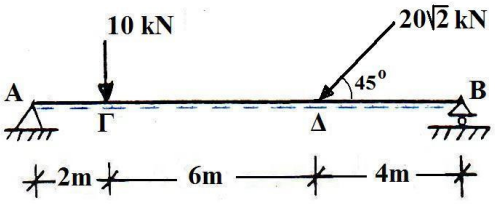
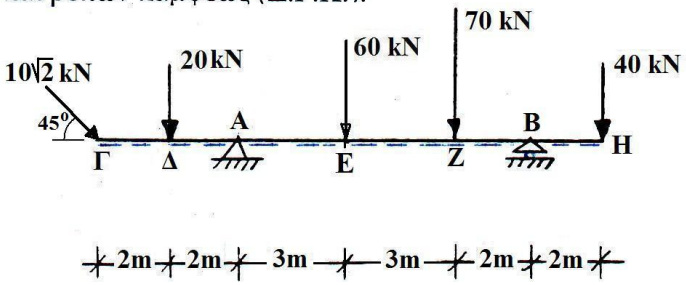
Ε.Μ.Π. - Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.
Τομέας Μηχανικής

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑΤΙΚΗΣ
ΟΜΑΔΑ ΣΤ'

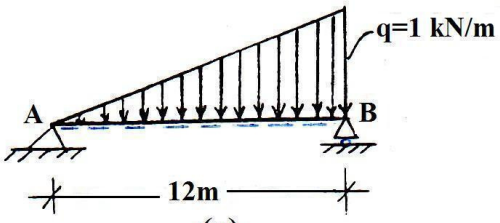
1. Στις παρακάτω δοκούς να γίνουν τα διαγράμματα αξονικών δυνάμεων (Δ.Α.Δ.), τεμνουσών δυνάμεων (Δ.Τ.Δ.) και ροπών κάμψεως (Δ.Ρ.Κ.).



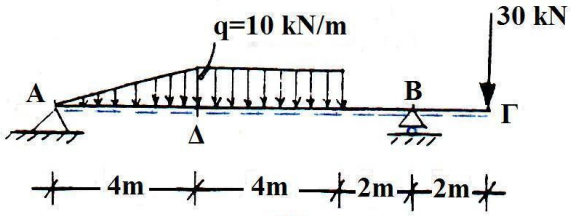
(α)



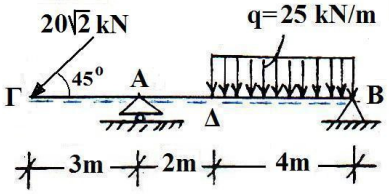
(β)



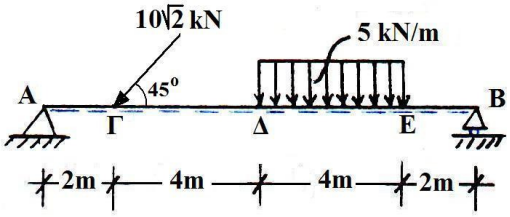
(γ)



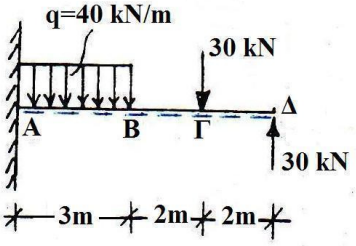
(δ)



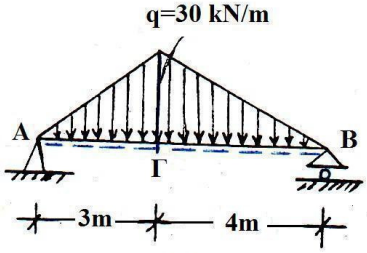
(ε)



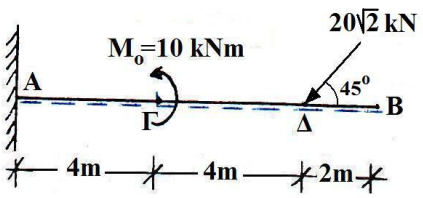
(στ)



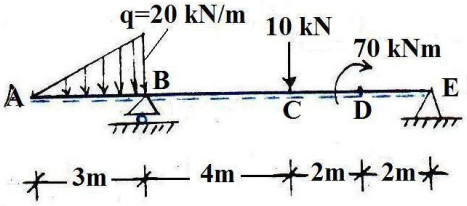
(ζ)



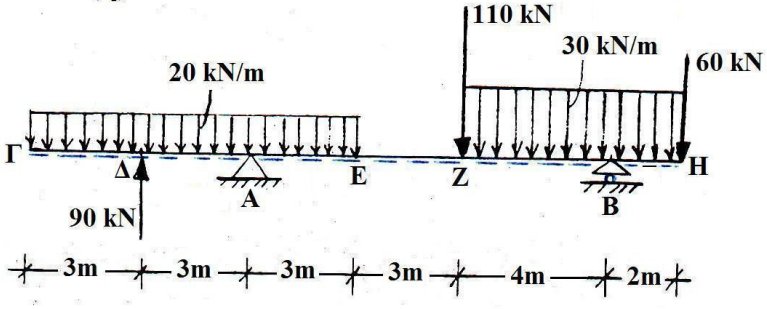
(η)



(θ)

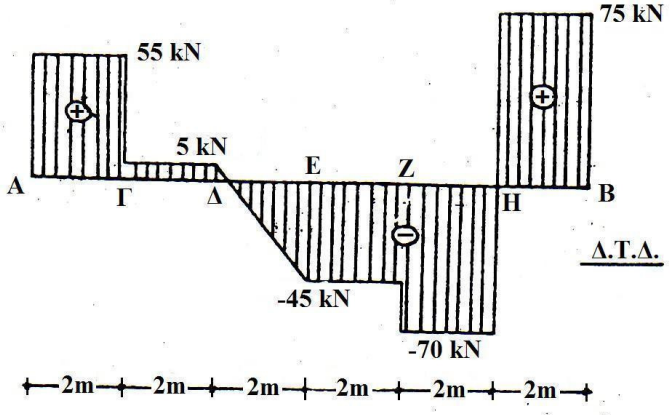


(ι)

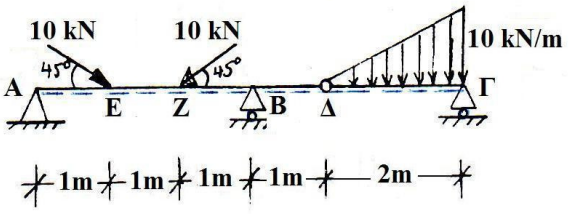


(κ)

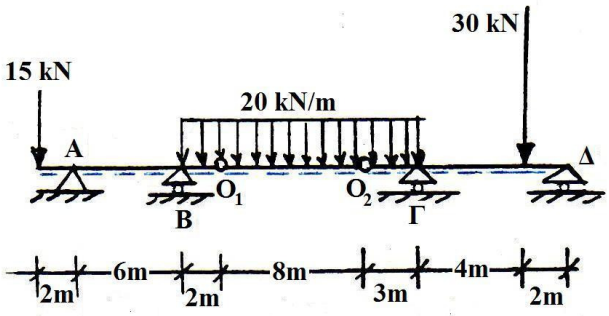
2. Δίνεται το διάγραμμα τεμνουσών δυνάμεων (Δ.Τ.Δ.) ευθύγραμμης δοκού ΑΒ. Ζητείται το διάγραμμα ροπών κάμψεως (Δ.Ρ.Κ.).



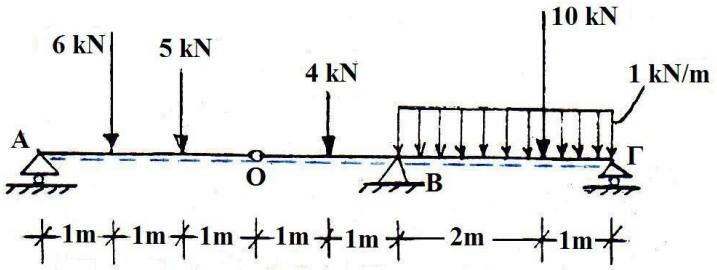
3. Στους παρακάτω αρθρωτούς φορείς (δοκοί Gerber) να γίνουν τα διαγράμματα αξονικών δυνάμεων (Δ.Α.Δ.), τεμνουσών δυνάμεων (Δ.Τ.Δ.) και ροπών κάμψεως (Δ.Ρ.Κ.).



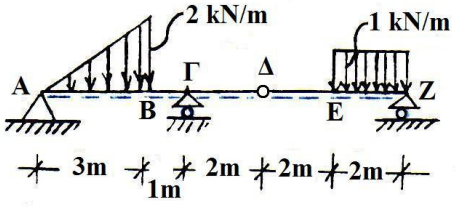
(α)



(β)



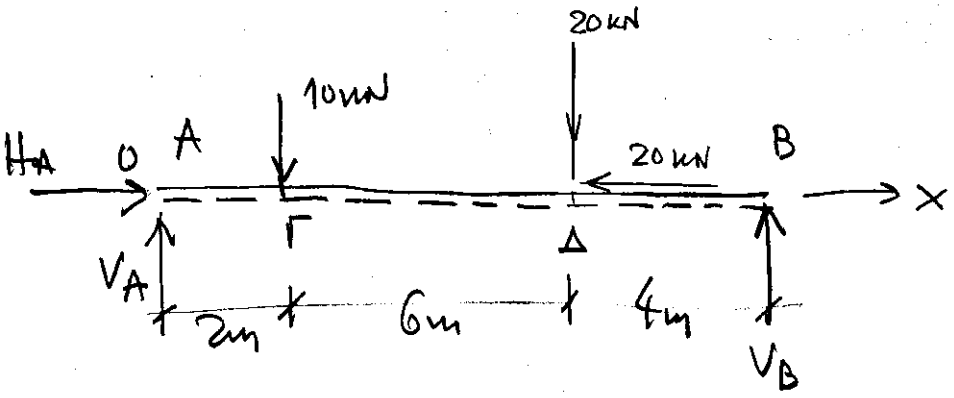
(γ)



(δ)

ΛΥΣΕΙΣ

1ο Θέμα (α)



Υπολογισμός Αντιδράσεων
Εξισ. Στατ. Ισορρ.

$\xrightarrow{+}$ $\Sigma X_i = 0$ ή $H_A - 20 = 0 \Rightarrow \boxed{H_A = 20\ kN}$

$+\uparrow$ $\Sigma Y_i = 0$ ή $V_A - 10 - 20 + V_B = 0$ (1)

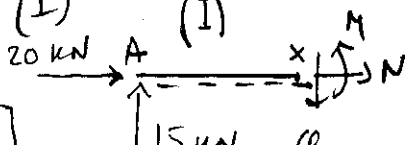
$\circlearrowleft +$ $\Sigma (M_i)_A = 0$ ή $-2 \cdot 10 - 8 \cdot 20 + 12 V_B = 0 \Rightarrow \boxed{V_B = 15\ kN}$

(1) $\Rightarrow \boxed{V_A = 15\ kN}$

Διαγράμματα: Με ένωση των αλγεβρικών τιμών των $N(x)$, $Q(x)$, $M(x)$ στ' "α' τρόπο" και στ' "β' τρόπο"

1η επιλογή - αριστερό (I)

ΑΓ $0<x<2$



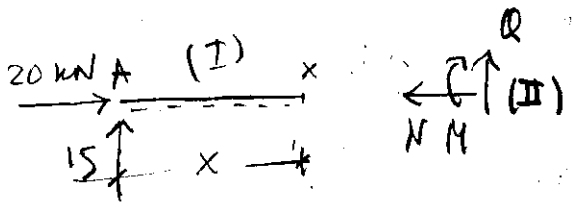
α τρόπος Με στατ. εξισ. ισορρ.

$\Sigma X_i = 0$ η $20+N=0 \rightarrow \boxed{N=-20}$

$\Sigma Y_i = 0$ η $-15+Q=0 \Rightarrow \boxed{Q=15}$

$\Sigma (M_i)_x = 0$ η $-x15+M=0 \Rightarrow \boxed{M=15x}$

β τρόπος Με ανιχνευτή στο Χ



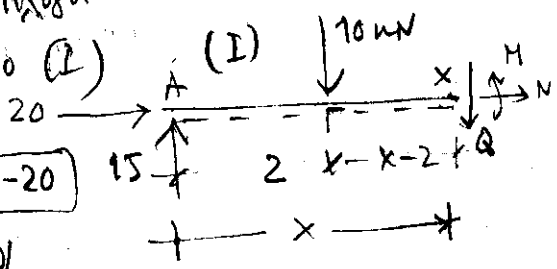
$N=-20$ [kN]

$Q=15$ [kN]

$M=15-x$ [kNm]

1η επιλογή αριστερό (I)

ΓΔ $2<x<8$



α τρόπος Με στατ. εξισ. ισορρ.

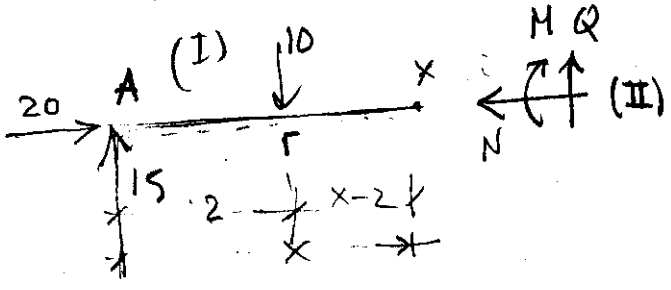
$\Sigma X_i = 0$ η $20+N=0 \rightarrow \boxed{N=-20}$

$\Sigma Y_i = 0$ η $-15+10+Q=0$

$\boxed{Q=5 \text{ kN}}$

$\Sigma (M_i)_x = 0$ η $-x15+(x-2)10+M=0 \Rightarrow \boxed{M=5x+20}$

β τρόπος Με ανιχνευτή στο Χ



$\boxed{N=-20 \text{ kN}}$

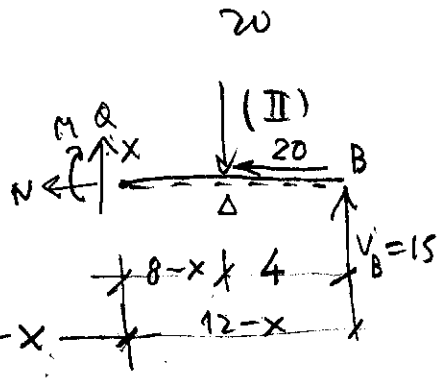
$\boxed{Q=15-10=5 \text{ kN}}$

$\boxed{M=15x-(x-2)10=5x+20}$

Επανάληψη του ΓΔ στη 2η επιλογή →

2η επιλογή - δεύτερο (ΙΙ)

ΓΔ $2 < x < 8$



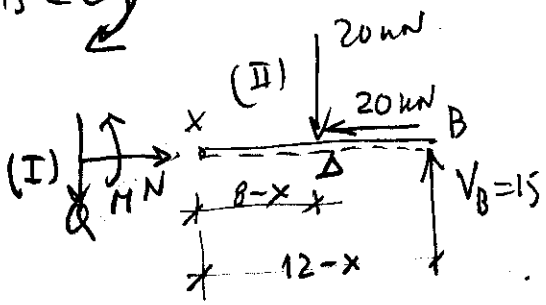
αριστερός

Με ισορ. $\Sigma X_i = 0$ ή $N + 20 = 0 \Rightarrow$ **N = −20 kN**

Εκτ. ισορρ. $\Sigma Y_i = 0$ ή $Q - 20 + 15 = 0 \Rightarrow$ **Q = 5 kN**

$\Sigma (M_i)_x = 0$ ή $M + (8-x)\,20 - (12-x)\,15 = 0$

M = 5x + 20



δεξιός

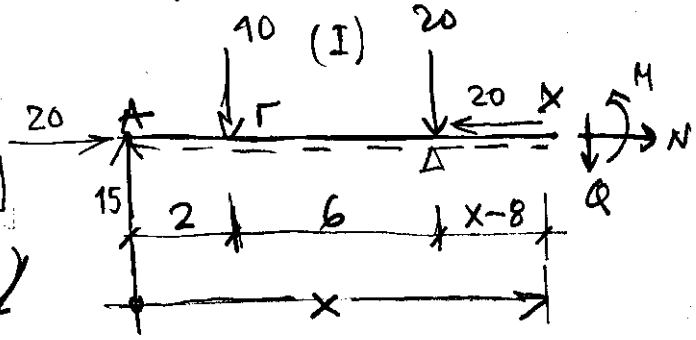
Με αναχώρηση στο x

N = −20 kN

Q = 20 − 15 = 5 kN

M = −(8−x) 20 + (12−x) 15 = 5x + 20

ΔΒ . $8 < x < 12$ 1η επιλογή - αριστερό (Ι)



α τρόπος

Με στην ισορ.

