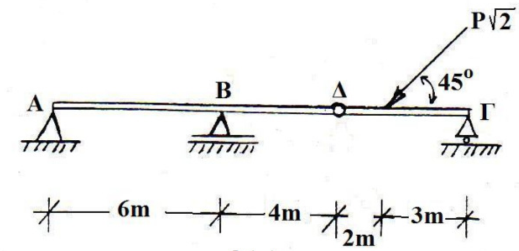
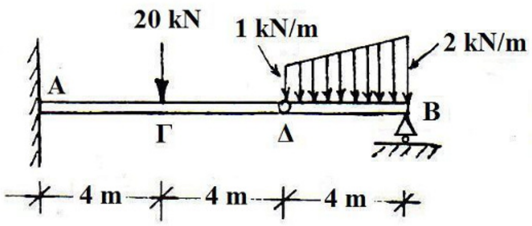
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑΤΙΚΗΣ
ΟΜΑΔΑ Η΄

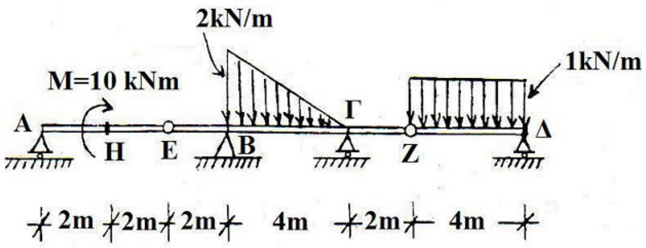


3(α)

1. Με χρήση της Α.Δ.Ε. να υπολογιστούν **(α)** οι αντιδράσεις V_A, V_B και V_Δ του φορέα της Άσκησης 3(α), **(β)** οι αντιδράσεις M_A και V_A του φορέα της Άσκησης 3(β), και **(γ)** οι αντιδράσεις V_B και V_Γ του φορέα της Άσκησης 3(γ) της ΟΜΑΔΑΣ Δ΄.

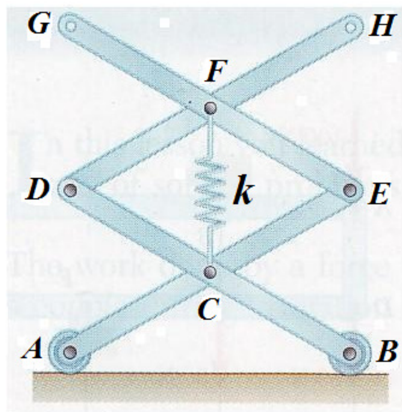


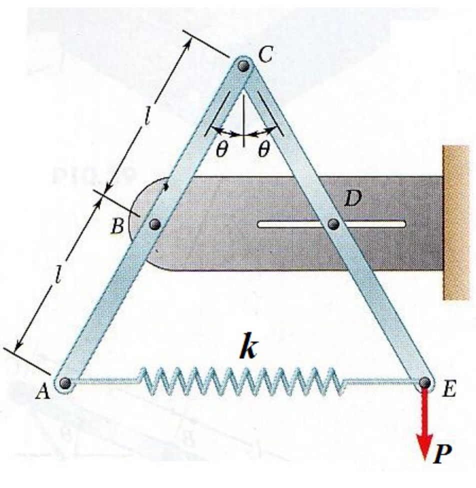
3(β)



3(γ)

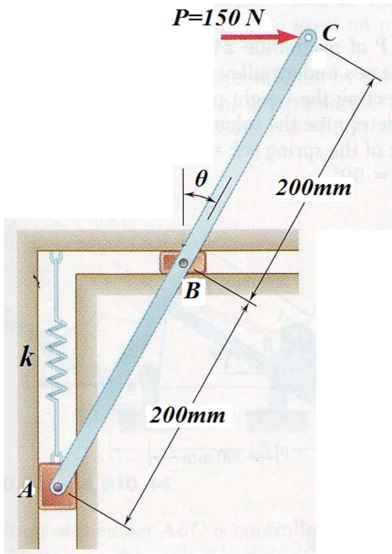
2. Ελατήριο σταθεράς $k = 15\ kN/m$ συνδέει τα σημεία C και F του μηχανισμού του σχήματος. Να υπολογιστεί η δύναμη του ελατηρίου και η κατακόρυφη μετατόπιση του σημείου G όταν μία κατακόρυφη δύναμη $P = 120\ N$ ασκείται: **(α)** στο σημείο G, **(β)** στα σημεία C και H , **(γ)** στο σημείο E και **(δ)** στα σημεία E και F.

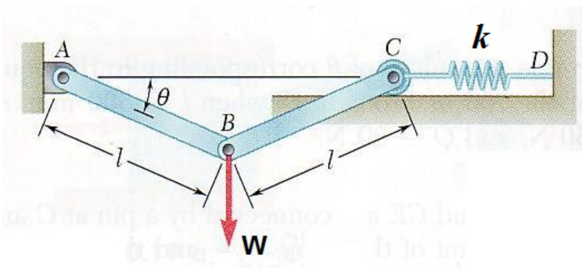




3. Οι ράβδοι AC και CE συνδέονται με άρθρωση στο C και με το ελατήριο σταθεράς $k = 260\ N/m$. Το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος όταν $\theta = 30°$. Για τα μήκη δίνεται οτι $AB = BC = CD = DE = l = 25\ cm$. Όταν στο E ασκείται κατακόρυφο φορτίο $P = 180\ N$, να βρεθεί η τιμή της γωνίας θ στη θέση στατικής ισορροπίας.

