Περιγραφική Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις

Εαρινό Εξάμηνο 2020-2021

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

2η Εργασία

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Προθεσμία παράδοσης: Παρασκευή 28 Μαΐου.

Σκοπός της εργασίας είναι να αποδειχθούν κάποιες θεμελιώδεις ιδιότητες των Borel συνόλων και Borel-ισομορφισμών. (Οι ορισμοί δίνονται πιο κάτω και θα αναφερθούν και στο μάθημα.)

Ορισμοί.

Ορισμός 1. Θεωρούμε ένα μη κενό σύνολο X και μια οικογένεια $\mathcal{A}$ υποσυνόλων του X. Η $\mathcal{A}$ είναι **σ-άλγεβρα** στο X αν ικανοποιεί τα εξής:

(i) Τα σύνολα $\varnothing$, X ανήκουν στην $\mathcal{A}$.
(ii) Αν $A \in \mathcal{A}$ τότε $X \setminus A \in \mathcal{A}$.
(iii) Αν $A_n \in \mathcal{A}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Μερικά τετριμμένα παραδείγματα σ-αλγεβρών στο X είναι το δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(X)$ και το $\{\varnothing, X\}$.

Όπως είναι γνωστό αν έχουμε ένα μη κενό σύνολο $\mathcal{F}$ από σ-άλγεβρες στο ίδιο σύνολο X τότε η τομή

$$\bigcap \mathcal{F} = \{A \subseteq X \mid \forall \mathcal{A} \in \mathcal{F}\ A \in \mathcal{A}\}$$

είναι επίσης σ-άλγεβρα στο X.

Ορισμός 2. Θεωρούμε έναν μετρικό χώρο X και το σύνολο $\mathcal{F}$ όλων των σ-αλγεβρών στο X που περιέχουν τα ανοικτά υποσύνολα του X, δηλαδή

$$\mathcal{F} = \{\mathcal{A} \mid \text{η } \mathcal{A} \text{ είναι } \sigma\text{-άλγεβρα στο } X \text{ και για κάθε ανοικτό } V \subseteq X \text{ έχουμε } V \in \mathcal{A}\}$$

Παρατηρούμε ότι $\mathcal{P}(X) \in \mathcal{F}$ και συνεπώς $\mathcal{F} \neq \varnothing$. Η σ-άλγεβρα $\mathcal{B}(X)$ των **Borel υποσυνόλων του** X είναι η οικογένεια

$$\mathcal{B}(X) = \bigcap \mathcal{F}.$$

Ένα υποσύνολο του X ονομάζεται **Borel** αν ανήκει στη σ-άλγεβρα $\mathcal{B}(X)$.

Είναι σαφές από τα προηγούμενα ότι η οικογένεια $\mathcal{B}(X)$ έχει τις εξής ιδιότητες:

(1) Η $\mathcal{B}(X)$ είναι σ-άλγεβρα και κάθε ανοικτό υποσύνολο του X περιέχεται στην $\mathcal{B}(X)$, δηλαδή η $\mathcal{B}(X)$ είναι στοιχείο της πιο πάνω $\mathcal{F}$.
(2) Αν $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα στο $\mathcal{X}$ που περιέχει όλα τα ανοικτά υποσύνολα του X τότε $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{A}$.

Με άλλα λόγια η $\mathcal{B}(X)$ είναι *η ελάχιστη σ-άλγεβρα στο X που περιέχει τα ανοικτά.*

Ορισμός 3. Θεωρούμε μετρικούς χώρους X και Y. Μια συνάρτηση $f : X \to Y$ είναι **Borel-μετρήσιμη** αν αντιστρέφει τα ανοικτά υποσύνολα του Y σε Borel υποσύνολα του X, δηλαδή για κάθε ανοικτό $U \subseteq Y$ έχουμε $f^{-1}[U] \in \mathcal{B}(X)$.

Προφανώς κάθε συνεχής συνάρτηση $f : X \to Y$ είναι Borel-μετρήσιμη γιατί για κάθε ανοικτό $U \subseteq Y$ το σύνολο $f^{-1}[U]$ είναι ανοικτό και συνεπώς Borel.

Ένας ισομορφισμός $f : X \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow Y$ είναι **Borel ισομορφισμός** αν οι συναρτήσεις $f : X \to Y$ και $f^{-1} : Y \to X$ είναι Borel-μετρήσιμες.

Οι μετρικοί χώροι X και Y είναι **Borel ισομορφικοί** αν υπάρχει Borel ισομορφισμός $f : X \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow Y$.