$\Sigma X_i = 0 \Rightarrow 20 - 20 + N = 0 \Rightarrow \boxed{N = 0}$

$\Sigma Y_i = 0 \Rightarrow -15 + 10 + 20 + Q = 0$

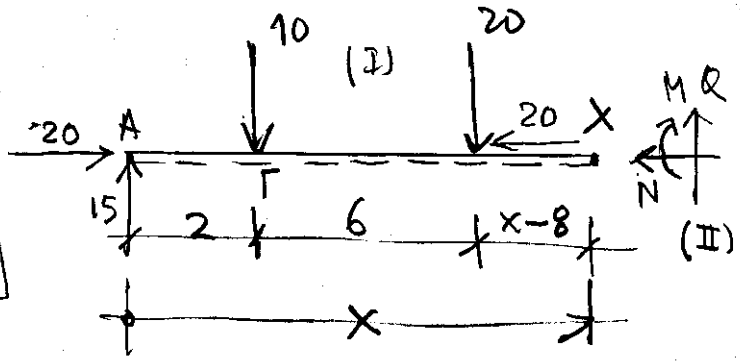
$\boxed{Q = -15\ kN}$

$\Sigma(M_i)_x = 0 \Rightarrow -x15 + (x-2)10 + (x-8)20 + M = 0$

$\Rightarrow \boxed{M = -15x + 180}$

β τρόπος

Με διαγωγή στο x



$\boxed{N = -20 + 20 = 0}$

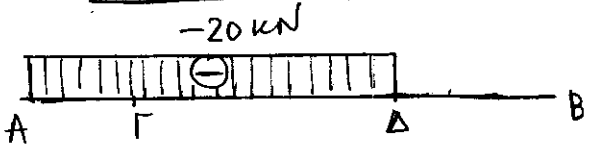
$\boxed{Q = 15 - 10 - 20 = -15\ kN}$

$\boxed{M = 15x - (x-2)10 - (x-8)20 =}$

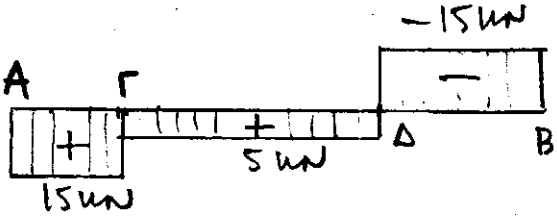
$\boxed{= -15x + 180\ kNm}$

Διαγράμματα

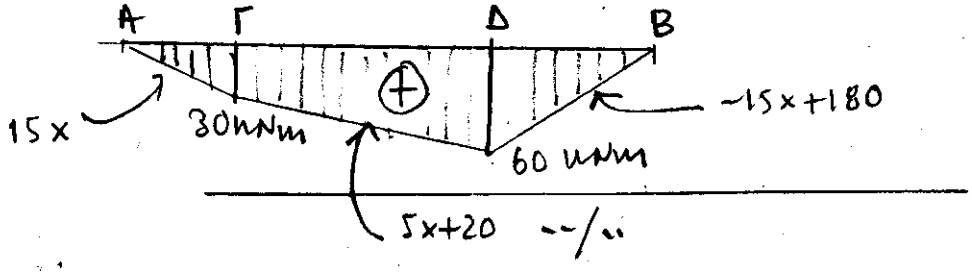
(N)



(Q)

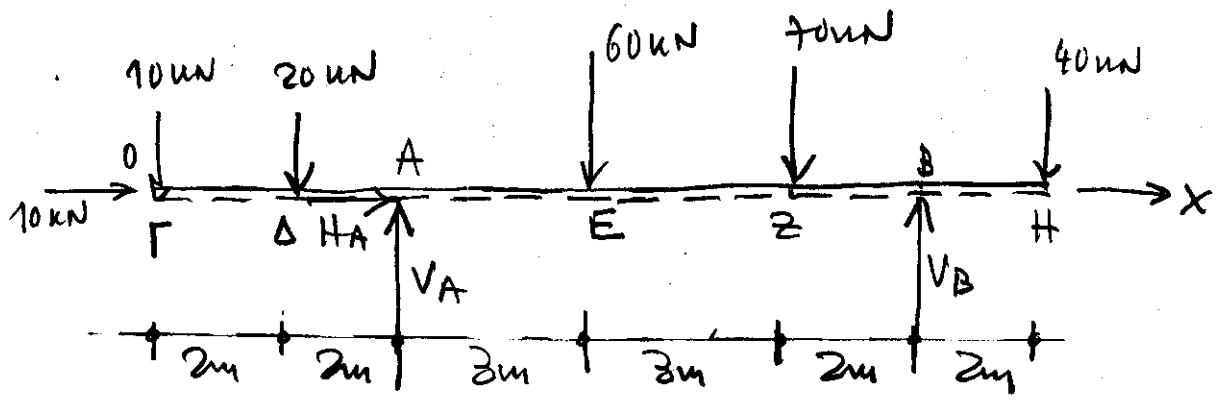


(M)



--/..

1ο Άσκηση (b)



Υπαρξη Λυσης — Εξισ στην Ισορρ

$\xrightarrow{+} \Sigma X_i = 0$ ή $10 + H_A = 0 \Rightarrow \boxed{H_A = -10\,kN}$

$+\uparrow \Sigma Y_i = 0$ ή $-10-20+V_A-60-70+V_B-40=0$

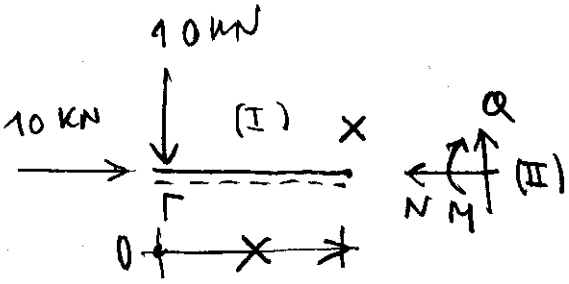
$V_A + V_B = 200\,kN$ (1)

$\curvearrowleft + \Sigma(M_i)_A = 0$ ή $4\cdot10 + 2\cdot20 - 3\cdot60 - 6\cdot70 + 8V_B - 10\cdot40 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{V_B = 115\,kN}$, (1) $\rightarrow \boxed{V_A = 85\,kN}$

Διαγράμματα: Με βάση των αλγεβρικών εσωτερικών $N(x), Q(x), M(x)$ με αναφορά στο x (b'τρόπος).

ΓΔ $0 < x < 2$ — 1η επιφάνεια – αριστερό (I)

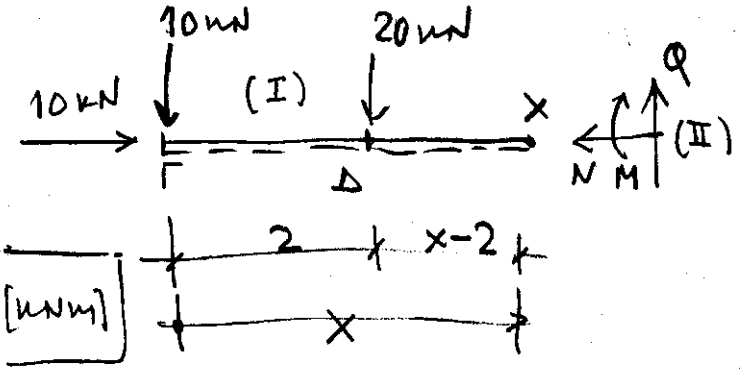


$N = -10\,[kN]$
$Q = -10\,[kN]$
$M = -X\cdot10$

../..

ΔΑ $2 < x < 4$

1ο ευθύγ. – αριστερό (I)



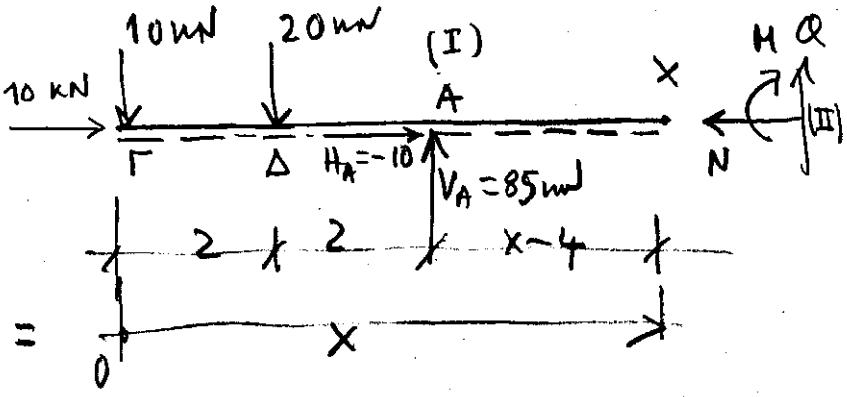
$$N = -10 \text{ [kN]}$$

$$Q = -10 - 20 = -30 \text{ [kN]}$$

$$M = -x10 - (x-2)20 = 40 - 30x \text{ [kNm]}$$

ΑΕ $4 < x < 7$

1ο ευθύγ. – αριστερό (I)



$$N = -10 - (-10) = 0$$

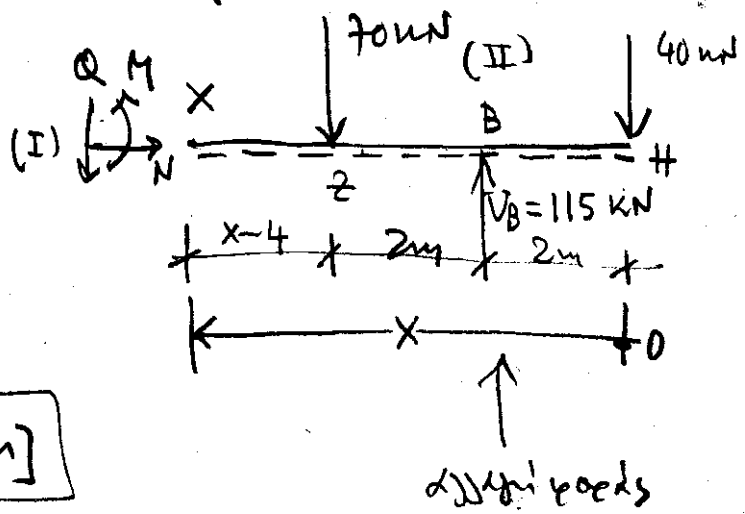
$$Q = -10 - 20 + 85 = 55 \text{ kN}$$

$$M = -x \cdot 10 - (x-2) \cdot 20 + (x-4)85 =$$

$$= -300 + 55x \text{ [kNm]}$$

ΕΖ $7 > x > 4$

2ο ευθύγ. – δεξιό (II)



$$N = 0$$

$$Q = 70 - 115 + 40 = -5 \text{ kN}$$

$$M = -(x-4)70 + (x-2)115 - x40 =$$

$$= 50 + 5x \text{ [kNm]}$$

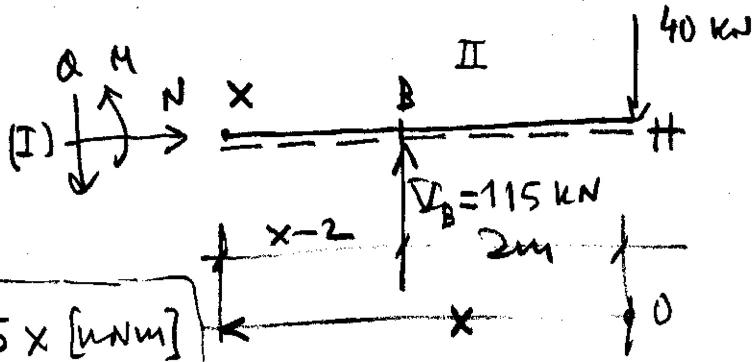
αλλαγή φορέα

ZB $4 > x > 2$ — 2η επιλογή - δεξιό (ΙΙ)

$N = 0$

$Q = -115 + 40 = -75$ kN

$M = (x-2)115 - x\,40 = -230 + 75x$ [kNm]

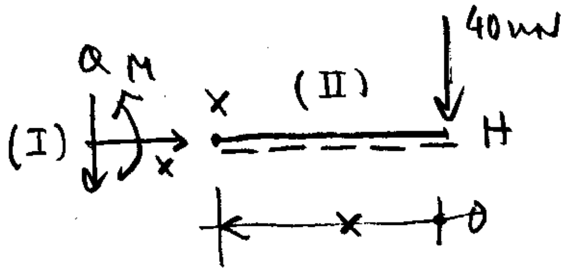


BH $2 > x > 0$ — 2η επιλογή - δεξιό (ΙΙ)