4. Η ράβδος ABC συνδέεται αρθρωτά στα A και B με μικρούς κύβους που ολισθαίνουν χωρίς τριβή μέσα στούς οδηγούς του σχήματος. Τα ελατήριο σταθεράς $k = 3\ kN/m$ έχει το φυσικό του μήκος όταν η ράβδος είναι κατακόρυφη. Για φορτίο $P = 150\ N$ να βρεθεί η γωνία θ στη θέση στατικής ισορροπίας.



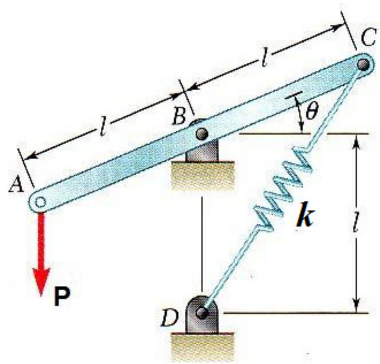


5. Το βάρος $W = 600\ N$ εφαρμόζεται στο σημείο B του μηχανισμού. Το ελατήριο σταθεράς $k = 2{,}5\ kN/m$ είναι στο φυσικό του μήκος όταν οι ράβδοι AB και BC είναι οριζόντιες. Να βρεθεί η γωνία θ στη θέση στατικής ισορροπίας. Δίνεται $l = 30\ cm$ και ράβδοι αβαρείς.

6. Αν το ελατήριο σταθεράς k έχει το φυσικό του μήκος όταν η ράβδος ABC είναι οριζόντια, να βρεθεί η γωνία θ στη θέση στατικής ισορροπίας.

<u>1η αριθμητική εφαρμογή</u>: $P = 300\ N,\ l = 0{,}4\ m,\ k = 5\ kN/m.$

<u>2η αριθμητική εφαρμογή</u>: $P = 300\ N,\ l = 0{,}4\ m,\ k = 3\ kN/m.$



— ——————————— —

ΛΥΣΕΙΣ

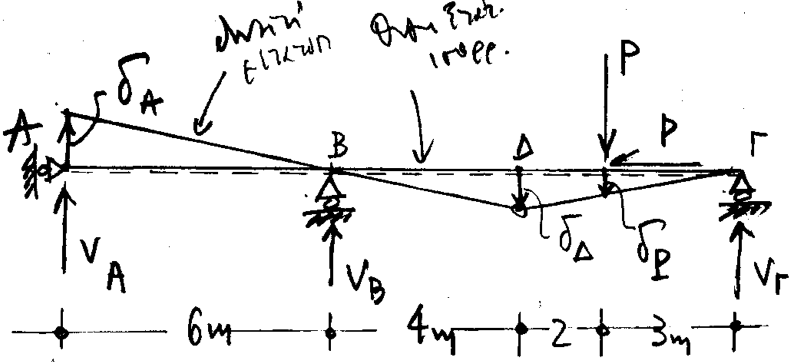
"Υπολογισμός αντιδράσεων στήριξης φορέων από την ΟΜΑΔΑ Δ', με χρήση της Αρχής των Δυνατών Έργων"

ΟΜΑΔΑ Δ

3η Άσκηση (α)

Υπολογισμός της V_A:

Αφαιρείται η κατακόρυφη δέσμευση στο Α και δίνεται δυνατή μετατόπ. δ_A



Η ΑΔΕ(ΑΔΜ) γράφεται

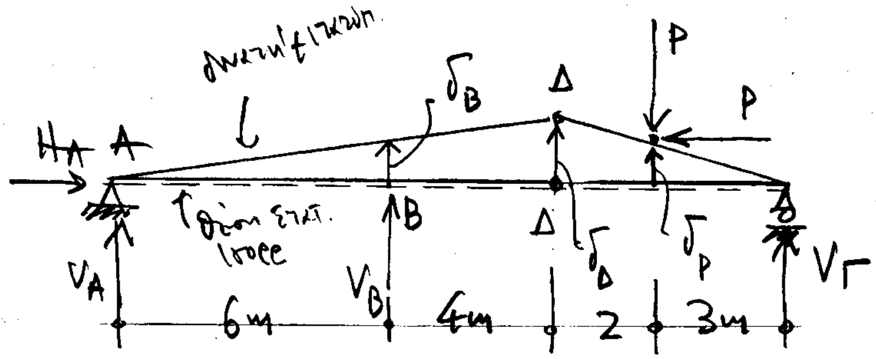
$$\delta W = V_A \delta_A + P \delta_P = 0 \quad (1)$$

Αλλά $\delta_\Delta = \frac{4}{6}\delta_A$ και $\delta_P = \frac{3}{5}\delta_\Delta = \frac{3}{5}\frac{4}{6}\delta_A = \frac{2}{5}\delta_A$

τότε (1) $\Rightarrow V_A \cancel{\delta_A} + P\frac{2}{5}\cancel{\delta_A} = 0 \longrightarrow \boxed{V_A = -\frac{2}{5}P}$

Υπολογισμός της V_B

Αφαιρείται η κύλιση στο Β και δίνεται δυνατή δ_B.



