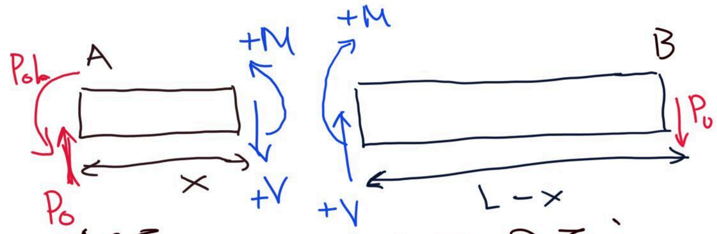
Εσωτερικές τέμνουσες δυνάμεις και εσωτερικές ροπές κάμψης

Υβριδικό διάγραμμα ελευθέρου σώματος

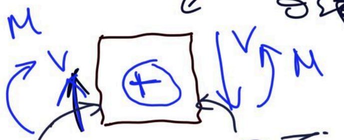


ΔΕΣ αριστερού αποκομμένου τμήματος

ΔΕΣ δεξιά αποκομμένου τμήματος

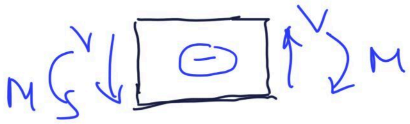
Εναλλακτική παρουσίαση των κατά σύμβαση θετικών τεμνουσών δυνάμεων και ροπών κάμψης (εσωτερικών πάντα), σε ένα εσωτερικό τμήμα, κομμένο από δεξιά και αριστερά

Κατά σύμβαση θετικές φορές



αριστερό άκρο αποκομμένου τμήματος

δεξί άκρο του κομμένου τμήματος, από το εσωτερικό της δοκού



Κατά σύμβαση αρνητικές φορές των εσωτερικών τεμνουσών δυνάμεων και ροπών κάμψης

Εναλλακτική παρουσίαση των θετικών και αρνητικών εσωτερικών τεμνουσών δυνάμεων και ροπών κάμψης, με βάση τις παραμορφώσεις που προκαλούν αυτές στη δοκό.

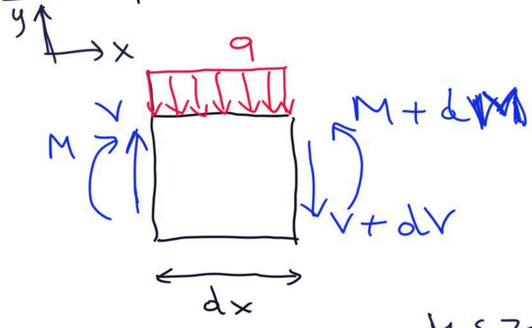
Διαμήκης άξονας της δοκού

Οι θετικές τέμνουσες δυνάμεις δρουν ωρολογιακά πάνω στο αποκομμένο τμήμα. Επειδή το υλικό της δοκού είναι παραμορφώσιμο, οι V τείνουν να το αποτμήσουν (κόψουν, ψαλιδίσουν).

Οι θετικές ροπές κάμψης τείνουν να συμπιέσουν (βραχύνουν) την άνω διαμήκη ίνα της δοκού.

Η προσήμανση δεν γίνεται με βάση τις φορές των αξόνων κάποιου συστήματος αναφοράς, αλλά με βάση την αλλαγή στο σχήμα (παραμόρφωση) που τείνουν να επιφέρουν στη δοκό τα εσωτερικά εντατικά μεγέθη.

Σχέσεις μεταξύ εξωτερικών φορτίων, τεμνουσών δυνάμεων και εσωτερικών ροπών κάμψης



$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V - q\,dx - (V+dV) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dV}{dx} = -q}$$

Για ένα μήκος τμήματος της δοκού μεταξύ δύο σημείων C και D, που βρίσκονται στις θέσεις x_C και x_D κατά μήκος της δοκού, μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\int_{V_C}^{V_D} dV = -\int_{x_C}^{x_D} q\,dx \Rightarrow V_D - V_C = -\int_{x_C}^{x_D} q\,dx = -(\text{εμβαδόν}$$

επιφάνειας που καταλαμβάνει το γράφημα του κατανεμημένου φορτίου). Η τελευταία σχέση δεν ισχύει αν μεταξύ των σημείων C και D παρεμβάλλεται ένα συγκεντρωμένο φορτίο. Η ένταση της κατανομής του συγκεντρωμένου φορτίου (πεπερασμένου μεγέθους δύναμη προς μηδενικού μήκους επιφάνειας) δε μπορεί να οριστεί.