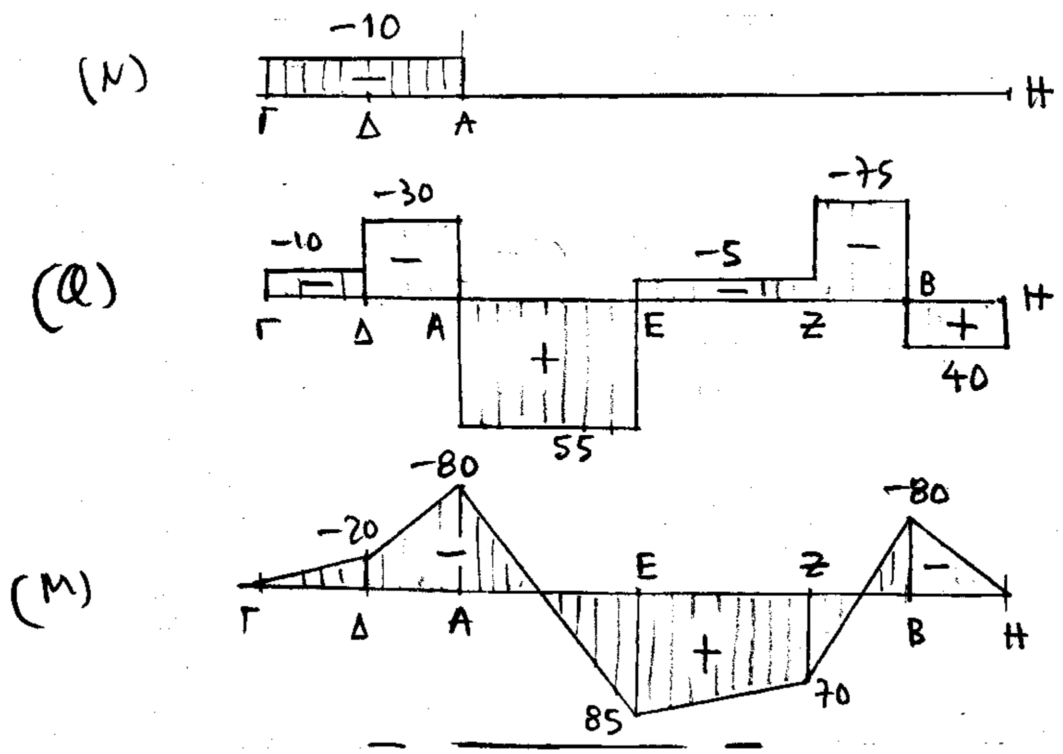
$N = 0$

$Q = 40$ kN

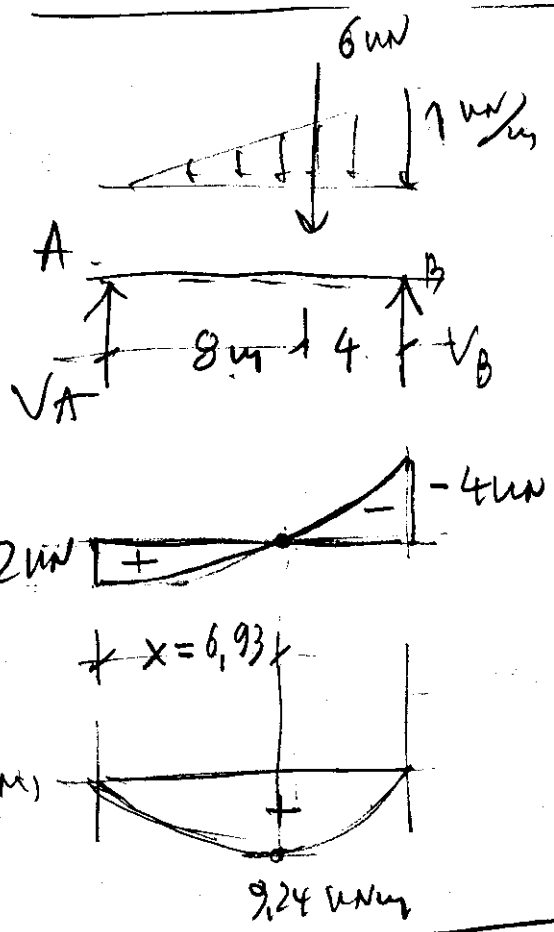
$M = -x \cdot 40$



Διαγράμματα



ΟΜΑΔΑ ΣΤ' Άσκηση 1(γ)



$V_A = 2$ kN

$V_B = 4$ kN

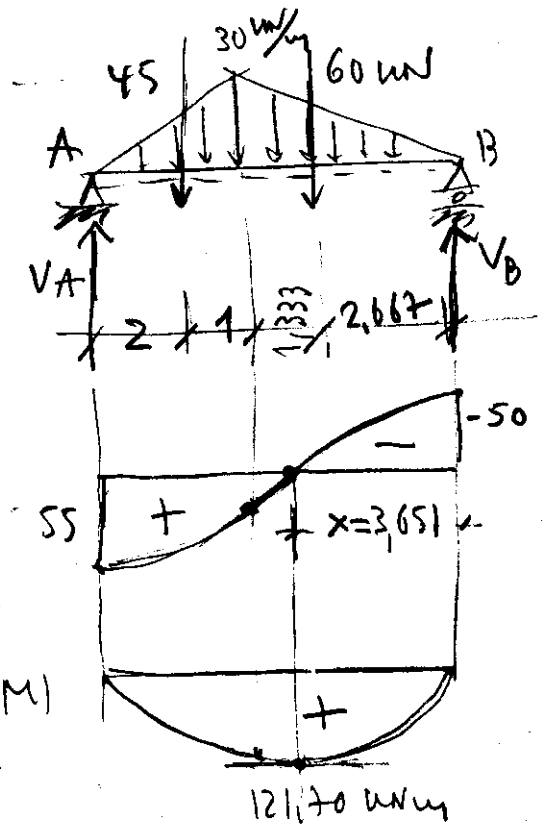
εφ Θ(q) $\searrow$ V_A

$\frac{1}{2} \frac{x}{12} x = 2 \Rightarrow x = 6,93$ m

$\varepsilon\varphi\Theta(Q) = \frac{2}{3} 2 \cdot 6,93 = 9,24$ kNm

---

Άσκηση 1(η)



$V_A + V_B = 45 + 60 = 105$ kN

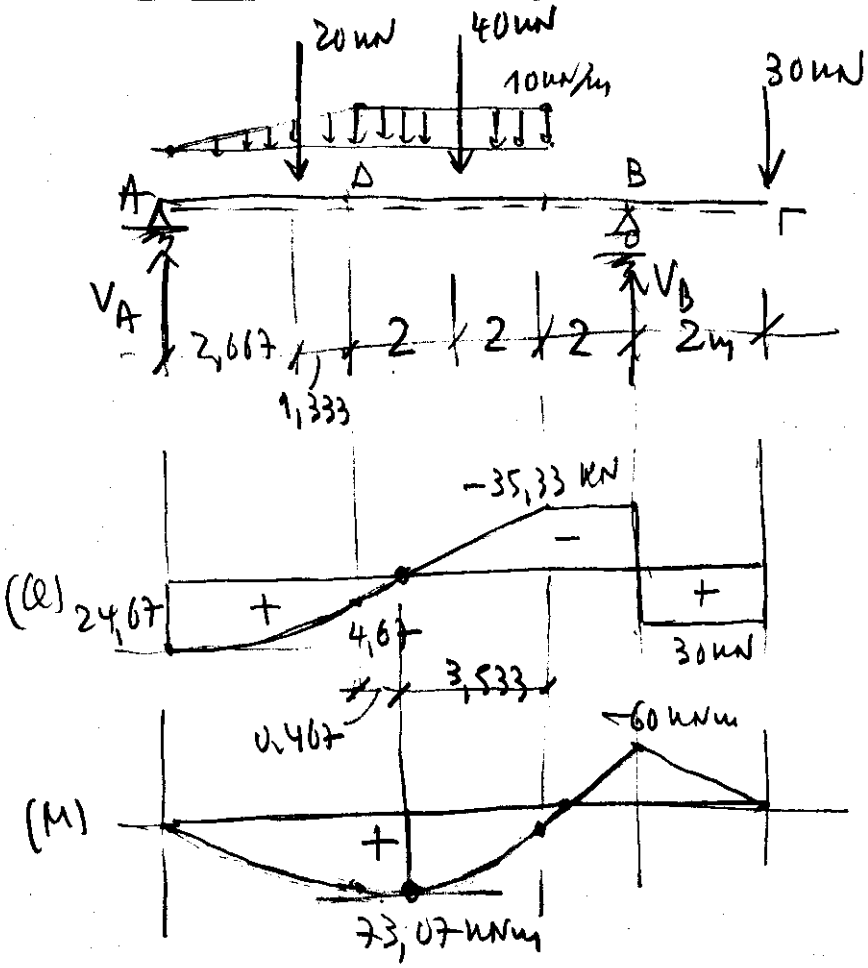
$\zeta + \Sigma(M_i)_A = 0 \curvearrowleft \; -2 \cdot 45 - 4,333 \cdot 60 + 7 V_B = 0$

$\Rightarrow \boxed{V_B = 50 \text{ kN}} \Rightarrow \boxed{V_A = 55 \text{ kN}}$

$\varepsilon\varphi\Theta(q) = \frac{1}{2} \times \frac{30}{4} x = 50 \Rightarrow x = 3,651$ m

$\varepsilon\varphi\Theta(Q) = \frac{2}{3} 3,651 \cdot 50 = 121,7$ kNm

ΟΜΑΔΑ Σ2' Άσκηση 1(δ)



$V_A + V_B = 20+40+30 = 90$ kN

$\curvearrowleft + \Sigma(M_i)_A = 0$ ή $-2,667 \cdot 20 - 6 \cdot 40 - 12 \cdot 30 + 10 \cdot V_B = 0$

$\rightarrow \boxed{V_B = \frac{653,34}{10} = 65,33 \text{ kN}}$

$\boxed{V_A = 90 - 65,33 = 24,67 \text{ kN}}$

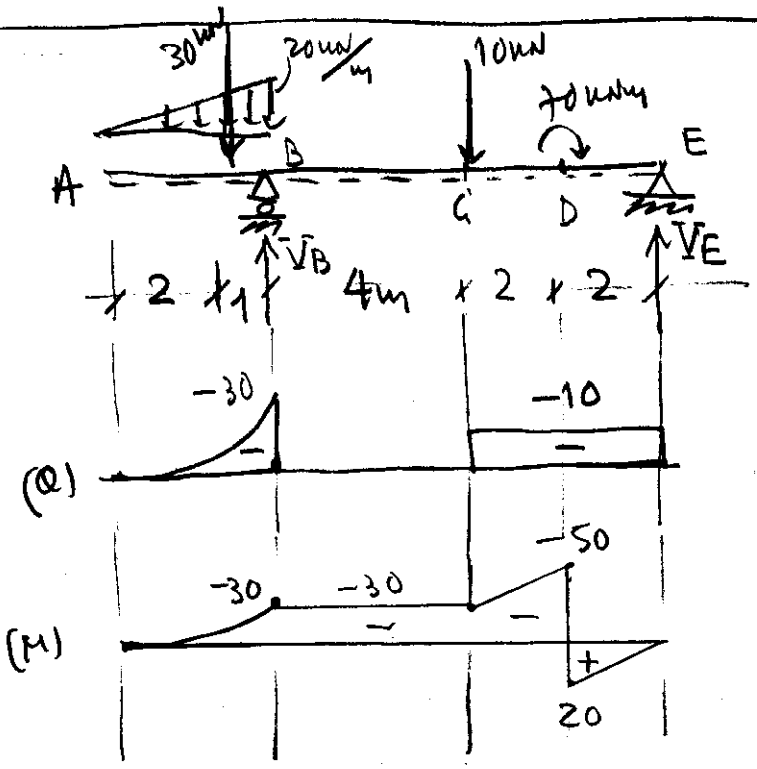
Κατά δεξιά

$M_{max} = -2 \cdot 30 + 2 \cdot 35,33 + \frac{1}{2} 3,533 \cdot 35,33 = 73,07$ kNm

Κατά αριστερά

$M_{max} = \frac{2}{3} 4 \cdot 20 + 4,67 \cdot 4 + \frac{1}{2} 4,67 \cdot 0,467 = 73,10$ kNm

---



Άσκηση 1(γ)

$V_B + V_E = 30+10 = 40$ kN $\rightarrow \boxed{V_B = 30 \text{ kN}}$

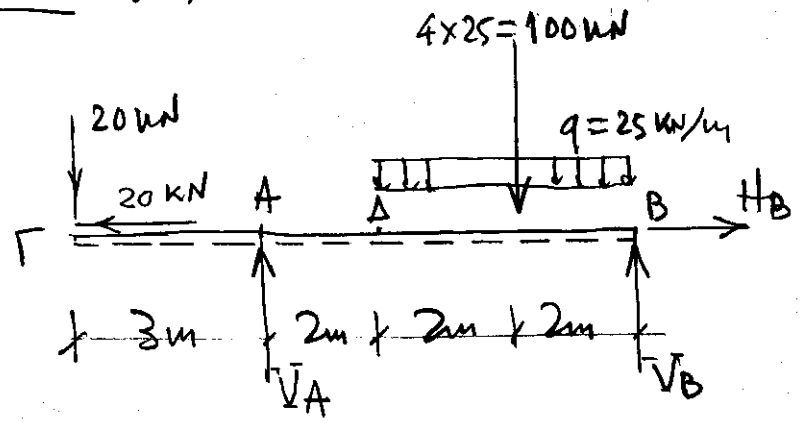
$\curvearrowleft + \Sigma(M_i)_B = 0$ ή $1 \cdot 30 - 4 \cdot 10 - 70 + 8 \cdot V_E = 0 \rightarrow \boxed{V_E = \frac{80}{8} = 10 \text{ kN}}$

$M_B = -1 \cdot 30 = -30$ kNm

$M_\Gamma = -5 \cdot 30 + 4 \cdot 30 = -30$ kNm

$M_{D\delta} = 2 \cdot 10 = 20$ kNm

1η Άσκηση (ε)



Υπολ. αντιδρ. – Εξ. στατ. ισορρ.