ΑΔΕ(ΑΔΜ)

$$\delta W = V_B \delta_B - P\cdot\delta_P = 0 \quad (1)$$

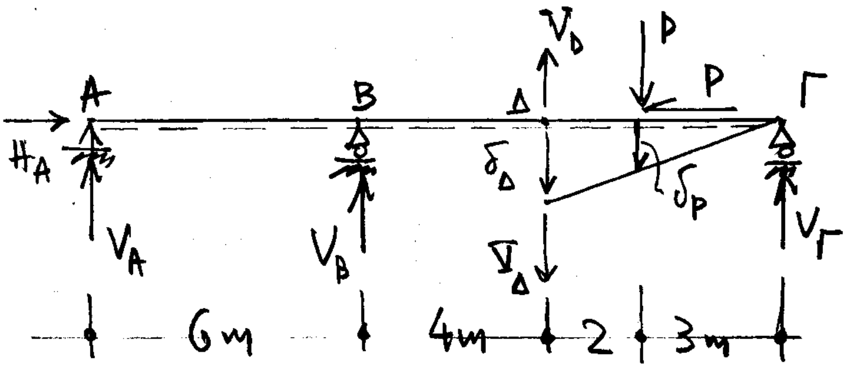
αλλά $\delta_\Delta = \frac{10}{6}\delta_B$ και $\delta_P = \frac{3}{5}\delta_\Delta = \frac{3}{5}\frac{10}{6}\delta_B = \delta_B$

τότε (1) $\Rightarrow V_B\cdot\delta_B - P\cdot\delta_B = 0 \longrightarrow \boxed{V_B = P}$

../..

Υπολογισμός της V_Δ

Αφαιρείται η (δέσμευση σε κατακόρ. μετακίν. της) έδρασης στο Δ.



δίνεται μετακ. δ_Δ

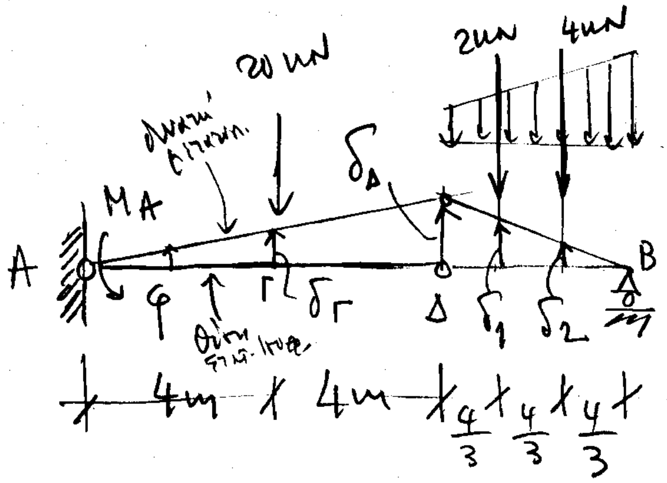
ΑΔΕ:

$$\delta W = V_\Delta \cdot \delta_\Delta + P \cdot \delta_P = 0$$

$$\delta_P = \frac{3}{5}\delta_\Delta \;,\; (1) \Rightarrow V_\Delta \delta_\Delta + P\frac{3}{5}\delta_\Delta = 0 \Rightarrow \boxed{V_\Delta = -\frac{3}{5}P}$$

3η Άσκηση (β)

Υπολογισμός της M_A Τοποθετείται άρθρωση στο A και δίνεται δυνατή γωνία φ.



ΑΔΕ (ΑΔΜ):

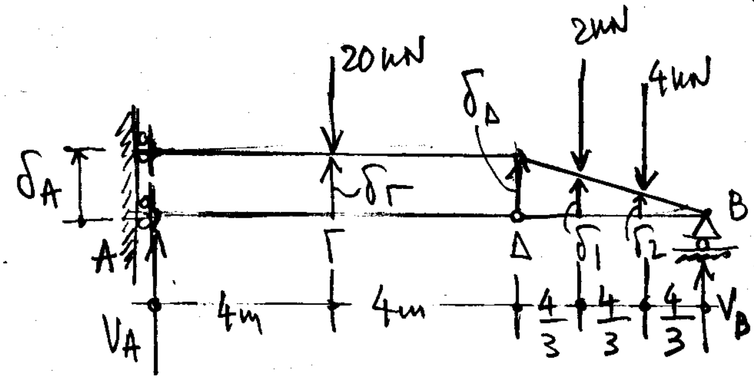
$$\delta W = M_A\varphi - 20\delta_\Gamma - 2\delta_1 - 4\delta_2 = 0 \quad (1)$$

$$\delta_\Gamma = 4\varphi, \quad \delta_\Delta = 8\varphi,$$

$$\delta_1 = \frac{2}{3}\delta_\Delta = \frac{16}{3}\varphi, \quad \delta_2 = \frac{1}{2}\delta_1 = \frac{8}{3}\varphi$$

$$(1) \Rightarrow \quad M_A\cancel{\varphi} - 20\cdot 4\cancel{\varphi} - 2\,\frac{16}{3}\cancel{\varphi} - 4\,\frac{8}{3}\cancel{\varphi} = 0 \;\rightarrow\; \boxed{M_A = 101{,}333\ kNm}$$

Υπολογισμός της V_A Τοποθετείται κυλιόμενη πάκτωση στο A και δίνεται δυνατή μετατόπιση δ_A.



