
H
G
B
D
C
E
O_P
σ'_{xx}
σ'_{xy}
19,26MPa
-9,2MPa
A
15MA
10MPa
+5MPa
F
K