$\xrightarrow{+}$ $\Sigma X_i = 0$ ή $-20 + H_B = 0 \Rightarrow \boxed{H_B = 20\ kN}$

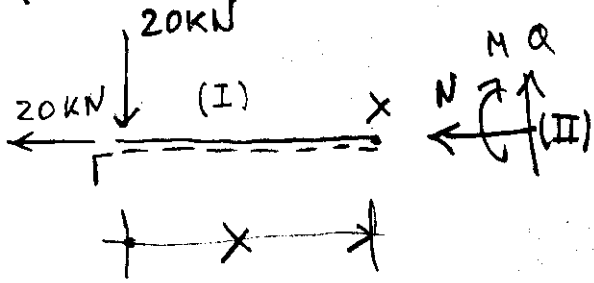
$+\uparrow$ $\Sigma Y_i = 0$ ή $-20 + V_A - 100 + V_B = 0 \Rightarrow V_A + V_B = 120\ kN$ (1)

$\circlearrowleft +$ $\Sigma (M_i)_B = 0$ ή $9 \cdot 20 - 6 \cdot V_A + 2 \cdot 100 = 0 \Rightarrow \boxed{V_A = 63{,}33\ kN}$

(1) $\Rightarrow \boxed{V_B = 56{,}67\ kN}$

Διαγράμματα: Με χρήση των αλγεβρικών τιμών $N(x), Q(x), M(x)$ ως συνάρτηση του x (δ' τρόπος)

ΓΑ $0 < x < 3$ – 1η επιλογή – αριστερό (I)



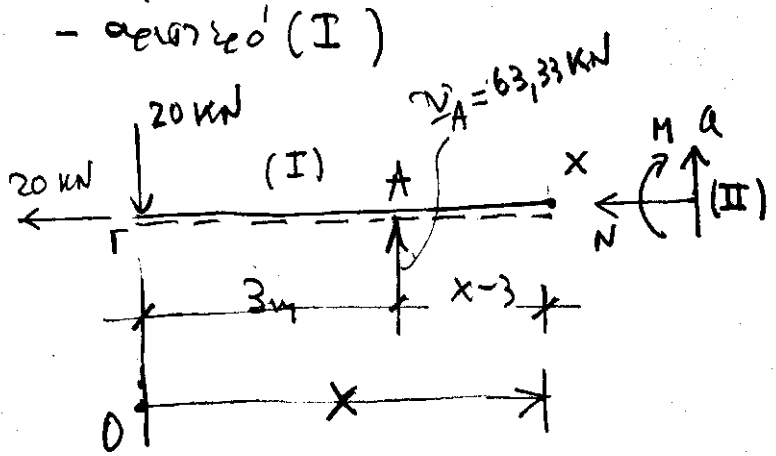
$\boxed{N = 20\ kN}$

$\boxed{Q = -20\ kN}$

$\boxed{M = -x\,20\ [kNm]}$

ΑΔ $3 < x < 5$

1η επιλογή – αριστερό (Ι)



$N = 20$ [kN]

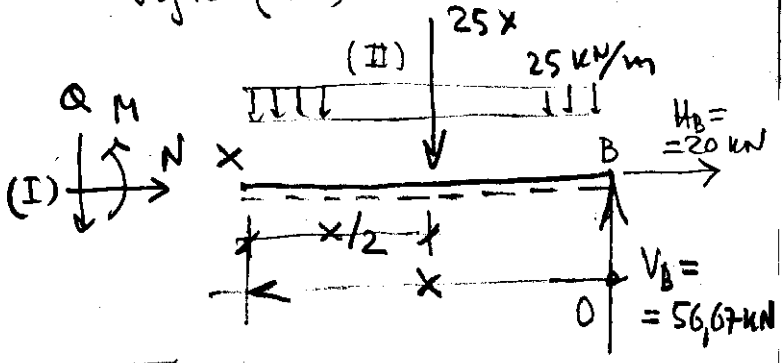
$Q = -20 + 63,33 = 43,33$ kN

$M = -x\,20 + (x-3)\,63,33 =$

$= 43,33x - 190$

ΔΒ $0 < x < 4$

2η επιλογή – δεξιό (ΙΙ)



$N = 20$ [kN]

$Q = 25x - 56,67$ (2)

$M = -\frac{x}{2}\,25x + x\,56,67 = -12,5x^2 + 56,67x$ (3)

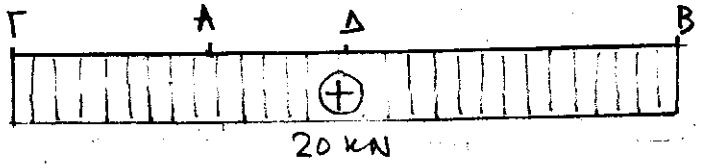
- όταν $Q = 0$ από $\frac{dM}{dx} = Q = 0 \Rightarrow$ M : τοπικό ακρότατο

από (2) $Q = 0 \Rightarrow x = \frac{56,67}{25} = 2,267$ m

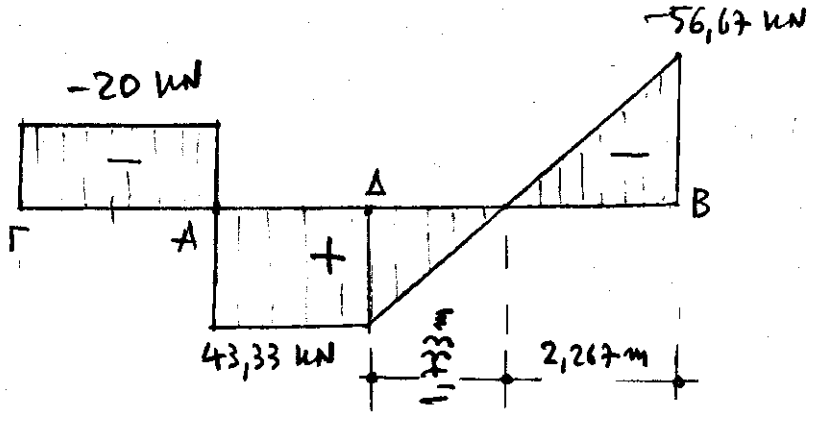
κριτ. → (3) $\Rightarrow M(2,267) = M_{max} = 64,23$ kNm .

Διαγράμματα

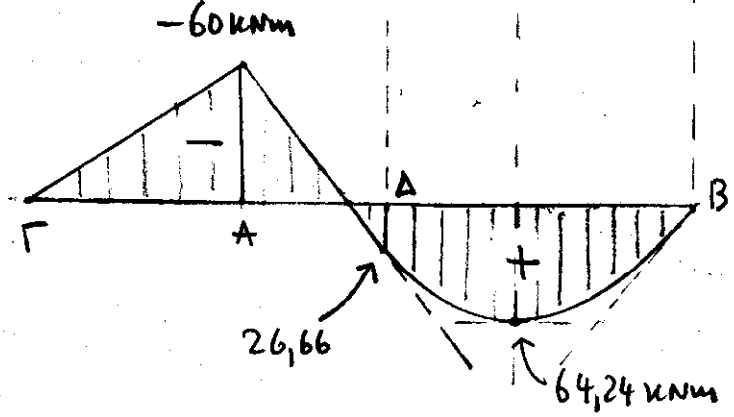
(N)



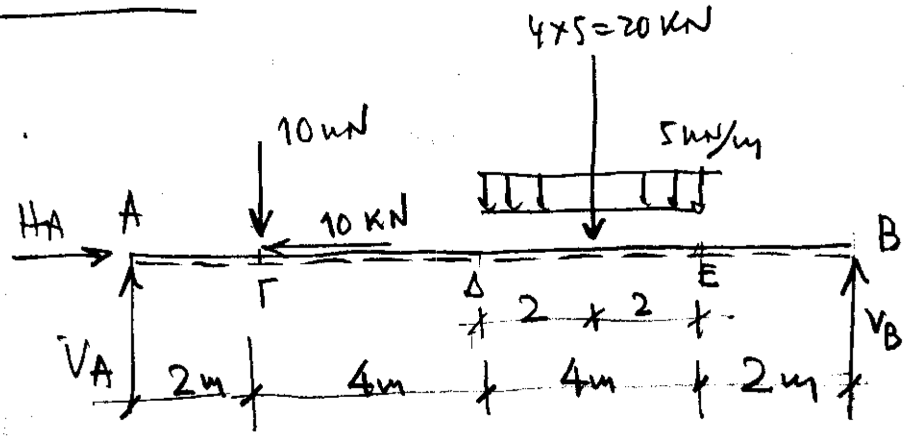
(Q)



(M)



1η Άσκηση (Σε)



Υπολ. Αντιδρ. – Εξ. Στατ. Ισορρ.

$\xrightarrow{+} \Sigma X_i = 0$ ή $H_A - 10 = 0 \Rightarrow$ $\boxed{H_A = 10\,kN}$

$+\uparrow \Sigma Y_i = 0$ ή $V_A - 10 - 20 + V_B = 0$ (1)

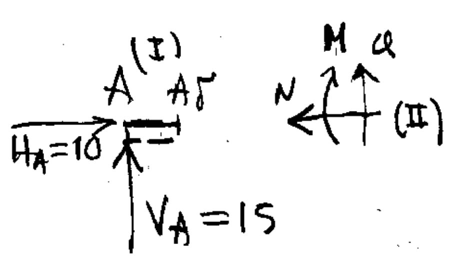
$\circlearrowleft + \Sigma (M_i)_A = 0$ ή $-2 \cdot 10 - 8 \cdot 20 + 12\, V_B = 0 \Rightarrow$ $\boxed{V_B = 15\,kN}$

(1) $\Rightarrow$ $\boxed{V_A = 15\,kN}$

Διευκρινήσεις: "Βρίσκουμε τιμές (N, Q, M) σε χαρακτηριστικά σημεία με τομή (ο τρόπος) και σχεδιάζουμε με κατάλληλη γραμμή"

Σημείο A:

1η επιλογή – αριστερό (I)



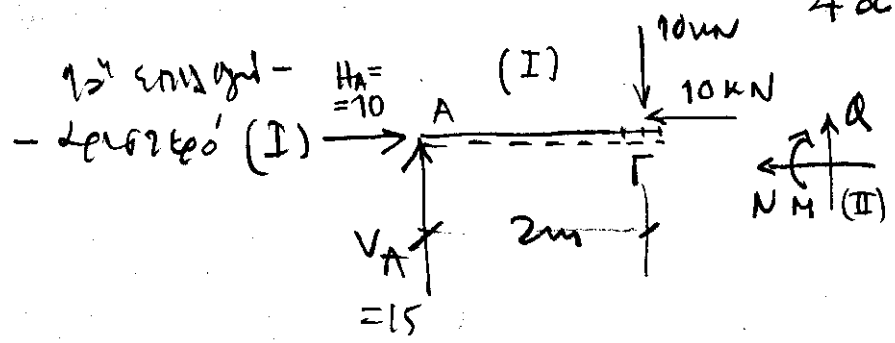
$N_{A\delta} = -10$ [kN]

$Q_{A\delta} = V_A = 15$ [kN]

$M_A = 0$

Σημείο Γ

1η ενώγμι – αριστερά (I)



$N_{Γαρ} = -10$ kN

$N_{Γδ} = -10 + 10 = 0$

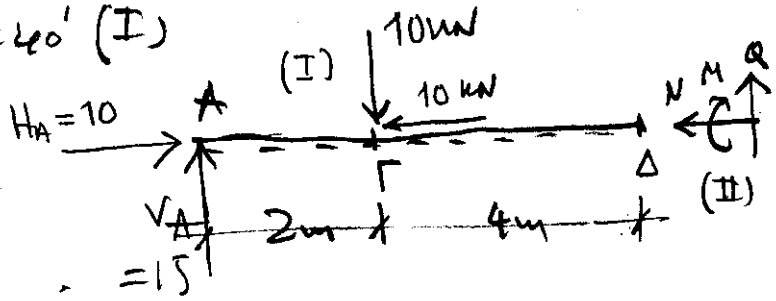
$Q_{Γαρ} = V_A = 15$ kN

$Q_{Γδ} = \overset{15}{V_A} - 10 = 5$ kN

$M_Γ = 2\overset{15}{V_A} = 30$ kNm

Σημείο Δ

1η ενώγμι – αριστερά (I)



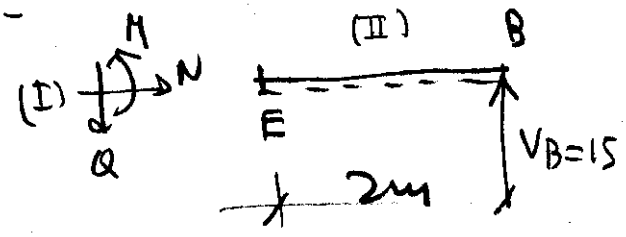
$N_Δ = -10 + 10 = 0$

$Q_Δ = \overset{15}{V_A} - 10 = 5$ kN

$M_Δ = 6\overset{15}{V_A} - 4 \cdot 10 = 50$ kNm

Σημείο Ε:

2η ενώγμι – δεξιά (II)



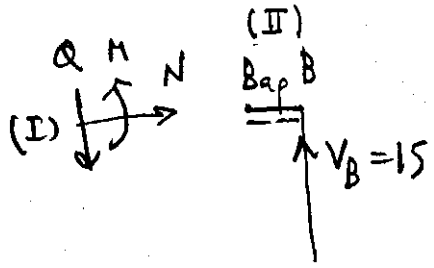
$N_E = 0$

$Q_E = -V_B = -15$ kN

$M_E = 2 \cdot 15 = 30$ kNm

Σημείο Β:

2η ενώγμι – δεξιά (II)



$N_{Bαρ} = 0$

$Q_{Bαρ} = -V_B = -15$ kN

$M_B = 0$

ΑΓ $q=0 \Rightarrow Q=\text{const} \longrightarrow$ M : γραμμ. πλαγιά

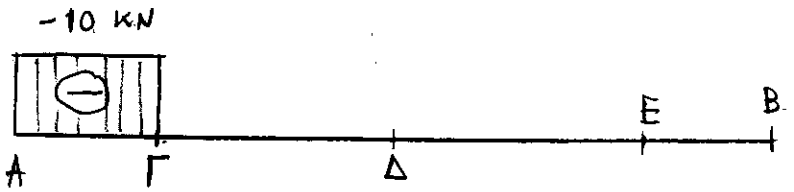
ΓΔ $q=0 \Rightarrow Q=\text{const} \Rightarrow$ M : γραμμ. πλαγιά

ΔΕ $q=\text{const} \Rightarrow$ Q : γραμμ. μεταβ. $\longrightarrow$ M = παραβολή

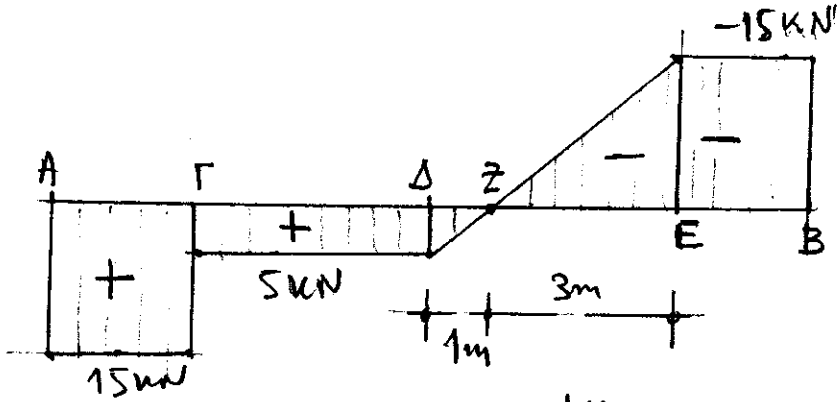
ΕΒ $q=0 \Rightarrow Q=\text{const} \longrightarrow$ M : γραμμ. πλαγιά