ΑΔΕ (ΑΔΜ):

$$\delta W = V_A\delta_A - 20\cdot\delta_\Gamma - 2\delta_1 - 4\delta_2 = 0 \quad (1)$$

$$\delta_\Gamma = \delta_\Delta = \delta_A, \quad \delta_1 = \frac{2}{3}\delta_\Delta = \frac{2}{3}\delta_A$$

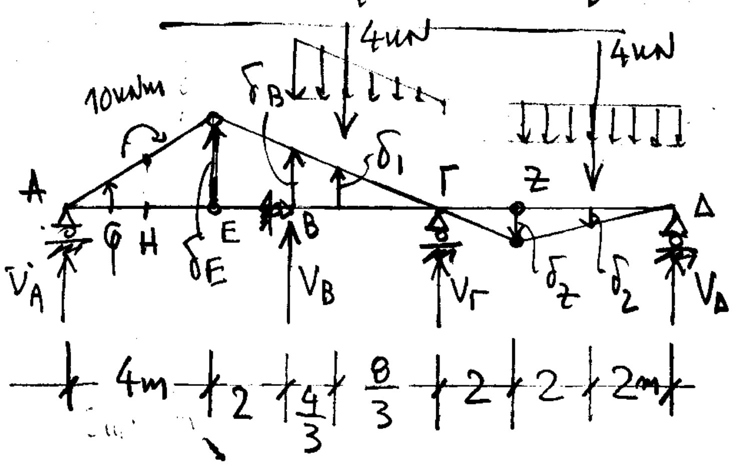
$$\delta_2 = \frac{1}{2}\delta_1 = \frac{1}{3}\delta_A$$

$$(1) \Rightarrow \quad V_A\delta_A - 20\delta_A - 2\,\frac{2}{3}\delta_A - 4\,\frac{1}{3}\delta_A = 0 \rightarrow \boxed{V_A = 22{,}667\ kN}$$

…/..

3η Άσκηση (γ)

Υπολογισμός της V_B



Αφαιρείται η κατακόρυφη δέσμευση στο B και δίνεται δυνατή μετακίνηση δ_B.

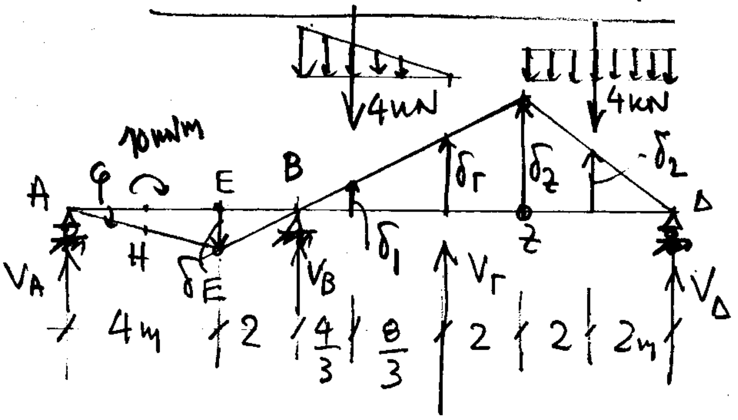
ΑΔΕ (ΑΔΜ):

$$\delta W = -10\cdot\varphi + V_B\cdot\delta_B - 4\cdot\delta_1 + 4\cdot\delta_2 = 0 \quad (1)$$

$$\delta_E = \frac{3}{2}\delta_B, \quad \varphi = \frac{\delta_E}{4} = \frac{3}{8}\delta_B, \quad \delta_1 = \frac{2}{3}\delta_B, \quad \delta_z = \frac{\delta_B}{2}, \quad \delta_2 = \frac{\delta_z}{2} = \frac{\delta_B}{4}$$

$$(1) \Rightarrow -10\,\frac{3}{8}\cancel{\delta_B} + V_B\cancel{\delta_B} - 4\,\frac{2}{3}\cancel{\delta_B} + 4\,\frac{\cancel{\delta_B}}{4} = 0 \Rightarrow \boxed{V_B = 5{,}417\ kN}$$

Υπολογισμός της V_Γ



Αφαιρείται η κύλιση στο Γ και δίνεται δυνατή μετακίν. δ_Γ

ΑΔΕ (ΑΔΜ):

$$\delta W = 10\cdot\varphi - 4\cdot\delta_1 + V_\Gamma\,\delta_\Gamma - 4\cdot\delta_2 = 0 \quad (1)$$

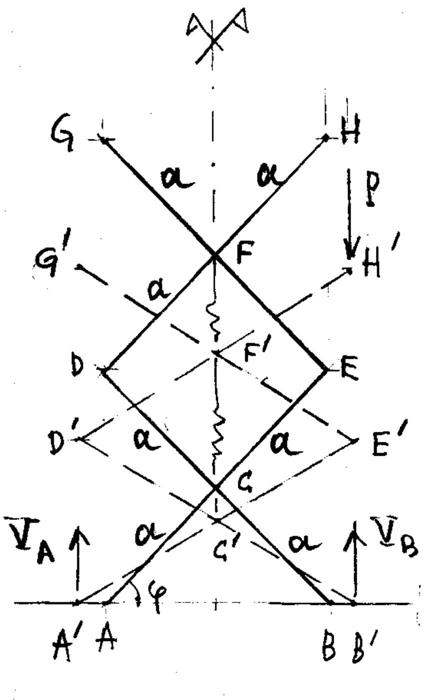
$$\delta_E = \frac{\delta_\Gamma}{2}, \quad \varphi = \frac{\delta_E}{4} = \frac{\delta_\Gamma}{8}, \quad \delta_1 = \frac{\delta_\Gamma}{3}, \quad \delta_2 = \frac{\delta_z}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\delta_\Gamma = \frac{3}{4}\delta_\Gamma$$

$$(1) \Rightarrow 10\cdot\frac{\cancel{\delta_\Gamma}}{8} - 4\,\frac{\cancel{\delta_\Gamma}}{3} + V_\Gamma\,\cancel{\delta_\Gamma} - 4\,\frac{3}{4}\cancel{\delta_\Gamma} = 0 \Rightarrow \boxed{V_\Gamma = 3{,}083\ kN}$$

"Εύρεση Θέσεων Ισορροπίας Μηχανισμών"

1η Άσκηση

1) Ελατήριο σταθεράς $k = 15\ kN/m$ συνδέει τα σημεία G και F του μηχανισμού. Να υπολογιστεί η δύναμη του ελατηρίου και η κατακόρυφη μετατόπιση του σημείου G όταν μια κατακόρυφη δύναμη $P = 120\ N$ ασκείται (a) στο G, (b) στα G και H, (c) στο E και (d) στα E και F.



