

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑΤΙΚΗΣ - ΟΜΑΔΑ Α'

1) Αν $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$, $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$ όπου

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ τα μοναδιαία διανύσματα καρτεσιανού συστήματος αναφοράς, δείξτε ότι:

i) $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

ii) $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

- 2) Να βρεθεί με την βοήθεια του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων η γωνία που σχηματίζεται από αυτά.
- 3) Να βρεθεί με την βοήθεια του εσωτερικού γινομένου η προβολή ενός διανύσματος πάνω σε έναν άξονα.
- 4) Το μέτρο του εξωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων ισούται με τον εμβαδόν ενός επίπεδου σχήματος. Ποιο είναι το σχήμα αυτό;
- 5) Για το μικτό γινόμενο τριών διανυσμάτων $\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ αποδείξτε την σχέση :

$$\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

6) Αποδείξτε ότι:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$$

- 7) Δίνονται δύο σημεία A και B με καρτεσιανές συντεταγμένες A(2,3,0) και B(-2,4,6). Υπολογίστε τα διευθύνοντα συνημιτόνα της κατεύθυνσης AB. Αν $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, όπου $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ τα μοναδιαία διανύσματα του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων, υπολογίστε την προβολή του \vec{a} πάνω στην \overline{AB} .
- 8) Στο επίπεδο Oxy δίνονται τα σημεία A(3,2) και B(2,5). Υπολογίστε τις γωνίες που σχηματίζουν τα διανύσματα \vec{OA} και \vec{OB} με τον άξονα Ox και την αντίστοιχη γωνία του διανύσματος $\vec{OG} = \vec{OA} + \vec{OB}$. Επίσης υπολογίστε το εμβαδόν του παραλληλόγραμμου OAGB.
- 9) Υπολογίστε ένα μοναδιαίο διάνυσμα που είναι κάθετο στο επίπεδο που περιέχει τα δύο διανύσματα $\vec{a} = 2\vec{i} - 5\vec{j} + 3\vec{k}$ και $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ με τη βοήθεια πρώτον του εσωτερικού και δεύτερον του εξωτερικού γινομένου.

10) Δίνεται ένα καρτεσιανό σύστημα αναφοράς με μοναδιαία διανύσματα $\underline{\varepsilon}_1, \underline{\varepsilon}_2, \underline{\varepsilon}_3$.
 Δείξτε ότι τα διανύσματα

$$\underline{\varepsilon}'_1 = -\frac{\underline{\varepsilon}_1}{\sqrt{2}} + \frac{\underline{\varepsilon}_2}{\sqrt{2}}, \quad \underline{\varepsilon}'_2 = -\frac{\underline{\varepsilon}_1}{\sqrt{6}} - \frac{\underline{\varepsilon}_2}{\sqrt{6}} + \frac{2\underline{\varepsilon}_3}{\sqrt{6}} \quad \text{και} \quad \underline{\varepsilon}'_3 = (\underline{\varepsilon}_1 + \underline{\varepsilon}_2 + \underline{\varepsilon}_3)/\sqrt{3} \quad \text{είναι τα}$$

μοναδιαία διανύσματα ενός νέου καρτεσιανού συστήματος αναφοράς.

11) Υπολογίστε το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $A(2,3,5)$, $B(4,2,-1)$, $C(3,6,4)$.

12) Δείξτε ότι, αν τα διανύσματα \underline{a} και \underline{b} δεν είναι συγγραμμικά, από την εξίσωση $x\underline{a} + y\underline{b} = \underline{0}$ έπεται $x = 0$ και $y = 0$.

13) i) Μία ευθεία σχηματίζει γωνία 60° με τον άξονα Ox και την ίδια γωνία με τον Oy .
 Υπολογίστε την γωνία που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα Oz .

ii) Υπολογίστε την γωνία που σχηματίζει η διαγώνιος ενός κύβου με τις ακμές του καθώς και την γωνία που σχηματίζει με τις πλευρές του.

14) Δείξτε ότι τα τρία διανύσματα:

$$\underline{a} = 3\underline{i} - 2\underline{j} + \underline{k}, \quad \underline{b} = \underline{i} - 3\underline{j} + 5\underline{k} \quad \text{και} \quad \underline{c} = 2\underline{i} + \underline{j} - 4\underline{k} \quad \text{είναι συνεπίπεδα και σχηματίζουν τις πλευρές ορθογωνίου τριγώνου. Ποιό διάνυσμα είναι η υποτείνουσα του τριγώνου;}$$

15) Δίνονται τα διανύσματα $\underline{a} = \underline{i} + \underline{j}$, $\underline{b} = 2\underline{i} - 3\underline{j} + \underline{k}$ και $\underline{c} = 4\underline{j} - 3\underline{k}$.
 Υπολογίστε τα διανύσματα $\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c})$ και $(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c}$ και δείξτε ότι διαφέρουν.

16) Στην εξίσωση $\underline{a} \times \underline{\omega} = \underline{b}$ τα \underline{a} και \underline{b} είναι γνωστά. Υπάρχει μονοσήμαντη λύση για το $\underline{\omega}$; Αν το άγνωστο $\underline{\omega}$ είναι διάνυσμα κάθετο στο \underline{a} , υπολογίστε το $\underline{\omega}$ συναρτήσει του \underline{a} και του \underline{b} .

17) Δύναμη $F=10\text{N}$ εφαρμόζεται στο σημείο A με κατεύθυνση προς το σημείο B . Το σημείο A έχει καρτεσιανές συντεταγμένες $(6,1,3)$ m σε σύστημα συντεταγμένων (O, x, y, z) και το σημείο B $(3,6,9)$ m αντίστοιχα. Δώστε το διάνυσμα \underline{F} της δύναμης στο καρτεσιανό σύστημα αναφοράς $(A; \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$.