• Τοποθετούμε τις τιμές και σώνουμε

(N)

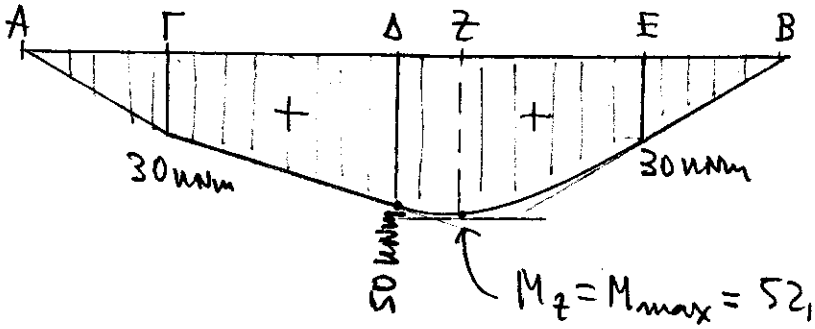


(Q)



Στο Ζ: $Q=0 \Rightarrow \frac{dM}{dx}=Q=0 \Rightarrow$ M : ακρότατο (M_{max})

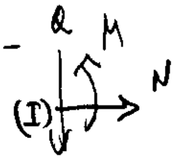
(M)

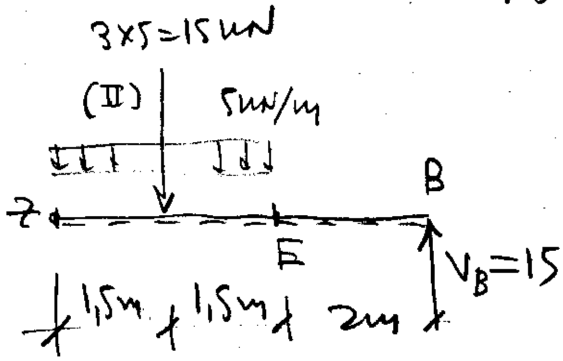


$M_Z = M_{max} = 52,5$ kNm

Υπολογισμός του M_Z

α' τρόπος — (με ανάγκη) — σε επιλογή - δεξιό (ΙΙ)



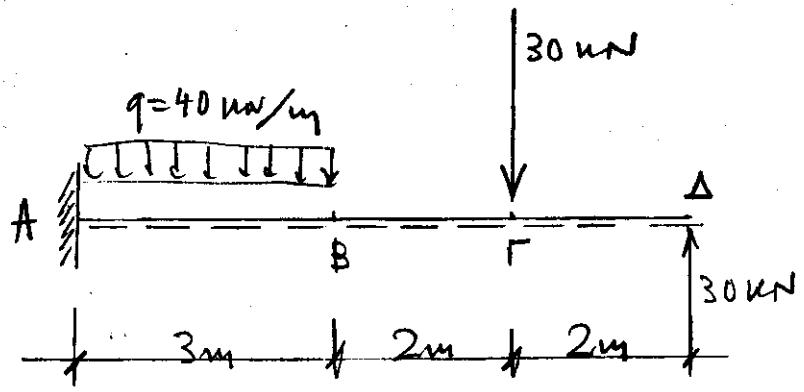


$$M_Z = -1{,}5\cdot 15 + 5\cdot \underset{15}{V_B} = 52{,}5 \text{ kNm}$$

β' τρόπος:

$$M_Z = M_\Delta + \underbrace{\int_\Delta^Z Q(x)\,dx}_{[\text{εμβ } Q]_\Delta^Z} = 50 + \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 1 = 52{,}5 \text{ kNm}$$

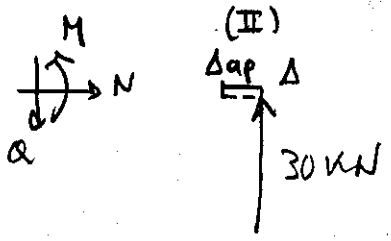
1ος Άξονας (3)



• Μπορούμε χωρίς υπολογισμό αντιδράσεων. Από δεξιά

• Διαγράμματα: είτε τα τριών (N,Q,M) σε χαμηλότερα σημεία οπότε θα αναζητήσουμε από δεξιά (II) (6 τρόπους)

Σημείο Δ — 2ος κανόνας – δεξιό (II)

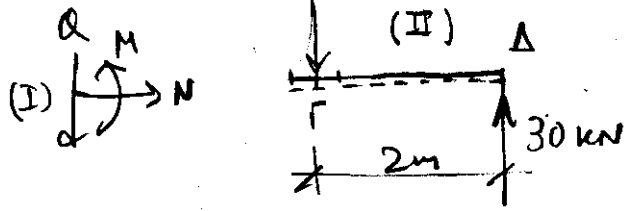


$N_{\Delta\alpha\rho} = 0$

$Q_{\Delta\alpha\rho} = -30\ kN$

$M_\Delta = 0$

Σημείο Γ — 2ος κανόνας – δεξιό (II)



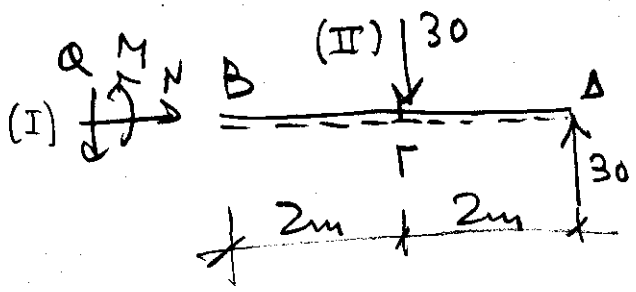
$N_\Gamma = 0$

$Q_{\Gamma\delta} = -30\ kN$

$Q_{\Gamma\alpha\rho} = +30 - 30 = 0$

$M_\Gamma = 2 \cdot 30 = 60\ kNm$

Σημείο Β — 2η επιλογή - δεξιό (II)



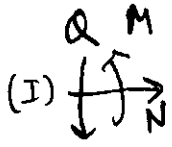
$N_B = 0$

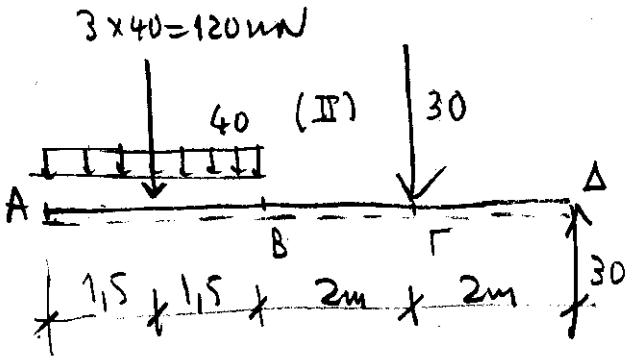
$Q_B = 30 - 30 = 0$

$M_B = -2 \cdot 30 + 4 \cdot 30 = 60$ kNm

Σημείο Α

2η επιλογή - δεξιό (II)





$N_A = 0$

$Q_A = 120 + 30 - 30 = 120$ kN

$M_A = -1{,}5 \cdot 120 - 5 \cdot 30 + 7 \cdot 30 = -120$ kNm

ΑΒ: $q = \text{const} \Rightarrow Q =$ γραμμ. διαφ. $\rightarrow M =$ παραβολή

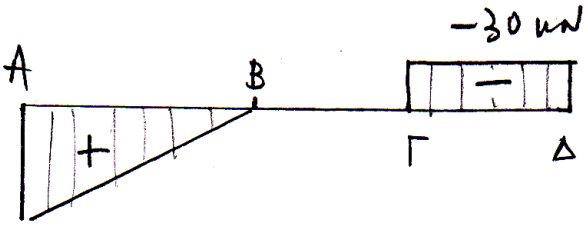
ΒΓ: $q = 0 \rightarrow Q = \text{const} \rightarrow M =$ γραμμ. διαφ.

ΓΔ: $q = 0 \rightarrow Q = \text{const} \rightarrow M =$ γραμμ. διαφ.

• Τοποθετούμε τις τιμές και σχεδιάζουμε.

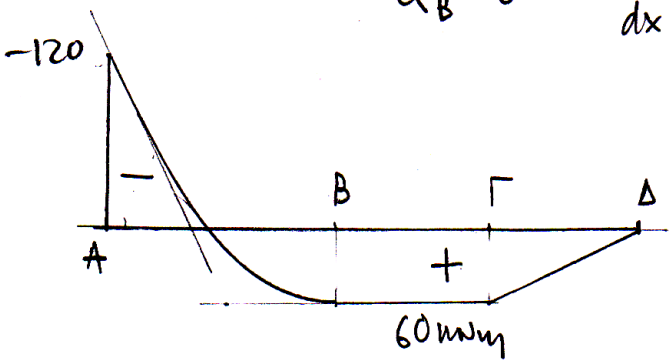
(N) $N = 0$

(Q)

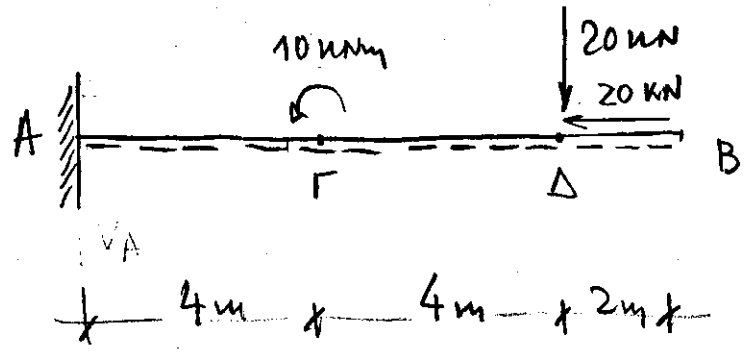


$Q_B = 0 \rightarrow \left.\frac{dM}{dx}\right|_B = Q_B = 0$ (οριζ. εφαπτ.)

(M)

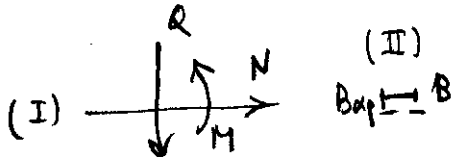


1η Άσκηση (θ)



- Μπορούμε χωρίς υπολογισμό αντιδράσεων από δεξιά.
- Διαγράμματα: Ενώ έχουν ήδη (N,Q,M) τα χαρακτηριστικά σημεία με αναφορά από δεξιά (II) (6 τρόπους)

Σημείο Β — 2η επιλογή – δεξιό (II)

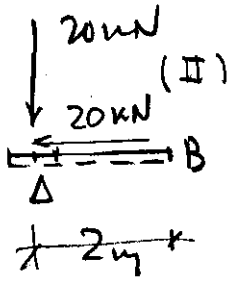


$N_{Bαρ}=0$

$Q_{Bαρ}=0$

$M_B=0$

Σημείο Δ — 2η επιλογή – δεξιό (II)



$N_{Δδ}=0$

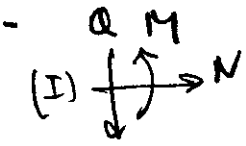
$N_{Δαρ}=-20[kN]$

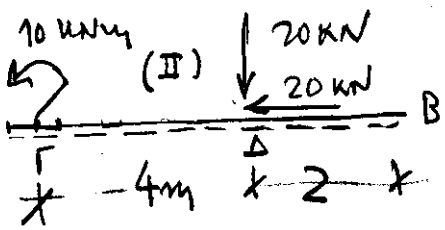
$Q_{Δδ}=0$

$Q_{Δαρ}=20$

$M_Δ=0$

Σημείο Γ — 2η επιλογή – δεξιό (II)





$N_Γ=-20[kN]$

$Q_Γ=20[kN]$

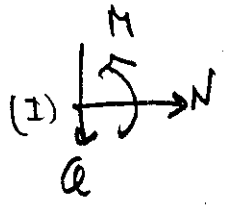
$M_{Γδ}=-4\cdot 20=-80\ kNm$

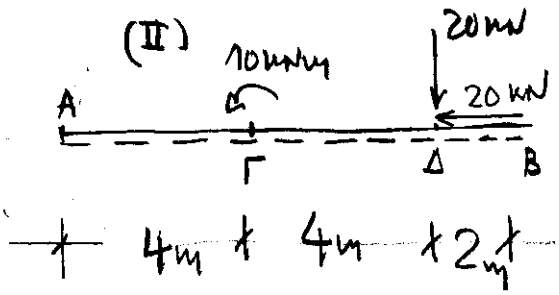
$M_{Γαρ}=10-4\cdot 20=-70\ kNm$

../..

Σημείο Α

2η επιλογή – δεξιά (II)





$N_A = -20$ [kN]

$Q_A = 20$ [kN]

$M_A = 10 - 8 \cdot 20 = -150$ kNm

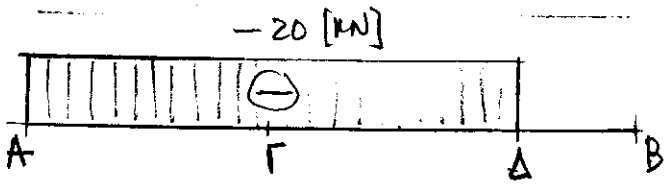
ΑΓ: $q = 0 \Rightarrow Q = \text{const.} \Rightarrow M$: γραμμ. αύξ.

ΓΔ: $q = 0 \Rightarrow Q = \text{const.} \Rightarrow M$: γραμμ. φθιν.

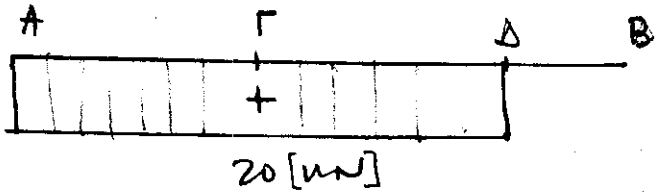
ΔΒ: $q = 0 \Rightarrow Q = \text{const.} \Rightarrow M$: γραμμ. φθιν.

• Τοποθετούμε τις τεταγμένες των σημείων.

