Άσκηση 2 σελ. 26. Σταθεροποιούμε ένα $k \in \mathbb{N}$, και παρατηρούμε ότι για κάθε $m \geq k$ ισχύει

$$\cap_{n=k}^{\infty} A_n \subseteq A_m.$$

Άρα λόγω της μονοτοτονίας του μέτρου, για κάθε $m \geq k$,

$$\mu\left(\cap_{n=k}^{\infty} A_n\right) \leq \mu(A_m).$$

Επομένως και

$$\mu\left(\cap_{n=k}^{\infty} A_n\right) \leq \inf\{\mu(A_n) : n \geq k\}.$$

Παρατηρούμε τώρα ότι η ακολουθία $(\cup_{n=k}^{\infty} A_n)_k$ είναι αύξουσα ακολουθία συνόλων, άρα

$$\mu(\liminf_n A_n) = \mu\left(\cup_k \cap_{n=k}^{\infty} A_n\right) = \lim_k \mu\left(\cap_{n=k}^{\infty} A_n\right).$$

Από την άλλη μεριά, η ακολουθία $(\inf\{\mu(A_n) : n \geq k\})$ είναι αύξουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών, άρα

$$\liminf_n \mu(A_n) = \lim_k \inf\{\mu(A_n) : n \geq k\}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} \mu(\liminf_n A_n) &= \lim_k \mu(\cap_{n=k}^{\infty} A_n) \leq \lim_k inf\{\mu(A_n) : n \geq k\} \\ &= \liminf_n \mu(A_n). \end{aligned}$$

Η δεύτερη ανισότητα αποδεικνύεται ανάλογα.

Άσκηση 3, σελ. 26. Από την υποπροσθετικότητα του μ παίρνουμε ότι

$$\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \Sigma_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty.$$

Άρα για την ακολουθία $(\cup_{n=k}^{\infty} A_n)_k$, (που είναι μια φθίνουσα ακολουθία συνόλων), θα ισχύει

$$\mu(\limsup_n A_n) = \mu(\cap_{k=1}^{\infty} \cup_{n=k}^{\infty} A_n) = \lim_k \mu(\cup_{n=k}^{\infty} A_n),$$

και χρησιμοποιώντας πάλι την υποπροσθετικότητα του μ,

$$\mu(\limsup_n A_n) \leq \lim_k \Sigma_{n=k}^{\infty} \mu(A_n) = 0,$$

αφού η σειρά συγκλίνει.

Άσκηση 6, σελ. 26. Δοθέντος μέτρου μ στο $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, θέτουμε $a_n = \mu(\{n\}) \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Αν $A \subseteq \mathbb{N}$ είναι υποσύνολο του $\mathbb{N}$, τότε επειδή προφανώς είναι το πολύ αριθμήσιμο, παίρνουμε

$$\mu(A) = \Sigma_{n \in A} \mu(\{n\}) = \Sigma_{n \in A} a_n.$$

Αντίστροφα τώρα, αν $(a_n)_n$ είναι ακολουθία μη αρνητικών αριθμών, μπορούμε να ορίσουμε για $A \subseteq \mathbb{N}$,

$$\mu(A) = \Sigma_{n \in A} a_n.$$

Το μ είναι μέτρο: Προφανώς $\mu(\varnothing) = \Sigma_{n \in \varnothing} a_n = 0$ και αν $A_n \subseteq \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ είναι ανά δύο ξένα,

$$\Sigma_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) = \Sigma_{n \in \mathbb{N}} \Sigma k \in A_n a_k = \Sigma_{k \in \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n} a_k = \mu(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n).$$