Ορισμός 4. Θεωρούμε δύο Πολωνικούς χώρους $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ και έναν μονομορφισμό $f : \mathcal{X} \rightarrowtail \mathcal{Y}$. Η f λέγεται **καλός Borel-μονομορφισμός** αν

(i) είναι Borel-μετρήσιμη,

(ii) η εικόνα $f[\mathcal{X}]$ είναι Borel υποσύνολο του $\mathcal{Y}$, και

(iii) η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : f[\mathcal{X}] \to \mathcal{X}$ είναι Borel μετρήσιμη. (Θεωρούμε το $f[\mathcal{X}]$ ως μετρικό υπόχωρο του $\mathcal{Y}$.)

Σχόλιο: Είναι γνωστό ότι κάθε ένα-προς-ένα Borel-μετρήσιμη συνάρτηση ικανοποιεί όλες τις πιο πάνω ιδιότητες, δηλαδή είναι καλός Borel-μονομορφισμός. Αυτό όμως είναι συνέπεια ενός δύσκολου θεωρήματος, το οποίο δεν παίρνουμε δεδομένο σε αυτό το φυλλάδιο.

Τα αποτελέσματα που θα αποδείξετε με υποδείξεις

Παρουσιάστε τα ακόλουθα αποτελέσματα με αποδείξεις. Δίνονται υποδείξεις.

Πρόταση 5. *Για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και κάθε $n \geq 1$ ισχύει*

$$\mathbf{\Sigma}^0_n|\mathcal{X} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{X}),$$

δηλαδή κάθε $\mathbf{\Sigma}^0_n$ υποσύνολο του $\mathcal{X}$ είναι και Borel υποσύνολο του $\mathcal{X}$.

Απόδειξη. (Υποδείξεις) Με επαγωγή στο $n \geq 1$. ⊣

Παρατήρηση 6. Θεωρούμε μετρικούς χώρους X, Y, Borel-μετρήσιμες συναρτήσεις $f_1, f_2 : X \to Y$ και ένα Borel σύνολο $B \subseteq X$. Τότε η συνάρτηση $f : X \to Y$ με

$$\begin{cases} f_1(x), & x \in B, \\ f_2(x), & x \notin B, \end{cases}$$

είναι Borel-μετρήσιμη.

Απόδειξη. (Υποδείξεις) Για κάθε ανοικτό $U \subseteq Y$ έχουμε

$$f^{-1}[U] = (f_1^{-1}[U] \cap B) \cup (f_2^{-1}[U] \cap (X \setminus B)).$$

⊣

Οι Borel-μετρήσιμες συναρτήσεις χαρακτηρίζονται ως εξής.

Πρόταση 7. *Θεωρούμε Πολωνικούς χώρους $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ και μια συνάρτηση $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$. Τα εξής είναι ισοδύναμα.*

(1) *Η f **αντιστρέφει τα ανοικτά** υποσύνολα του $\mathcal{Y}$ σε Borel υποσύνολα του $\mathcal{X}$, δηλαδή η f είναι Borel-μετρήσιμη.*

(2) *Η f **αντιστρέφει τα Borel** υποσύνολα του $\mathcal{Y}$ σε Borel υποσύνολα του $\mathcal{X}$, δηλαδή για κάθε Borel σύνολο $B \subseteq \mathcal{Y}$ το σύνολο $f^{-1}[B]$. (Μερικές φορές ο ορισμός των Borel-μετρησίμων συναρτήσεων δίνεται με αυτή τη συνθήκη.)*

Απόδειξη. (Υποδείξεις)

Η κατεύθυνση (2) $\Longrightarrow$ (1) είναι άμεση γιατί κάθε ανοικτό υποσύνολο του $\mathcal{Y}$ είναι Borel υποσύνολο του $\mathcal{Y}$. Για την κατεύθυνση (1) $\Longrightarrow$ (2) θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathcal{Y} \mid f^{-1}[A] \in \mathcal{B}(\mathcal{X})\}.$$

Από την υπόθεση κάθε ανοικτό υποσύνολο του $\mathcal{Y}$ ανήκει στην $\mathcal{A}$. Δείξτε ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα στο $\mathcal{Y}$ και συμπεράνετε ότι $\mathcal{B}(\mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{A}$. ⊣

Παρατήρηση 8. Η σύνθεση Borel-μετρησίμων συναρτήσεων είναι Borel-μετρήσιμη.