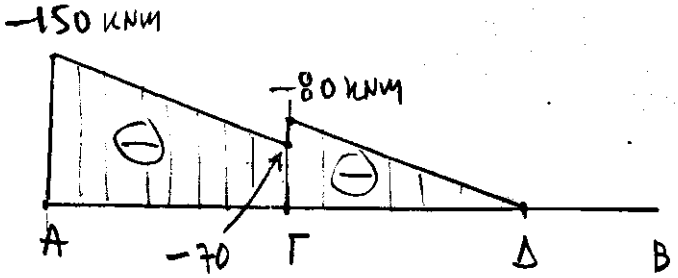
(N)



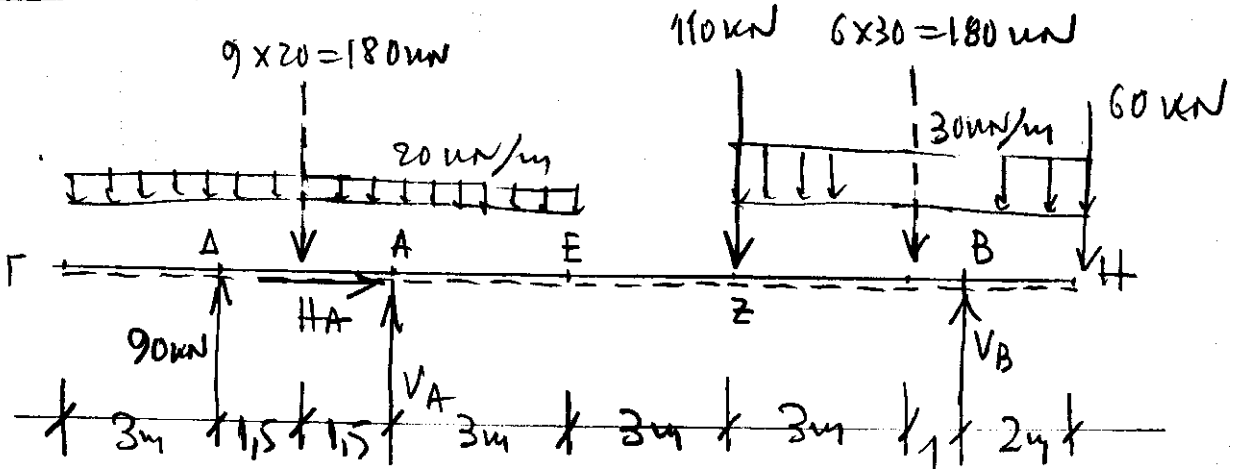
(Q)



(M)



1η Άσκηση: (κ)



Υπολ. Αντιδ. – Εξισ. Στατ. Ισορρ.

$\pm \Sigma X_i = 0$ ή $\boxed{H_A = 0}$

$+\uparrow \Sigma Y_i = 0$ ή $90 - 180 + V_A - 110 - 180 + V_B - 60 = 0 \Rightarrow V_A + V_B = 440$ (1)

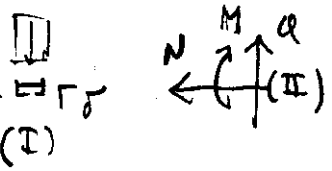
$\circlearrowleft + \Sigma (M_i)_A = 0$ ή $-3 \cdot 90 + 1{,}50 \cdot 180 - 6 \cdot 110 - 9 \cdot 180 + 10 \cdot V_B - 12 \cdot 60 = 0$

$\Rightarrow \boxed{V_B = 300 \text{ kN}}$, (1) $\Rightarrow \boxed{V_A = 140 \text{ kN}}$

Διαγραμματα N, Q, M: "Βρίσκουμε τις ΟΣ χαρακτηριστικά σημεία (κ ενδιάμεσ) και ενώνουμε με κατάλληλη μορφή"

Σημείο Γ

1η επιλογή – αριστερό (I)



$N_{\Gamma\delta} = 0$

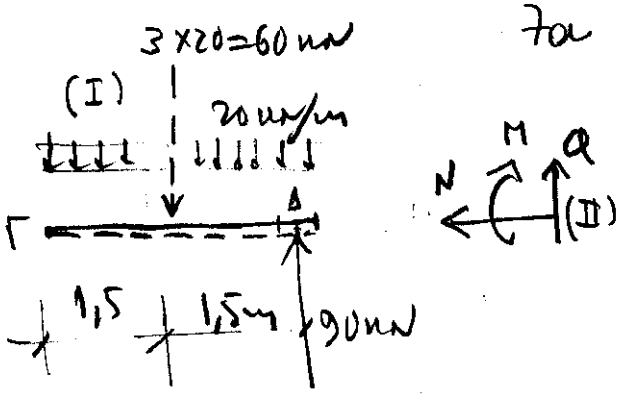
$Q_{\Gamma\delta} = 0$

$M_{\Gamma\delta} = 0$

--/..

Σημείο Δ

1η επιλογή – αριστερό (I)



$N_\Delta = 0$

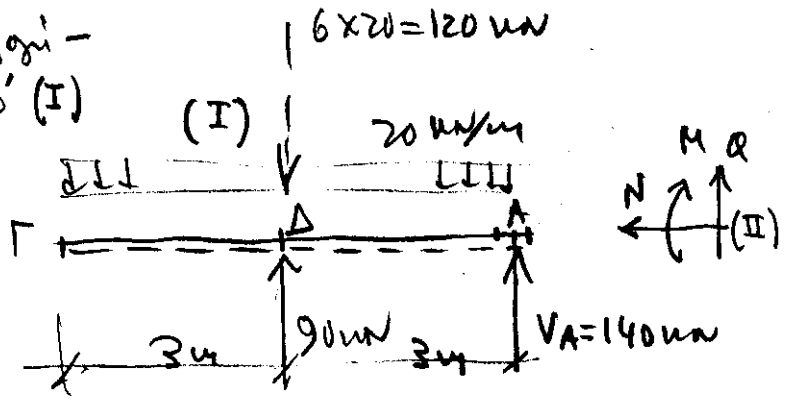
$Q_{\Delta αρ} = -60\ kN$

$Q_{\Delta γ} = -60+90 = 30\ kN$

$M_\Delta = -1,5 \cdot 60 = -90\ kNm$

Σημείο Α

1η επιλογή – αριστερό (I)



$N_A = 0$

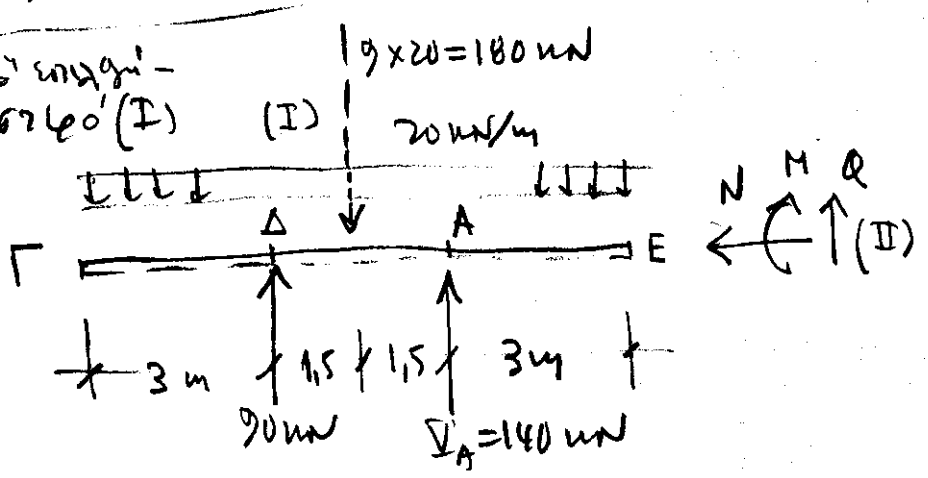
$Q_{A αρ} = 90-120 = -30\ kN$

$Q_{A γ} = 90-120+140 = 110\ kN$

$M_A = 3 \cdot 90 - 3 \cdot 120 = -90\ kNm$

Σημείο Ε

1η επιλογή – αριστερό (I)



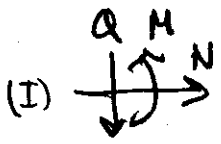
$N_E = 0$

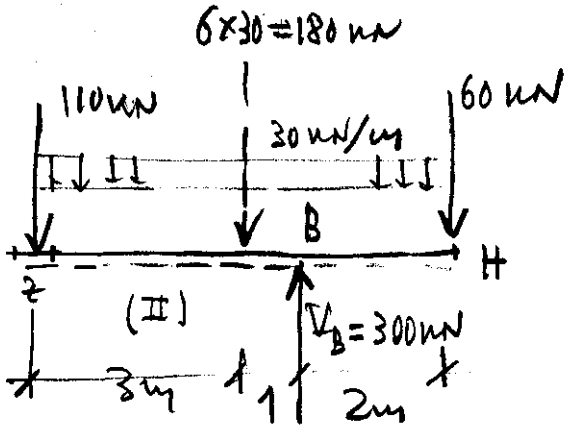
$Q_E = 90-180+140 = 50\ kN$

$M_E = 6 \cdot 90 - 4,50 \cdot 180 + 3 \cdot 140 = 150\ kNm$

Σημείο Ζ:

2η εναλλαγή – δεξιόστροφη (II)





$N_Z = 0$

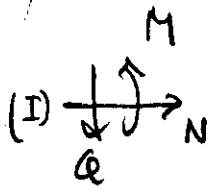
$Q_{Z\delta} = 60 - 300 + 180 = -60\ kN$

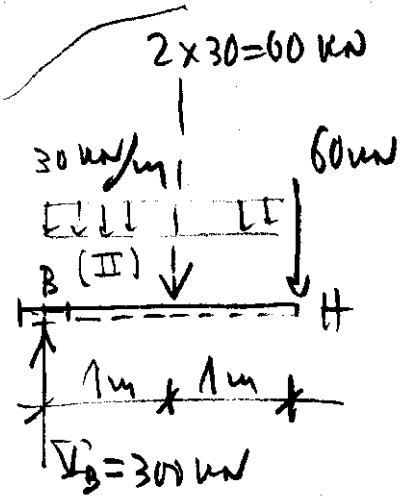
$Q_{Zαρ} = 60 - 300 + 180 + 110 = +50\ kN$

$M_Z = -6 \cdot 60 + 4 \cdot 300 - 3 \cdot 180 = 300\ kNm$

Σημείο Β:

2η εναλλαγή – δεξιόστροφη (II)





$N_B = 0$

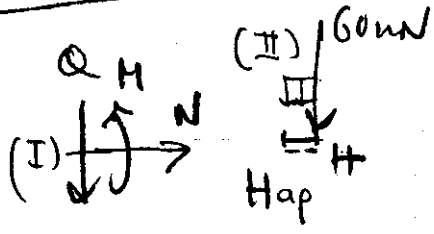
$Q_{B\delta} = 60 + 60 = 120\ kN$

$Q_{Bαρ} = 60 + 60 - 300 = -180\ kN$

$M_B = -2 \cdot 60 - 1 \cdot 60 = -180\ kNm$

Σημείο Η

2η εναλλαγή – δεξιόστροφη (II)



$N_H = 0$

$N_{Hαρ} = 60\ kN$

$M_H = 0$

ΓΔ, ΔΑ, ΑΕ: $q = const \Rightarrow Q$: γραμμ. μεταβ. $\Rightarrow M$: παραβολή

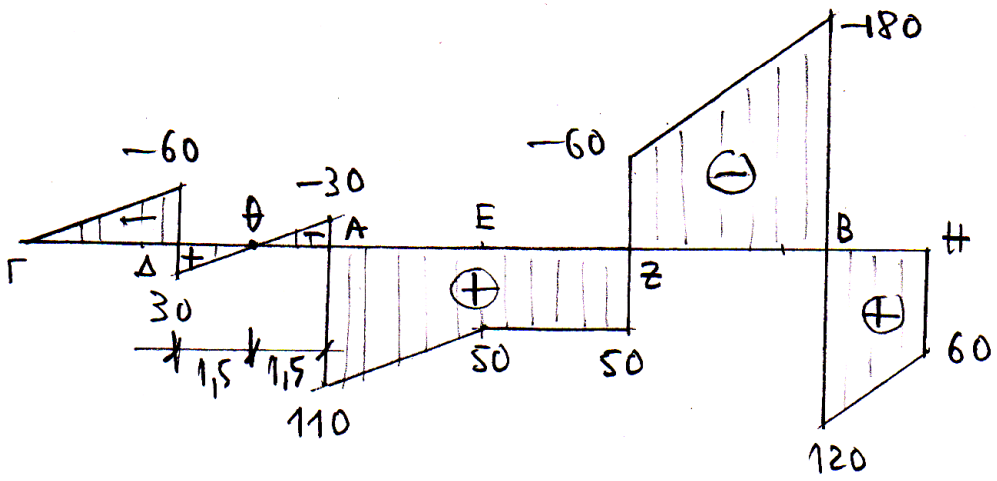
ΕΖ: $q = 0 \Rightarrow Q = const. \Rightarrow M$: γραμμ. μεταβολή

ΖΒ, ΒΗ: $q = const \Rightarrow Q$: γραμμ. μεταβ. $\Rightarrow M$: παραβολή

- Τοποθετούμε τις τιμές των μεγεθών:

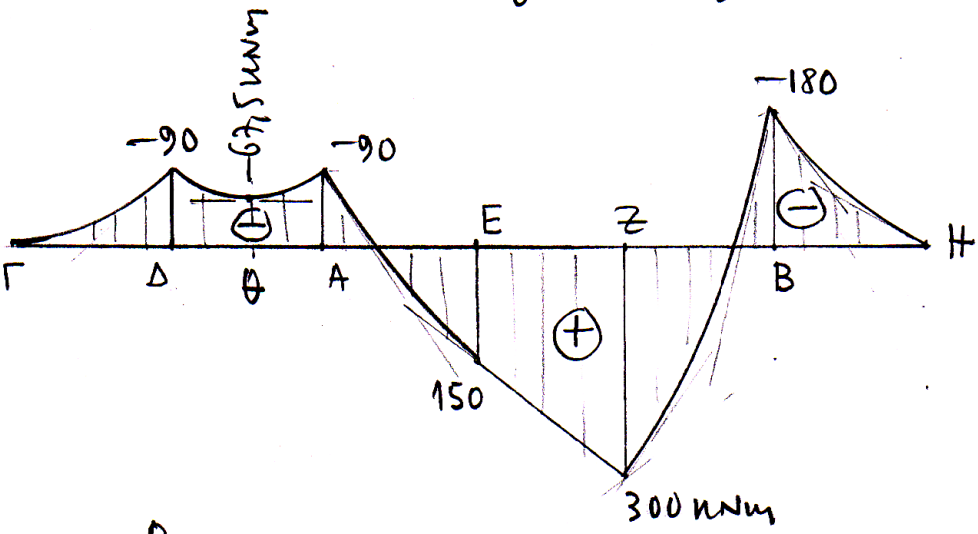
(N) $N = 0$

(Q)



$Q_\Theta = 0 \rightarrow M_\Theta$: ακρότατο $(M'_\Theta = Q_\Theta = 0)$

(M)