Αρχικές στάθμες

$h_C = a\sin\varphi$

$h_D = h_E = 2a\sin\varphi = 2h_C$

$h_F = \dots = 3h_C$

$h_G = h_H = 4h_C$

Αρχικό μήκος ελατηρίου: $l = h_F - h_C = 2h_C$

Τελικές στάθμες (στη στατική ισορροπία): $h_{D'} = h_{E'} = 2h_{C'}$, $h_{F'} = 3h_{C'}$, $h_{G'} = h_{H'} = 4h_{C'}$ (1)

Τελικό μήκος ελατηρίου (στη στατική ισορροπία): $l' = h_{F'} - h_{C'} = 2h_{C'}$ (2)

Υποχώρηση: $\Delta h_C = h_C - h_{C'}$; $\Delta h_D = h_D - h_{D'} = 2h_C - 2h_{C'} = 2\Delta h_C$

παρομοίως: $\Delta h_E = 2\Delta h_C$, $\Delta h_F = 3\Delta h_C$, $\Delta h_G = \Delta h_H = 4\Delta h_C$ (3)

Μεταβολή μήκους ελατηρίου: $\Delta l = l - l' = 2\Delta h_C$ (4)

Δυνατές μετακινήσεις (ή ανυψώσεις) στη θέση στατικής ισορροπίας:

(1) $\Rightarrow \delta h_{D'} = \delta h_{E'} = 2\,\delta h_{C'}$, $\delta h_{F'} = 3\cdot\delta h_{C'}$, $\delta h_{G'} = \delta h_{H'} = 4\,\delta h_{C'}$ (5)

Δυνατή μεταβολή μήκους ελατηρ. στη θέση στατ. ισορροπίας:

(2) $\Rightarrow \delta l' = 2\cdot\delta h_{C'}$ κόντυνση μήκους $2\delta h_{C'}$ (6)

(a) ΑΔΕ: $\delta W = -P\cdot\delta h_{C'} + F_{ελ}\cdot\delta l' = 0 \Rightarrow \boxed{F_{ελ} = P\,\dfrac{\delta h_{C'}}{\delta l'} = \dfrac{120}{2} = 60\,N}$

$\Delta l = \dfrac{F_{ελ}}{k} = \dfrac{60N}{15000\,N/m} = 4mm$, (4) $\Rightarrow \Delta h_C = \dfrac{\Delta l}{2} = 2mm$

./.

(3) $\Rightarrow$ $\boxed{\Delta h_G = 4\ \Delta h_c = 8\,mm}$

$$\text{(b)}\quad ADE:\ \delta W = -P\cdot \delta h_{c'} - P\,\delta h_{H'} + F_{ey}\cdot \delta e' = 0 \Rightarrow$$

$2\delta h_{c'}$

$$\boxed{F_{ey} = P\frac{\delta h_{c'}}{\delta e'} + P\frac{\delta h_{H'}}{\delta e'} = 120\,\frac{1}{2} + 120\,\frac{4}{2} = 300\ N}$$

$$\Delta\ell = \frac{F_{ey}}{k} = \frac{300}{15000} = 20\,mm\ ,(4) \Rightarrow \Delta h_c = \frac{\Delta\ell}{2} = 10\,mm$$

(3) $\Rightarrow$ $\boxed{\Delta h_G = 4\,\Delta h_c = 40\,mm}$

$$\text{(c)}\quad ADE:\ \delta W = -P\cdot\delta h_{E'} + F_{ey}\,\delta e' = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{F_{ey} = P\,\frac{\delta h_{E'}}{\delta e'} = P = 120\ N}$$

$$\Delta\ell = \frac{F_{ey}}{k} = \frac{120}{15000} = 8\,mm,\ (4) \Rightarrow \delta h_c = \frac{\Delta\ell}{2} = 4\,mm$$

(3) $\Rightarrow$ $\boxed{\Delta h_G = 4\cdot\Delta h_c = 16\,mm}$

$$\text{(d)}\quad ADE:\ \delta W = -P\,\delta h_{E'} - P\,\delta h_{F'} + F_{ey}\,\delta e' = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{F_{ey} = P\,\frac{\delta h_{E'}}{\delta e'} + P\,\frac{\delta h_{F'}}{\delta e'} = 120\cdot\frac{2}{2} + 120\,\frac{3}{2} = 300\ N}$$

όπως σε (b) $\Rightarrow$ $\boxed{\Delta h_G = 40\,mm}$

…/..

2η Άσκηση

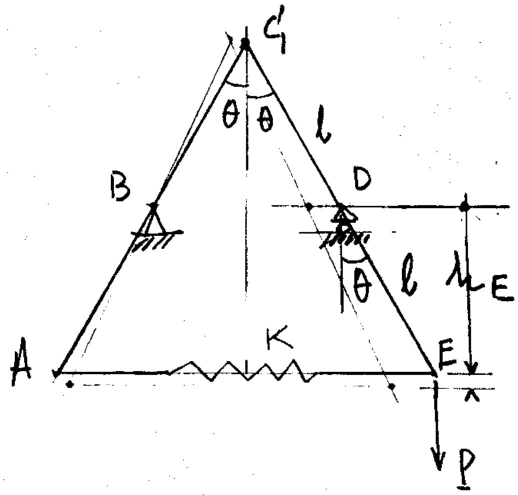
Οι ράβδοι AC και CE συνδέονται αρθρωτά

στο C και με το ελατήριο AE σταθεράς $K=260\,N/m$.