Απόδειξη. (Υποδείξεις) Θεωρούμε Borel-μετρήσιμες συναρτήσεις $f : X \to Y$ και $g : Y \to Z$. Εξηγήστε γιατί για κάθε ανοικτό $U \subseteq Z$ η αντίστροφη εικόνα $(g \circ f)^{-1}[U]$ είναι Borel υποσύνολο του X. ⊣

Παίρνουμε δεδομένο το ακόλουθο αποτέλεσμα που συνδέει τα Borel υποσύνολα υπόχωρων με τα Borel σύνολα του αρχικού χώρου.

Πρόταση 9. *Αν X είναι μετρικός χώρος και το Y είναι ένα μη κενό υποσύνολο του X τότε ένα $A \subseteq Y$ είναι Borel στον μετρικό χώρο Y αν και μόνο αν είναι της μορφής $B \cap Y$ όπου το B είναι Borel στον X. Δηλαδή*

$$\mathcal{B}(Y) = \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}(X)\}.$$

Παρατήρηση 10. Για κάθε καλό Borel-μονομορφισμό $f : \mathcal{X} \rightarrowtail \mathcal{Y}$ και κάθε Borel σύνολο $B \subseteq \mathcal{X}$ το σύνολο $f[B]$ είναι Borel υποσύνολο του $\mathcal{Y}$.

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g = f^{-1} : f[\mathcal{X}] \rightarrowtail \mathcal{X}$. Τότε ισχύει

$$f[B] = g^{-1}[B] = \{y \in f[\mathcal{X}] \mid g(y) \in B\}.$$

Το $f[B]$ είναι Borel υποσύνολο του $f[\mathcal{X}]$ γιατί η $g = f^{-1}$ είναι Borel-μετρήσιμη. Εξηγήστε γιατί το $f[B]$ είναι Borel υποσύνολο του $\mathcal{Y}$. ⊣

Παρατήρηση 11. Θεωρούμε καλούς Borel μονομορφισμούς $f : \mathcal{X} \rightarrowtail \mathcal{Y}$ και $g : \mathcal{Y} \rightarrowtail Z$. Τότε η σύνθεση $g \circ f : \mathcal{X} \rightarrowtail \mathcal{Y}$ είναι καλός Borel μονομορφισμός.

Απόδειξη. Οι συναρτήσεις $g \circ f$ και $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ είναι Borel-μετρήσιμες από την Παρατήρηση 8.

Τέλος η εικόνα $(g \circ f)[X] = g[f[X]]$ είναι Borel υποσύνολο του Y από την Παρατήρηση 10 γιατί οι f, g είναι καλοί Borel μονομορφισμοί. ⊣

Θεώρημα 12 (Schröder-Bernstein για καλούς Borel μονομορφισμούς)**.** *Για κάθε δύο Πολωνικούς χώρους $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$ αν υπάρχουν καλοί Borel μονομορφισμοί*

$$f : \mathcal{X} \rightarrowtail \mathcal{Y} \quad \textit{και} \quad g : \mathcal{Y} \rightarrowtail \mathcal{X}$$

τότε υπάρχει Borel ισομορφισμός $h : \mathcal{X} \twoheadrightarrow \mathcal{Y}$.

Απόδειξη. (Α. Τσαρπαλιάς.) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\varphi : \mathcal{Y} \rightarrowtail f[\mathcal{X}] : \varphi(y) = f(g(y)).$$

Εξηγήστε γιατί η φ είναι καλός Borel μονομορφισμός.

Ορίζουμε την ακολουθία υποσυνόλων $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ του $\mathcal{Y}$ ως εξής:

$$C_0 = \mathcal{Y} \setminus f[\mathcal{X}]$$
$$C_{n+1} = \varphi[C_n].$$

Δείξτε ότι κάθε C_n είναι Borel υποσύνολο του $\mathcal{Y}$.

Ορίζουμε επίσης $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$. Τότε το D είναι Borel υποσύνολο του $\mathcal{Y}$ (γιατί;). Παρατηρούμε ακόμα ότι

$$\varphi[D] = \varphi[\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \varphi[C_n] = \bigcup_{n \geq 1} C_n \subseteq D.$$

Τέλος ορίζουμε

$$\tau : \mathcal{Y} \to \mathcal{Y} : \tau(y) = \begin{cases} \varphi(y), & y \in D \\ y, & y \notin D. \end{cases}$$

Εξηγήστε γιατί η τ είναι Borel μετρήσιμη.