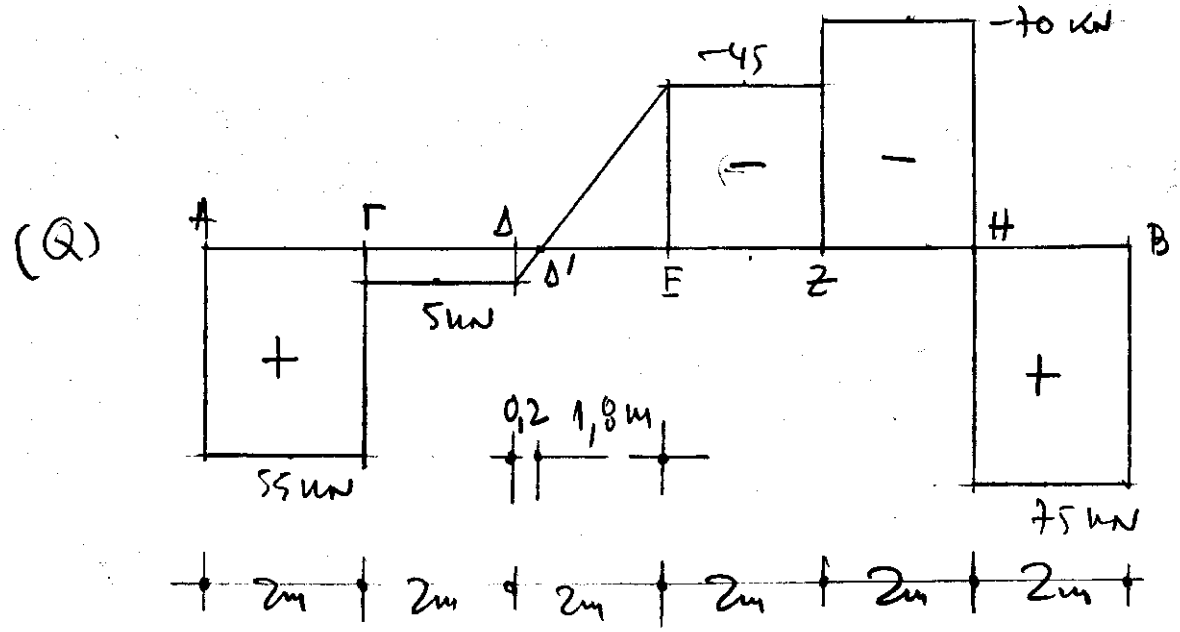


$$M_\Theta = M_\Delta + \underbrace{\int_\Delta^\Theta Q(x)dx}_{\text{επιφ}(Q)_\Delta^\Theta} = -90 + \frac{1}{2}\cdot 30 \cdot 1{,}5 = 62{,}5 \text{ kNm}$$

../..

2η Άσκηση

• Δίνεται ότι $M_A = 0$



Είναι ότι $M(x) = M(x_0) + \int_{\xi=x_0}^{x} Q(\xi)\,d\xi = M(x_0) + \text{εμβ}[Q]_{x_0}^{x}$

• Βαθμίζει μεταξύ M σε χαρακτηριστικά σημεία

Άρα $M_\Gamma = M_A + \text{εμβ}[Q]_A^\Gamma = 0 + 55 \cdot 2 = 110$ kNm

$M_\Delta = M_\Gamma + \text{εμβ}[Q]_\Gamma^\Delta = 110 + 5 \cdot 2 = 120$ kNm

$M_{\Delta'} = M_\Delta + \text{εμβ}[Q]_\Delta^{\Delta'} = 120 + \frac{1}{2}\, 0{,}2 \cdot 5 = 120{,}5$ kNm

$M_E = M_{\Delta'} + \text{εμβ}[Q]_{\Delta'}^{E} = 120{,}5 + \frac{1}{2}\, 1{,}8 \cdot (-45) = 80$ kNm

$M_Z = M_E + \text{εμβ}[Q]_E^Z = 80 + 2(-45) = -10$ kNm

$M_H = M_Z + \text{εμβ}[Q]_Z^H = -10 + 2(-70) = -150$ kNm

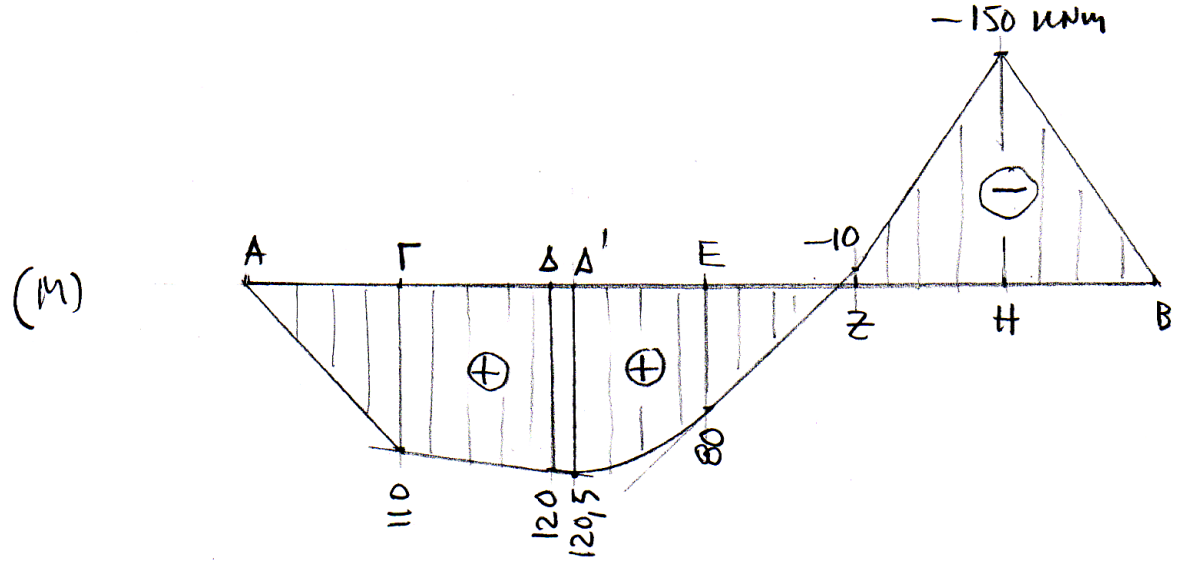
$M_B = M_H + \text{εμβ}[Q]_H^B = -150 + 2 \cdot 75 = 0$

ΑΓ, ΓΔ : $Q = \text{const} \rightarrow M$: γραμμ. μιγαδ.

ΔΕ : Q : γραμμ. μιγαδ. $\Rightarrow M$: παραβολή

ΕΖ, ΖΗ, ΗΒ : $Q = \text{const} \Rightarrow M$: γραμμ. μιγαδ.

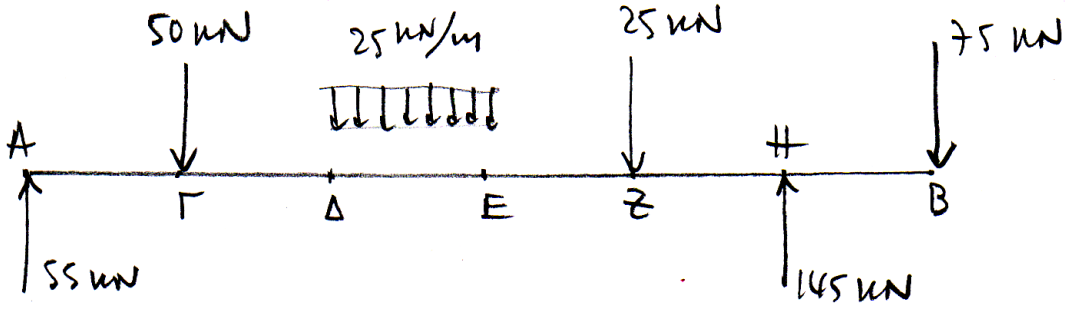
- Το ποθούμε τη στερεία και ενώνουμε με την κατάλληλη γραμμή



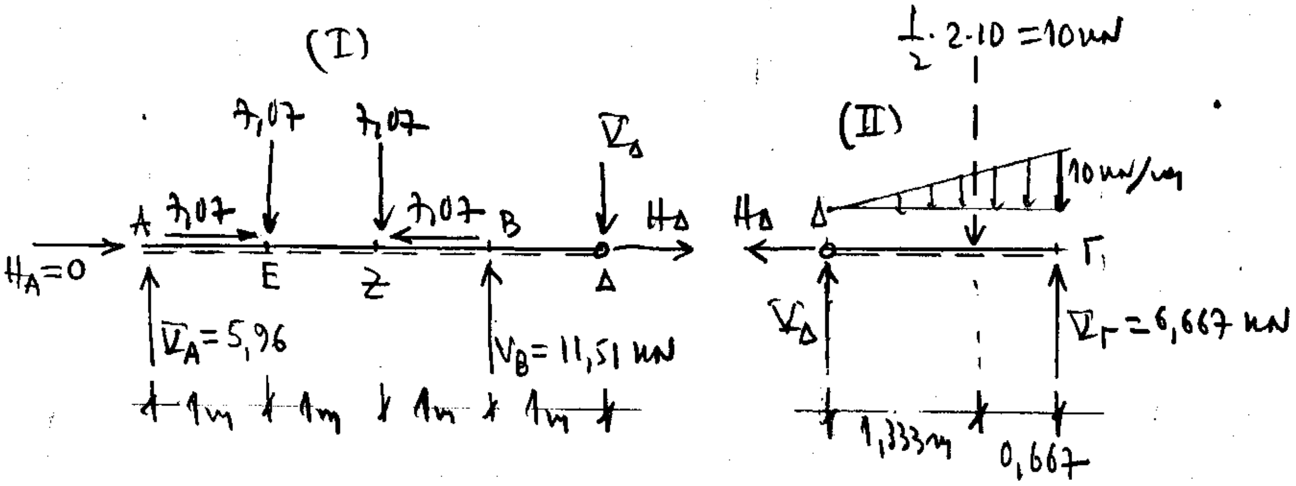
- <u>Παρατήρηση</u> : από το (Q) παραγωγίζοντας μπορούμε να βρούμε το "διάγραμμα φόρτισης".

ΑΓ, ΓΔ, ΕΖ, ΖΗ, ΗΒ : $Q = \text{const} \rightarrow \quad q = -\frac{dQ}{dx} = 0$

ΔΕ : Q : γραμμ. μιγαδ. $\Rightarrow q = -\frac{dQ}{dx} = -\frac{-45-5}{2} = 25 \text{ kN/m}$



3η Άσκηση (α)



υπάρχουν / απαιτούνται

$\nu' = 1$, ν: $2+1+1=4$ = $3+\nu'$ τουλάχιστον

4 2 2

$\nu + \kappa = 3n$ ✓

(ΙΙ) τοποθετήθηκε 2ο – λύνεται 1ο

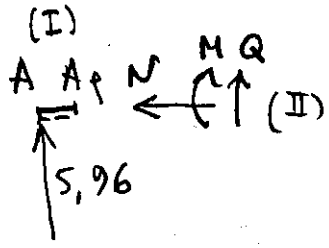
Εξ. Στατ. Ισορρ. ⇒ $H_Δ = 0$, $V_Δ = 3,333$ kN, $V_Γ = 6,667$ kN

(Ι) Τοποθετήθηκε 1ο – λύνεται 2ο

Εξ. Στατ. Ισορρ ⇒ $H_A = 0$, $V_A = 5,96$ kN, $V_B = 11,51$ KN

Διαγράμματα: βρίσκουμε τιμές N,Q,M σε χαρακτηριστικά σημεία στη συνέχεια (6 τόπος)

Σημείο Α: 1η επιλογή – αριστερά (I)

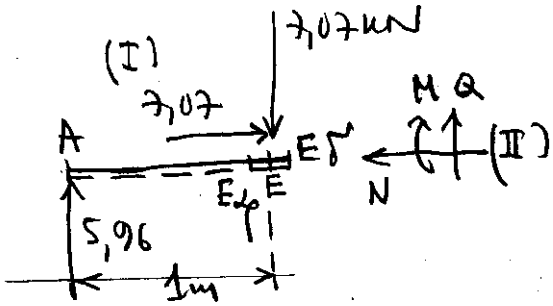


$N_{A_{αρ}} = 0$

$Q_{A_{αρ}} = 5,96$

$M_A = 0$

Σημείο Ε: 1η επιλογή – αριστερά (I)



$N_{E_{αρ}} = 0$

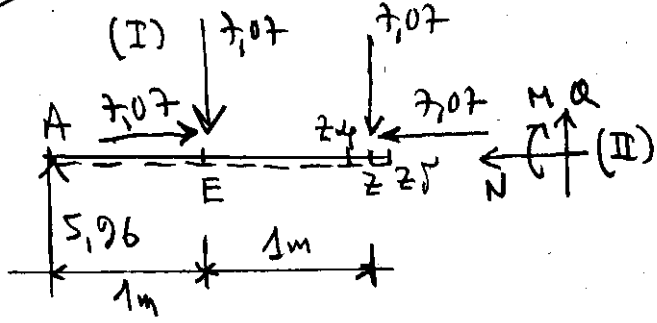
$N_{E_γ} = -7,07$ kN

$Q_{E_{αρ}} = 5,96$ kN

$Q_{E_γ} = 5,96 - 7,07 = -1,11$

$M_E = 1 \cdot 5,96 = 5,96$ kN

Σημείο Ζ: 1η επιλογή – αριστερά (I)



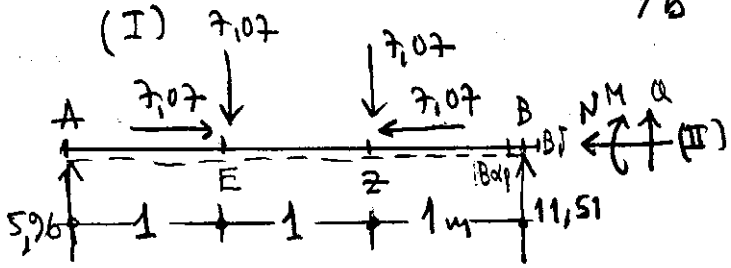
$N_{Z_{αρ}} = -7,07$

$N_{Z_γ} = -7,07 + 7,07 = 0$

$Q_{Z_{αρ}} = 5,96 - 7,07 = -1,11$ kN

$Q_{Z_γ} = 5,96 - 7,07 - 7,07 = -8,18$ kN

$M_Z = 2 \cdot 5,96 - 1 \cdot 7,07 = 4,85$ kN



Σημείο B: 1η επιλογή – αριστερά (I)