Άσκηση 7, σελ. 27. Αφού $\mu(A \triangle B) = 0$ και το μ είναι πλήρες, θα έχουμε ότι $A \setminus B, B \setminus A \in \mathcal{A}$ και $\mu(A \setminus B) = \mu(B \setminus A) = 0$. Άρα $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$ θα είναι επίσης στοιχείο της $\mathcal{A}$. Επομένως και το $B = (A \cap B) \cup (B \setminus A)$ θα είναι στοιχείο της $\mathcal{A}$, και υπολογίζουμε εύκολα ότι:

$$\mu(A) = \mu((A \cap B) \cup (A \setminus B)) = \mu(A \cap B) + \mu(A \setminus B) = \mu(A \cap B) \quad \text{και}$$
$$\mu(B) = \mu((A \cap B) \cup (B \setminus A)) = \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A) = \mu(A \cap B).$$

Άσκηση 10, σελ. 27. Κατ΄ αρχάς παρατηρούμε ότι λόγω της μονοτονίας του μέτρου, είναι

$$\mu(A_i) = \mu(X \cap A_i) \geq \mu(A \cap A_i),$$

για κάθε $A \in \mathcal{A}$ και $i \in I$. Επομένως, για κάθε $A \in \mathcal{A}$, θα ισχύει $J_A \subseteq J_X$ και αρκεί πιο απλά να δείξουμε ότι το σύνολο

$$J := J_X = \{i \in I : \mu(A \cap A_i) > 0\},$$

είναι το πολύ αριθμήσιμο.

Το αποδεικνύουμε πρώτα για πεπερασμένα μέτρα:

Έστω ότι το μ είναι πεπερασμένο. Για $n \in \mathbb{N}$, θέτουμε

$$J_n = \{i \in I : \mu(A_i) > 1/n\}.$$

Επειδή τα σύνολα A_i, $i \in I$ είναι ξένα ανά δύο, θα ισχύει

$$\mu(\cup_{i \in J_n} A_i) = \Sigma_{i \in J_n} \mu(A_i) \geq \Sigma_{i \in J_n} \frac{1}{n} = \frac{|J_n|}{n} < \infty,$$

και συνεπώς η πληθικότητα $|J_n|$ κάθε συνόλου J_n οφείλει να είναι πεπερασμένη. Επειδή τώρα προφανώς $J = \cup J_n$, έπεται ότι το J είναι το πολύ αριθμήσιμο.

Έστω τώρα ότι το μ είναι σ-πεπερασμένο, στην οποία περίπτωση, μπορούμε να βρούμε μια αύξουσα οικογένεια συνόλων C_n $n \in \mathbb{N}$, τέτοια ώστε $X = \cup_n C_n$ και $\mu(C_n) < \infty$. Θεωρούμε τα μέτρα

$$\mu_n : \mathcal{A} \ni A \mapsto \mu(A \cap C_n)$$

τα οποία είναι προφανώς πεπερασμένα. Θέτοντας τώρα για $n \in \mathbb{N}$,

$$J_n = \{i \in I : \mu_n(A_i) > 0\},$$

παρατηρούμε ότι $J = \cup_n J_n$:

Πραγματικά, αν για κάποιο n και κάποιο i, $i \in J_n$, τότε $\mu(C_n \cap A_i) > 0$ και από τη μονοτονία, $\mu(A_i) > 0$, άρα $i \in J$. Αντίστροφα, αν $i \in J$, τότε $\mu(A_i) > 0$, και επειδή

$$\mu(A_i) = \mu(\cup_n (C_n \cap A_i)) \leq \Sigma_n \mu(C_n \cap A_i)$$

έπεται ότι $i \in J_n$ για ένα τουλάχιστον n.

Από το προηγούμενο τώρα, κάθε J_n είναι το πολύ αριθμήσιμο, άρα και το J, σαν το πολύ αριθμήσιμη ένωση το πολύ αριθμησίμων συνόλων.

Άσκηση 11, σελ. 27. Το αποδεικνύουμε με επαγωγή στη $\sigma(\mathcal{F})$.

Αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο

$$\mathcal{E} = \{A \in \sigma(\mathcal{F}) : \forall \epsilon > 0 \ \exists F \in \mathcal{F} \ \mu(A \triangle F) < \epsilon\}$$

είναι σ-άλγεβρα και περιέχει το $\mathcal{F}$.

Ότι περιέχει το $\mathcal{F}$ είναι προφανές, αφού για $F \in \mathcal{F}$, $\mu(F \triangle F) = 0 < \epsilon$.

Έστω τώρα $A \in \mathcal{E}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι και $A^c \in \mathcal{E}$. Έστω $\epsilon > 0$. Μπορούμε να βρούμε $F \in \mathcal{F}$, ώστε $\mu(A \triangle F) < \epsilon$. Παρατηρούμε ότι

$$A^c \triangle F^c = (A^c \setminus F^c) \cup (F^c \setminus A^c) = (F \setminus A^c) \cup (A \setminus F^c) = A \triangle F.$$

Άρα και $\mu(A^c \triangle F^c) = \mu(A \triangle F) < \epsilon$ και προφανώς $F^c \in \mathcal{F}$. Άρα και $A^c \in \mathcal{E}$.

Σαν ένα ενδιάμεσο βήμα, θα δείξουμε ότι η $\mathcal{E}$ είναι κλειστή στις πεπερασμένες ενώσεις. Έστω λοιπόν $A_1, A_2 \in \mathcal{E}$ και θέλουμε να δείξουμε ότι $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{E}$. Θεωρούμε $\epsilon > 0$. Θα υπάρχουν τότε $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, τέτοια ώστε $\mu(A_i \triangle F_i) < \epsilon/2$ για $i = 1, 2$. Επειδή

$$(A_1 \setminus F_1) \cup (A_2 \setminus F_2) \supseteq (A_1 \cup A_2) \setminus (F_1 \cup F_2)$$

και

$$(F_1 \setminus A_1) \cup (F_2 \setminus A_2) \supseteq (F_1 \cup F_2) \setminus (A_1 \cup A_2)$$

θα ισχύει

$$\mu((A_1 \cup A_2) \triangle (F_1 \cup F_2)) \leq \mu((A_1 \triangle F_1) \cup (A_2 \triangle F_2)) < \epsilon$$

και συνεπώς $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{E}$.

Στη γενική περίπτωση τώρα, αφού η $\mathcal{E}$ είναι άλγεβρα, όπως είδαμε από τα παραπάνω, αρκεί να δείξουμε ότι για A_n, $n \in \mathbb{N}$ ξένα ανά δύο στην $\mathcal{E}$,

$\cup_n A_n \in \mathcal{E}$. Παρατηρούμε τώρα ότι αφ' ενός $\cup_n A_n \in \sigma(\mathcal{F})$ και $\mu(\cup_n A_n) = \Sigma_n \mu(A_n) < \infty$, αφού το μ είναι πεπερασμένο μέτρο. Άρα δοθέντος $\epsilon > 0$, θα υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $\Sigma_{n=n_0+1}^{\infty}\mu(A_n) < \epsilon/2$. Επίσης επειδή η $\mathcal{E}$ είναι άλγεβρα, θα υπάρχει $F \in \mathcal{F}$, τέτοιο ώστε $\mu(\cup_{n=1}^{n_0} A_n \triangle F) < \epsilon/4$. Άρα

$$\begin{aligned}
\mu(\cup_n A_n \triangle F) &\leq \mu(\cup_n A_n \setminus F) + \mu(F \setminus \cup_n A_n) \\
&\leq \mu(\cup_{n=1}^{n_0} A_n \setminus F) + \mu(\cup_{n=n_0+1}^{\infty} A_n) + \mu(F \setminus \cup_{n=1}^{n_0} A_n) \\
&< \epsilon/4 + \epsilon/2 + \epsilon/4 = \epsilon
\end{aligned}$$

και συνεπώς $\cup_n A_n \in \mathcal{E}$.