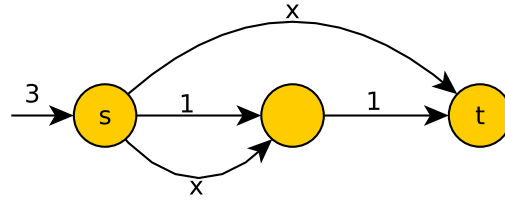


Πρόβλημα 1. (20 μονάδες) Βρείτε το τίμημα της αναρχίας του παιγνίου συμφόρησης στο ακόλουθο δίκτυο:



(i) (10 μονάδες) Αν οι παίκτες είναι απειροστά μικροί και δημιουργούν συνολική απαίτηση 3 μονάδων.

(Υπενθύμιση: Η βέλτιστη ροή για ένα δίκτυο με συναρτήσεις $\ell_e(x)$ είναι ροή ισορροπίας αν αλλάξουμε τις συναρτήσεις σε $\hat{\ell}_e(x) = \ell_e(x) + x \cdot \ell'_e(x)$, π.χ. αντί για x θέσουμε $x + x \cdot 1 = 2x$)

(ii) (10 μονάδες) Αν το παίγνιο έχει 3 ατομικούς παίκτες.

Πρόβλημα 2. (30 μονάδες) (i) (15 μονάδες) Ακολουθώντας (αν θέλετε) την μέθοδο που χρησιμοποιεί την variational inequality, δείξτε ότι το Τίμημα της Αναρχίας για μη ατομικά παίγνια συμφόρησης με συναρτήσεις καθυστέρησης της μορφής $ax^2 + c$ (με $a, c \geq 0$) είναι

$$PoA = \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{3} - 2}.$$

(ii) (15 μονάδες) Δείξτε το ίδιο φράγμα για συναρτήσεις καθυστέρησης της μορφής $ax^2 + bx + c$ (με $a, b, c \geq 0$).

Πρόβλημα 3. (20 μονάδες) Για την εύρεση μιας EF1 ανάθεσης είδαμε τον αλγόριθμο στις διαφάνειες 30 και 31. Αποδείξαμε την ορθότητά του αλλά δεν αποδείξαμε ότι τερματίζει.

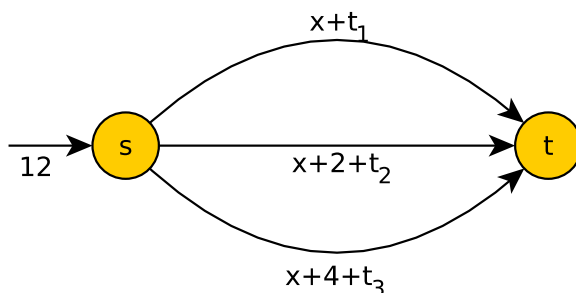
(i) (10 μονάδες) Βρείτε συνάρτηση (δυναμικού) που να αυξάνει και στα δύο “βήματα αναθέσεων” του αλγορίθμου, δηλ. είτε όταν αναθέτουμε ένα καινούριο στοιχείο σε κάποιον agent είτε όταν “διαγράφουμε” τους κύκλους αναθέτοντας σε κάθε agent την ομάδα αντικειμένων του επομένου του στον κύκλο.

(ii) (10 μονάδες) Πως μπορούμε τελικά να εγγυηθούμε ότι ο αλγόριθμος τερματίζει?

Πρόβλημα 4. (30 μονάδες) Δίνεται το nonatomic δικτυακό παίγνιο συμφοράς του σχήματος όπου εισέρχονται δώδεκα μονάδες ροής (τα t_1, t_2, t_3 είναι αρχικά 0).

(i) (10 μονάδες) Βρείτε την βέλτιστη ροή και βέλτιστα διόδια, δηλαδή διόδια που κάνουν την αρχική βέλτιστη ροή να είναι ροή ισορροπίας στο δίκτυο με τα διόδια.

(Υπενθύμιση: Η βέλτιστη ροή για ένα δίκτυο με συναρτήσεις $\ell_e(x)$ είναι ροή ισορροπίας αν αλλάξουμε τις συναρτήσεις σε $\hat{\ell}_e(x) = \ell_e(x) + x \cdot \ell'_e(x)$, και τα marginal tolls είναι βέλτιστα διόδια, δεξ και διαφάνεια 39 στη διάλεξη για nonAtomic Selfish Routing.)



Απάντηση: πάνω ακμή 5 μονάδες ροής και $t_1 = 5$, μεσαία ακμή 4 μονάδες ροής και $t_2 = 4$, κάτω ακμή 3 μονάδες ροής και $t_3 = 3$.

(ii) (10 μονάδες) Θεωρούμε ότι τη διαχείριση των διοδίων την δίνουμε σε κάποιους διαχειριστές που στόχο έχουν να μεγιστοποιήσουν τα κέρδη τους. Κάθε διαχειριστής θα διαχειρίζεται μια ακμή και σαν κέρδος θα υπολογίζει το γινόμενο του διόδου που επέλεξε επί την ροή που περνά από την ακμή στη Nash Ισορροπία.

Αν θέσουμε άνω φράγματα στα διόδια που μπορούν να βάλουν οι διαχειριστές τις τιμές 5, 4 και 3 για την πάνω μεσαία και κάτω ακμή αντίστοιχα, δείξτε ότι κανείς δεν έχει συμφέρον να βάλει διόδιο χαμηλότερο από το αντίστοιχο άνω φράγμα, δεδομένου ότι οι άλλοι έχουν βάλει τα άνω φράγματα. Πόσο κέρδος δίνει κάθε ακμή στον διαχειριστή της?

(Δείξτε το απλά για έναν παίκτη.)

(iii) (10 μονάδες) Έστω ότι αν υπάρχουν μόνο δύο διαχειριστές και παίρνει μία ή δύο ακμές ο καθένας, τότε εξακολουθεί κανείς να μην έχει συμφέρον να βάλει διόδιο χαμηλότερο από το αντίστοιχο άνω φράγμα της ακμής (bonus αν το δείξετε).

Με βάση το κέρδος από κάθε ακμή (που υπολογίσατε νωρίτερα), δώστε αν υπάρχουν: μια Envy free ανάθεση των ακμών στους 2 διαχειριστές, μια EFX ανάθεση των ακμών που δεν είναι Envy Free, μια EF1 ανάθεση των ακμών που δεν είναι EFX, μια ανάθεση που δεν είναι ούτε καν EF1. (Διαχειριστής με δύο ακμές αθροίζει τα κέρδη των ακμών του)