Δείξτε ότι η τ παίρνει τιμές στο $f[\mathcal{X}]$: δοσμένου $y \in \mathcal{Y}$ χωρίστε περιπτώσεις $y \notin D$ και $y \in D$.

Έπειτα δείξτε ότι η τ είναι μονομορφισμός: δοσμένων $y_1, y_2 \in \mathcal{Y}$ με $\tau(y_1) = \tau(y_2)$ δείξτε αρχικά ότι είτε $y_1, y_2 \in D$ είτε $y_1, y_2 \notin D$, δηλαδή είτε και τα δύο ανήκουν στο D είτε και τα δύο δεν ανήκουν στο D.

Στη συνέχεια δείξτε ότι η τ είναι επί του $f[\mathcal{X}]$: δοσμένου $z \in f[\mathcal{X}]$ χωρίστε περιπτώσεις $z \notin D$ και $z \in D$. Μάλιστα δείξτε ότι η $\tau^{-1} : f[\mathcal{X}] \to \mathcal{Y}$ δίνεται από τον τύπο

$$\tau^{-1}(z) = \begin{cases} \varphi^{-1}(z), & z \in D, \\ z, & z \notin D. \end{cases}$$

Εξηγήστε γιατί η τ^{-1} είναι Borel-μετρήσιμη.

Προκύπτει από τα προηγούμενα ότι η τ είναι καλός Borel μονομορφισμός. Τέλος ορίζουμε

$$h : \mathcal{Y} \to \mathcal{X} : h(y) = f^{-1}(\tau(y)).$$

Η συνάρτηση h είναι καλά ορισμένη γιατί η τ παίρνει τιμές στο $f[\mathcal{X}]$ και είναι Borel-μετρήσιμη ως σύνθεση Borel-μετρησίμων συναρτήσεων. Επιπλέον είναι μονομορφισμός ως σύνθεση μονομορφισμών και επιμορφισμός γιατί η $f^{-1} : f[\mathcal{X}] \to \mathcal{X}$ είναι επί του $\mathcal{X}$ και η τ είναι επί του $f[\mathcal{X}]$.

Τέλος η αντίστροφη συνάρτηση $h^{-1} = \tau^{-1} \circ f$ είναι Borel-μετρήσιμη ως σύνθεση Borel-μετρησίμων συναρτήσεων. ⊣

Λήμμα 13. *Ορίζουμε $f : \mathcal{N} \to 2^{\mathbb{N}}$ ως εξής*

$$f(\alpha) = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{\alpha(0)\text{-φορές}}, 1, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{\alpha(1)\text{-φορές}}, 1, \dots, 1, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{\alpha(n)\text{-φορές}}, 1, \dots).$$

Τότε η f είναι καλός Borel μονομορφισμός. Μάλιστα οι f και $f^{-1} : f[\mathcal{N}] \rightarrowtail \mathcal{N}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις και το σύνολο $f[\mathcal{N}]$ είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_2$ υποσύνολο του $2^{\mathbb{N}}$.

Απόδειξη. (Υποδείξεις) Πάρτε δεδομένο ότι για κάθε $\alpha, \beta \in 2^{\mathbb{N}}$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\alpha|(n+1) = \beta|(n+1) \iff (\forall k \leq \alpha(0) + \cdots + \alpha(n) + n + 1)\ [\ f(\alpha)(k) = f(\beta)(k)\ ].$$

Επίσης πάρτε δεδομένο ότι $f[\mathcal{N}] = \{\gamma \in 2^{\mathbb{N}} \mid$ για άπειρα $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $\gamma(n) = 1\}$. ⊣

Πόρισμα 14. *Οι χώροι $\mathcal{N}$ και $2^{\mathbb{N}}$ είναι Borel-ισομορφικοί.*

(Μπορεί να αποδειχθεί ότι κάθε υπεραριθμήσιμος Πολωνικός χώρος είναι Borel-ισομορφικός με τον χώρο του Baire.)

Απόδειξη. Η ταυτοτική συνάρτηση id: $2^{\mathbb{N}} \to \mathcal{N}$ είναι συνεχής μονομορφισμός με αντίστροφη συνεχή γιατί η μετρική του $2^{\mathbb{N}}$ είναι ο περιορισμός της μετρικής του $\mathcal{N}$ στο $2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}}$. Επιπλέον η εικόνα της είναι το $2^{\mathbb{N}}$ που είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{N}$. Συνεπώς η id είναι καλός Borel μονομορφισμός.

Συμπληρώστε την απόδειξη με βάση τα προηγούμενα αποτελέσματα. ⊣