φυσικό μήκος ελατηρίου όταν $\theta=30°$. Δίνεται ότι:
$AB=BC=CD=DE=\ell=25\,cm$.

Για κατακόρυφο φορτίο $P=180\,N$ στο E να βρεθεί η γωνία

θ στη θέση στατικής ισορροπίας.



Έστω θέση στατ. ισορροπ. περιγράφεις $\theta<30°$.

Μήκος ελατηρίου $\ell_{ελ}=\ell_{AE}=2\cdot 2\ell\sin\theta=$
$=4\ell\sin\theta$

Δύναμη ελατηρίου: $F_{ελ}=k(\ell_{φυσ}-\ell_{ελ})=$
$=k(2\ell-\ell_{AE})=k2\ell(1-2\sin\theta)$ θλιπτική

Θέση φορτίου P: $h_E=\ell\cdot\cos\theta$

Έστω $\delta\theta$ δυνατή μεταβολή (έστω αύξηση) της θ στη θέση στατ. ισορροπ.

τότε $\delta\ell_{ελ}=\dfrac{d\ell_{ελ}}{d\theta}\delta\theta=4\ell\cos\theta\cdot\delta\theta$ αύξηση της $\ell_{ελ}$

και $\delta h_E=\dfrac{dh_E}{d\theta}\delta\theta=-\ell\sin\theta\cdot\delta\theta$ αύξηση της h_E (προς τα κάτω)

ΑΔΕ: $\delta W=F_{ελ}\cdot\delta\ell_{ελ}+P\,\delta h_E=0$

ή $k2\ell(1-2\sin\theta)\cdot 4\cdot\ell\cdot\cos\theta\cdot\delta\theta+P(-\ell\cdot\sin\theta\cdot\delta\theta)=0$

ή $\boxed{8k\ell(1-2\sin\theta)=P\cdot\tan\theta}$ (1)

Αριθ. εφαρμ.: $k=260$ N/m , $\ell=25$ cm, $P=180$ N

--/..

Η (1) γράφεται $\underbrace{\frac{8 \cdot 260 \cdot 0{,}25}{180}}_{2{,}888}\left(1-2\sin\theta\right)=\tan\theta$

ή $\boxed{\sin\theta=\frac{2{,}888-\tan\theta}{5{,}777}}$

~~Επίλυ~~

Επίλυση με "επαναλήψεις"

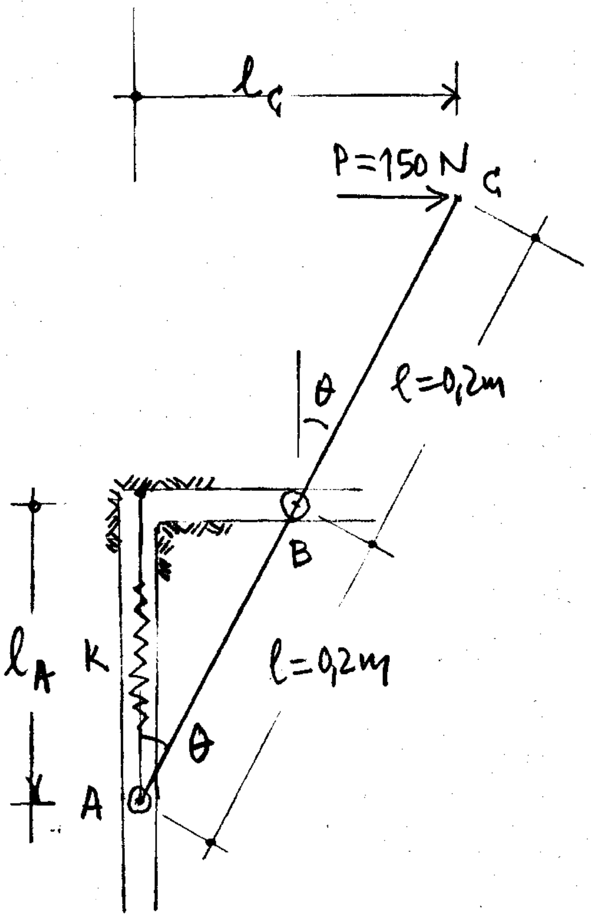
Έστω $\theta=20^{\circ}\rightarrow 25{,}91^{\circ}\rightarrow 24{,}57^{\circ}\rightarrow 24{,}88^{\circ}\rightarrow 24{,}81^{\circ}\rightarrow$

$\rightarrow 24{,}83^{\circ}\rightarrow 24{,}82^{\circ}\rightarrow 24{,}82^{\circ}$

Άρα $\boxed{\theta=24{,}82^{\circ}}$

3η Άσκηση

Η ράβδος ABC φέρει μικρούς τροχούς που κινούνται στους οδηγούς του σχήματος. Το ελατήριο σταθεράς $K = 3\,kN/m$ έχει το φυσικό του μήκος όταν η ράβδος είναι κατακόρυφη. Για φορτίο $P = 150\,N$ να βρεθεί η γωνία θ στη θέση στατικής ισορροπίας.