Από ισορροπία ροπών στο αποκομμένο τμήμα παίρνω

$$\Sigma M = 0 \Rightarrow -M - q\,dx\left(\frac{dx}{2}\right) - (V+dV)\,dx + M + dM = 0$$

ως προς το αριστερό άκρο του τμήματος

$$\Rightarrow \frac{dM}{dx} = V$$

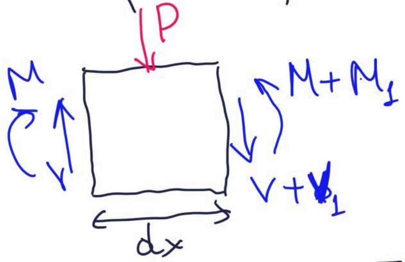
Αγνοώ τους όρους που περιέχουν ~~δι~~ γινόμενα διαφορικών, ως αμελητέους σε σχέση με όρους που περιέχουν πεπερασμένα μεγέθη ή γινόμενα πεπερασμένων όρων επί διαφορικά. Κάνω προσέγγιση πρώτης τάξης κρατώντας όρους πεπερασμένου μεγέθους και όρους γινόμενα πεπερασμένου μεγέθους όρων επί διαφορικά.

Επιπλέον μπορώ να γράψω και την παρακάτω ολοκληρωτική σχέση

$$M_D - M_C = \int_{x_C}^{x_D} V\,dx = \text{εμβαδόν του διαγράμματος των τεμνουσών δυνάμεων μεταξύ των σημείων C και D.}$$

Η παραπάνω ολοκληρωτική σχέση ισχύει όταν δεν εφαρμόζεται συγκεντρωμένη ροπή μεταξύ των σημείων C και D. Αντίθετα η παραπάνω ολοκληρωτική σχέση μπορεί να εφαρμοστεί αν μεταξύ των σημείων C και D εφαρμόζεται μια συγκεντρωμένη εξωτερική δύναμη.

Έστω τώρα ότι εφαρμόζεται συγκεντρωμένη δύναμη P, στο στοιχείο μήκους dx



$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V - P - (V + V_1) = 0 \Rightarrow V_1 = -P$

Έχουμε πεπερασμένου μεγέθους μεταβολή της V, κατά μήκος του στοιχείου. Το μέγεθος της μεταβολής ισούται κατ' απόλυτη τιμή με το συγκεντρωμένο εξωτερικό φορτίο P που ασκείται στο στοιχείο μήκους dx.

Από ισορροπία ροπών ως προς το αριστερό άκρο του στοιχείου, παίρνουμε:

$$\Sigma M = 0 \Rightarrow -M - P\left(\frac{dx}{2}\right) - (V + V_1)dx + M + M_1 = 0$$

$$\Rightarrow M_1 = P\left(\frac{dx}{2}\right) + V\,dx + V_1\,dx$$

Η M_1 επομένως στην περίπτωση αυτή παριστάνει μια απειροστά μικρού μεγέθους μεταβολή της M, καθώς μετακινούμαστε από το αριστερό στο δεξί άκρο του στοιχείου. Η ποσότητα M_1 αναφέρεται σε μεταβολή ροπής dM.

Στη θέση εφαρμογής ενός συγκεντρωμένου φορτίου P, δεν ισχύει η σχέση $\frac{dM}{dx} = V$, διότι το V παρουσιάζει άλμα (ασυνέχεια), μεγέθους −P, στη θέση αυτή. Η παράγωγος $\frac{dM}{dx}$ δεν ορίζεται στη θέση αυτή (έχει διαφορετική τιμή ακριβώς δεξιά και ακριβώς αριστερά από το P).

Έστω συγκεντρωμένη ροπή M_0, εξωτερική, που ασκείται στο στοιχείο.

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V - V - V_2 = 0 \Rightarrow V_1 = 0$

Δεν αλλάζει η τέμνουσα δύναμη στο σημείο εφαρμογής (γύρω από αυτό) μιας συγκεντρωμένης ροπής.

Από ισορροπία ροπών ως προς το αριστερό άκρο του στοιχείου, παίρνουμε:

$$\Sigma M = 0 \Rightarrow -\cancel{M} + M_0 + (V+V_1)dx + \cancel{M} + M_1 = 0$$

$$\Rightarrow M_1 = -M_0$$

Αγνοείται ο όρος $(V+V_1)dx$ που αποτελεί γινόμενο πεπερασμένου μεγέθους επί διαφορικό, σε σχέση με πεπερασμένου μεγέθους όρους (προσέγγιση μηδενικής τάξης).

Στα σημεία εφαρμογής συγκεντρωμένης ροπής έχω ασυνέχεια (άλμα) στο διάγραμμα καμπτικών ροπών.