Σε μια θέση στατικής ισορροπίας

Θέση φορτίου P: $l_c = 2l\sin\theta$

Δύναμη ελατηρίου:

$F_{el} = k(\underbrace{l - l\cos\theta}_{\text{βράχυνση ελατηρίου}}) = kl(1-\cos\theta)$ θλιπτική

Μήκος ελατηρίου:

$l_A = l\cos\theta$

Έστω δυνατή μετατόπιση = δυνατή μεταβολή της θ (δηλ. αύξηση) στη θέση στατικής ισορροπίας, τότε:

$\delta l_c = 2l\cos\theta\cdot\delta\theta$ αύξηση του l_c (προς τα δεξιά)

$\delta l_A = -l\sin\theta\cdot\delta\theta$ μείωση μήκους ελατηρίου

ΑΔΕ: $\delta W = P\cdot\delta l_c + F_{el}\cdot\delta l_A = 0$ ή

$$P\,2l\cos\theta\,\delta\theta + kl(1-\cos\theta)(-l\sin\theta\cdot\delta\theta) = 0$$

ή $kl(1-\cos\theta)\tan\theta = 2P$ (1)

ή $\boxed{kl(\tan - \sin\theta) = 2P}$ (1)

--/--

<u>Αριθ. εφαρμ:</u> $K = 3\,kN/m$, $\ell = 0{,}2\,m$, $P = 150\,N$

(1) $\Rightarrow$ $3000 \cdot 0{,}2 \cdot (\tan\theta - \sin\theta) = 2 \cdot 150$

ή $\boxed{\tan\theta = 0{,}5 + \sin\theta}$

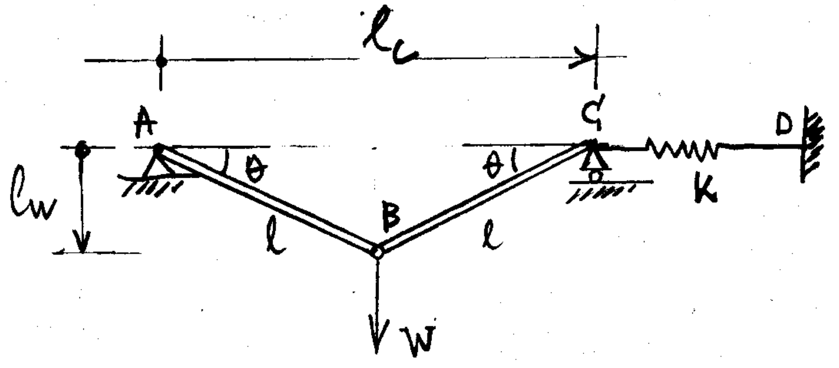
Αριθμ. επίλυση με επαναλήψεις: $\theta = 20^\circ \to 49{,}09^\circ \to 48{,}84^\circ \to$

$\to 51{,}40^\circ \to 52{,}04^\circ \to 52{,}18^\circ \to 52{,}23^\circ$

Άρα $\boxed{\theta = 52{,}23^\circ}$

4η Άσκηση

Το βάρος $W = 600\ N$ εφαρμόζεται στο σημείο B του μηχανισμού. Το ελατήριο σταθεράς $k = 2{,}5\ kN/m$ είναι στο φυσικό του μήκος όταν οι ράβδοι AB και BC είναι οριζόντιες. Να βρεθεί η γωνία θ στη θέση στατικής ισορροπίας. Δίνεται $l = 30\ cm$ και ράβδοι αβαρείς.



Στη θέση στατικής ισορροπίας:

Θέση φορτίου W: $l_w = l\sin\theta$

Επιμήκυνση ελατηρίου = μετατόπιση σημείου C

$\Delta l_{ελ} = 2l - 2l\cos\theta = 2l(1-\cos\theta)$

Δύναμη ελατηρίου $F_{ελ} = k\,\Delta l_{ελ} = 2kl(1-\cos\theta)$ εφελκυστική

Μήκος ελατηρίου $l_{ελ} = l_{AD} - l_c = l_{AD} - 2l\cos\theta$

(όταν αύξηση)

Έστω δυνατή μετακίνηση = δυνατή μεταβολή της θ.

Τότε: $\delta l_w = l\cos\theta\cdot\delta\theta$ αύξηση του l_w (προς τα κάτω)

$\delta l_{ελ} = 2l\sin\theta\cdot\delta\theta$ αύξηση μήκους ελατηρίου

ΑΔΕ: $\delta W = W\cdot\delta l_w - F_{ελ}\cdot\delta l_c = 0$ ή

$$W\cdot l\cos\theta\cdot\delta\theta - 2kl(1-\cos\theta)\cdot 2l\sin\theta\cdot\delta\theta = 0$$

ή $4kl(1-\cos\theta)\tan\theta = W$

../..

ή $\boxed{4k\ell(\tan\theta - \sin\theta) = \bar{W}}$ (1)

Αριθ. εφαρμογή: $W = 600\ N$, $k = 2{,}5\ kN/m$, $\ell = 0{,}3\ m$

(1) $\Rightarrow$ $3000(\tan\theta - \sin\theta) = 600$

ή $\boxed{\tan\theta = 0{,}2 + \sin\theta}$

Επίλυση με επαναλήψεις: $\theta = 20^\circ \rightarrow 37{,}7^\circ \rightarrow 39{,}7^\circ \rightarrow$

$\rightarrow 40{,}18^\circ \rightarrow 40{,}22^\circ$

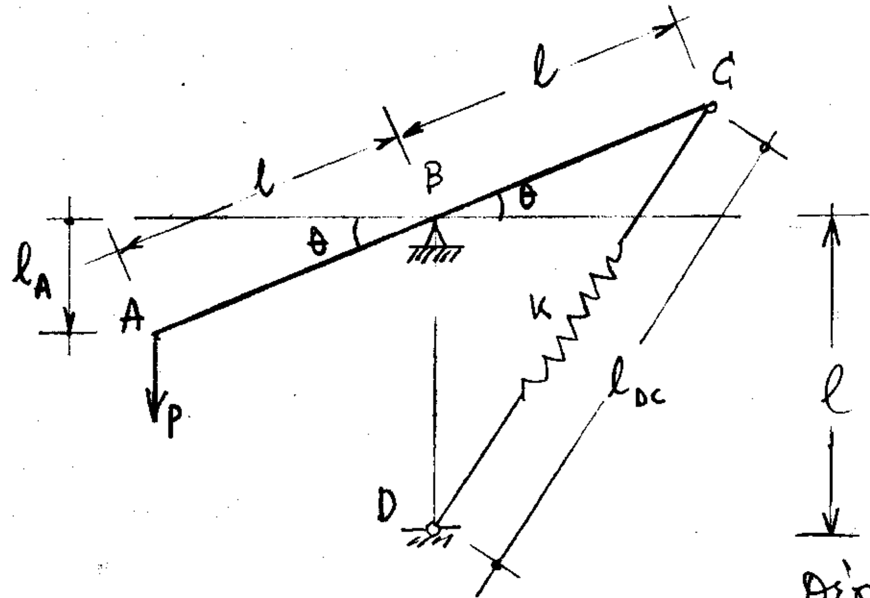
Άρα $\boxed{\theta = 40{,}22^\circ}$

5η Άσκηση

Αν το ελατήριο σταθεράς k έχει το φυσικό του μήκος όταν η ράβδος ABC είναι οριζόντια, να βρεθεί η γωνία θ στη θέση στατικής ισορροπίας

1η περίπτωση: $P = 300\ N$, $l = 0{,}4\ m$, $k = 5\ kN/m$

2η περίπτωση: $P = 300\ N$, $l = 0{,}4\ m$, $k = 3\ kN/m$



Έστω θ η γωνία στη θέση στατικής ισορροπίας:

Θέση φορτίου P $\quad l_A = l \sin\theta$

Φυσικό μήκος ελατηρίου $\quad l_0 = \sqrt{2}\, l$

Τελικό μήκος ελατηρίου $\quad l_{DC} = 2\,l \sin\frac{1}{2}(90+\theta) = 2l\sin\left(45^\circ+\frac{\theta}{2}\right)$

$$= 2l\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\theta}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{2}\, l\left(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

Επιμήκυνση ελατηρίου $\quad \Delta l_{ελ} = l_{DC} - l_0 = \sqrt{2}\, l\left(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}-1\right)$

Δύναμη ελατηρίου $\quad F_{ελ} = k \cdot \Delta l_{ελ} = \sqrt{2}\, kl\left(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}-1\right)$

εφελκυστική (έστω αύξηση)

Έστω δυνατή μετατόπιση = δυνατή μεταβολή της γωνίας θ.

$\delta l_A = l\cos\theta \cdot \delta\theta \quad$ προς τα κάτω

$\delta l_{DC} = \sqrt{2}\, l\, \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\right)\delta\theta \quad$ αύξηση μήκους (ελατηρίου)

../..

ΑΔΕ: $\delta W = P\cdot\delta\ell_A - F_{\varepsilon\lambda}\cdot\delta\ell_{DC} = 0$ ή

$$P\,\ell\cos\theta\cdot\delta\theta - \sqrt{2}\,k\ell\left(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}-1\right)\frac{\sqrt{2}}{2}\ell\left(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right)\delta\theta = 0$$

ή $$P\overbrace{\cos\theta}^{\left(\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)} = k\ell\left(\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

ή $$(P-k\ell)\left(\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}\right) = k\ell\left(\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

ή $$(k\ell-P)\left(\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}\right)\left(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right) = k\ell\left(\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

ή $$\boxed{\frac{k\ell}{k\ell-P} = \cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}} \quad (1)$$

<u>1η Αριθμ. Εφαρμογή:</u> $P=300\ N$, $\ell=0,4\ m$, $k=5\ kN/m$

$$(1) \Rightarrow \frac{5000\cdot 0,4}{5000\cdot 0,4-300} = 1,1765 = \cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}$$

$\Rightarrow \boxed{\sin\frac{\theta}{2} = 1,1765-\cos\frac{\theta}{2}}$ Αριθμητ. λύση με επαναλήψεις: $\frac{\theta}{2}=20^\circ \to$

$\to 13,67^\circ \to 11,36^\circ \to 11,308^\circ \to 11,296^\circ \Rightarrow \boxed{\theta = 22,59^\circ}$

--/..

2η Αριθ. εφαρμογή $P = 300\ N$, $l = 0{,}4\ m$, $K = 3\ kN/m$

$$(1) \Rightarrow \frac{3000 \cdot 0{,}4}{3000 \cdot 0{,}4 - 300} = 1{,}3333 = \cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin\frac{\theta}{2} = 1{,}3333 - \cos\frac{\theta}{2}}$$

Αριθμ. επίλυση με $\overbrace{\ }^{\text{επαναλήψεις:}}$ $\frac{\theta}{2} = 20^\circ \rightarrow 25{,}02^\circ \rightarrow 25{,}42^\circ \rightarrow 25{,}514^\circ \rightarrow$

$\rightarrow 25{,}52^\circ \rightarrow 25{,}52^\circ \Downarrow$ 25,91   25,93

$$\boxed{\theta = 51{,}04^\circ}$$