$N_B = -7{,}07 + 7{,}07 = 0$

$Q_{B\alpha\rho} = 5{,}96 - 7{,}07 - 7{,}07 = -8{,}18\,[kN]$

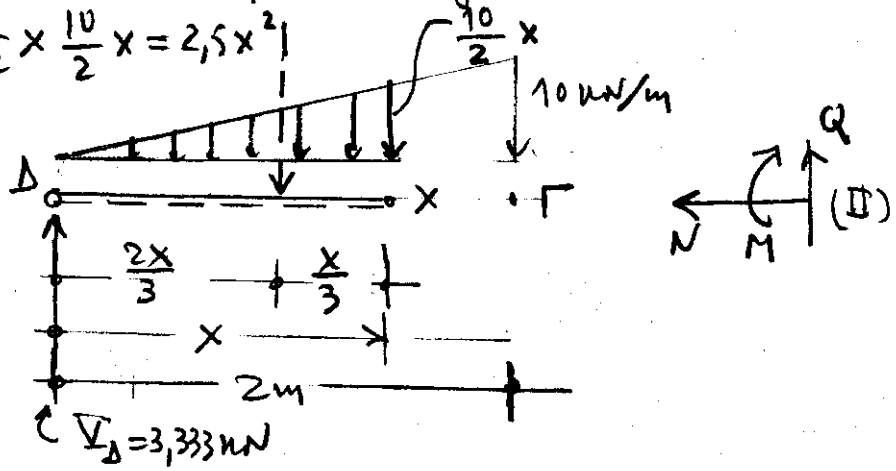
$Q_{B\delta} = 5{,}96 - 7{,}07 - 7{,}07 + 11{,}51 = 3{,}33\,[kN]$

$M_B = 3 \cdot 5{,}96 - 2 \cdot 7{,}07 - 1 \cdot 7{,}07 = -3{,}33\,[kN\,m]$

1η επιλογή – αριστ. (I)

Τμήμα ΔΓ: κινώ το Δ προς τα δεξιά,

$0 < x < 2$



$N(x) = 0$

παραβολή ↙

$Q(x) = 3{,}333 - 2{,}5\,x^2$

$M(x) = x\,3{,}333 - \frac{x}{3} 2{,}5x^2 =$

$= 3{,}333\,x - 0{,}8333\,x^3$ κυβική παραβολή

1. $Q_\Delta = Q(0) = 3{,}333\,kN \leftarrow V_\Delta$
2. $Q_\Gamma = Q(2) = -6{,}667\,kN \leftarrow -V_\Gamma$
3. Στο Δ : $q = 0 \Rightarrow$ Q: κυρτότητα – οριζόντια εφαπτομένη
4. Όταν $Q(x) = 0 \rightarrow M_{max}$ η $3{,}333 - 2{,}5\,x^2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1{,}155\,m}$ H

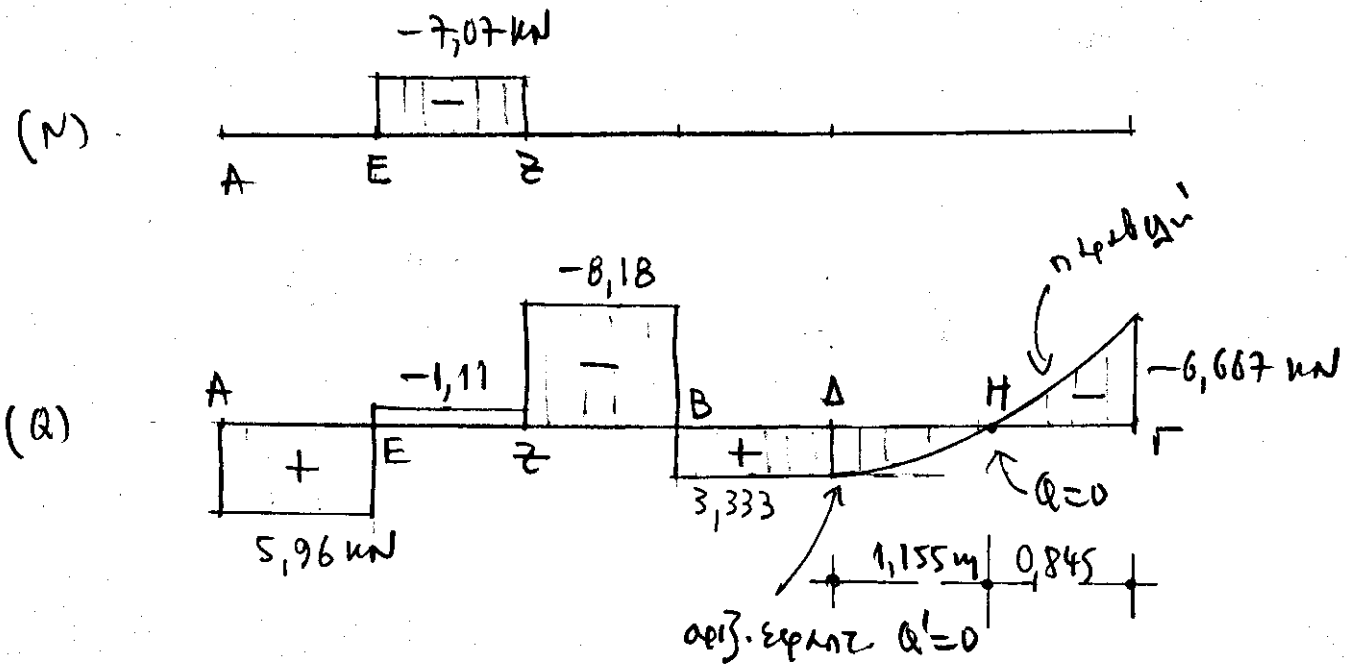
   $M_{max} = M(1{,}155) = 2{,}566\,kNm$ στο H
5. Αναμένεται ότι $M_\Gamma = M(2m) = 0$ ✓

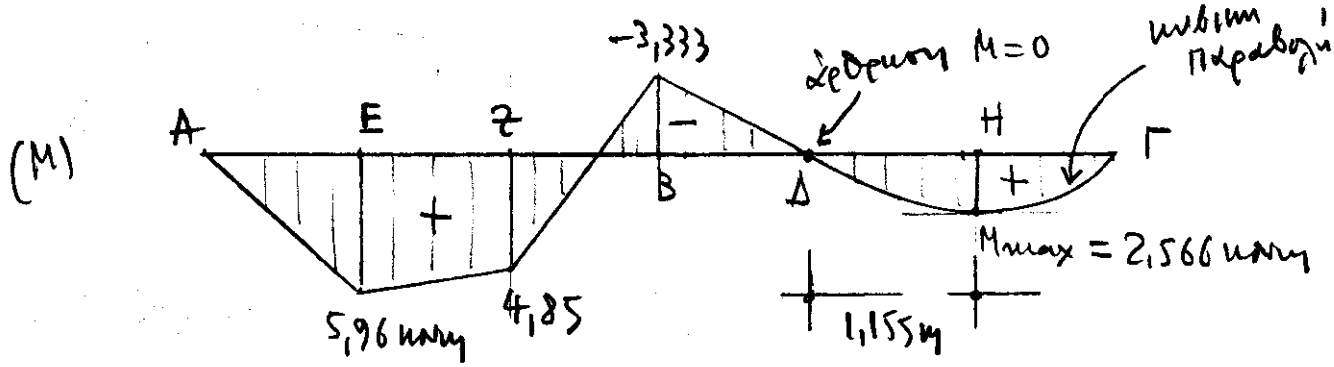
../..

ΑΕ, ΕΖ, ΖΒ, ΒΔ: $q=0 \Rightarrow Q=$ σταθ. $\Rightarrow M:$ γραμμ. διάγρ.

ΔΓ: $q=$ γραμμ. διάγρ. $\Rightarrow Q:$ παραβ. $\Rightarrow M:$ κυβική διάγρ.

• Τοποθετούμε τις τιμές και σχεδιάζουμε τις αντίστοιχες γραμμές.

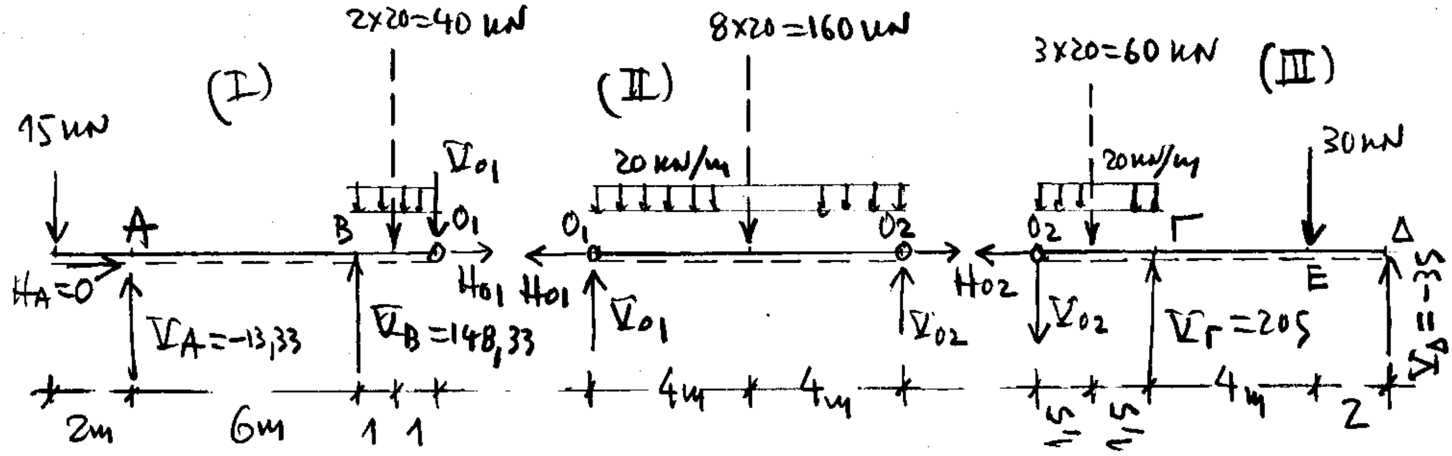




$v'=2$, v $(3+\overset{v'}{2}=5) = (2+1+1+1=5)$
αποκτώνται ανέχων

3η Άσκηση (β)

$\overset{5}{v} + \overset{2\times 2}{u} = \overset{3}{3n}$



(II) τοποθετήθηκε τελευταίο — λύνεται 1ο

Εξ. Στατ. Ισορρ. ⟹
$$\begin{cases} H_{01} = H_{02} \quad (1) \\ V_{01} = 80 \text{ kN} \\ V'_{02} = 80 \text{ kN} \end{cases}$$

(III) τοποθετήθηκε 2ο — λύνεται 2ο

Εξ. Στατ. Ισορρ. ⟹
$$\begin{cases} H_{02} = 0 \quad \text{και } (1) \Rightarrow H_{01} = 0 \\ V_{Γ} = 205 \text{ kN} \\ V'_{Δ} = -35 \text{ kN} \end{cases}$$

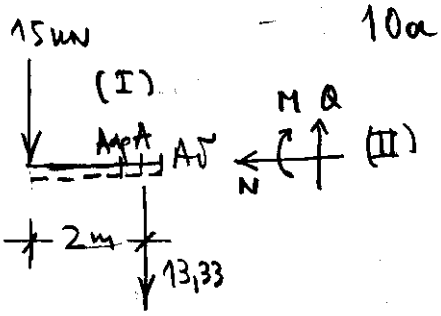
(I) τοποθετήθηκε 1ο — λύνεται τελευταίο

Εξ. Στατ. Ισορρ. ⟹
$H_A = 0$
$V_A = -13,33$ kN
$V_B = 148,33$ kN

Διαγράμματα: βρίσκουμε τιμές (N, Q, M) σε χαρακτηριστικά σημεία σε διαγράμματα (b τρόπος)

../..

Σημείο Α — 1η επιλογή – αριστερό (Ι)



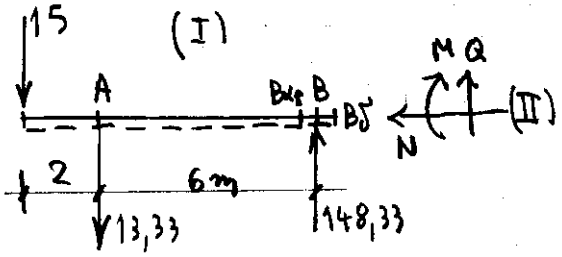
$N_A = 0$

$Q_{A\alpha\rho} = -15\,[kN]$

$Q_{A\Gamma} = -15 - 13{,}33 = -28{,}33\,[kN]$

$M_A = -2 \cdot 15 = -30\ kNm$

Σημείο Β — 1η επιλογή – αριστερό (Ι)



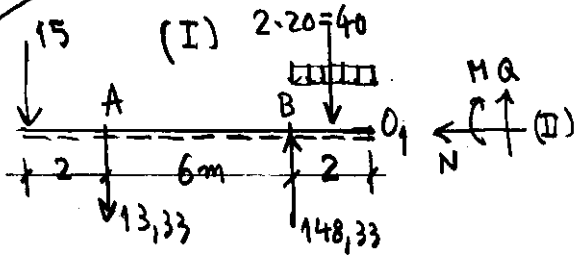
$N_B = 0$

$Q_{B\alpha\rho} = -15 - 13{,}33 = -28{,}33\ kN$

$Q_{B\delta} = -15 - 13{,}33 + 148{,}33 = 120\ kN$

$M_B = -8 \cdot 15 - 6 \cdot 13{,}33 = -200\ kNm$

Σημείο O_1: 1η επιλ – αριστερό (Ι)

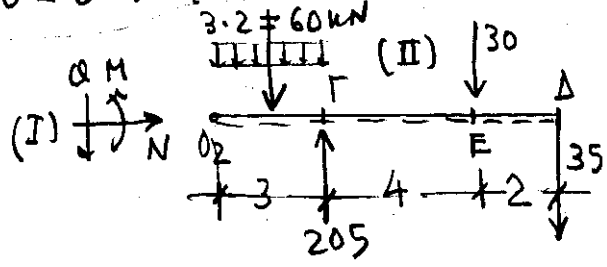


$N_{O_1} = 0$

$Q_{O_1} = -15 - 13{,}33 + 148{,}33 - 40 = 80\ kN$

$M_{O_1} = -10 \cdot 15 - 8 \cdot 13{,}33 + 2 \cdot 148{,}33 - 1 \cdot 40 = 0 \rightarrow$ ἀρθρωση – επαλήθευση !!

Σημείο O_2: 2η επιλ – δεξιό (ΙΙ)

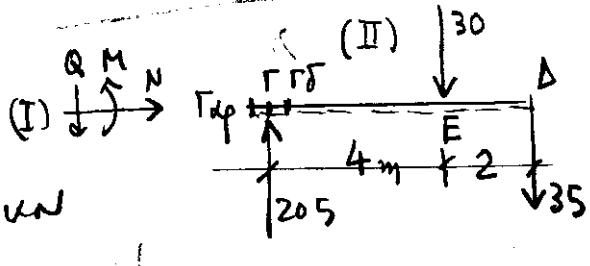


$N_{O_2} = 0$

$Q_{O_2} = 35 + 30 - 205 + 60 = -80\ kN$

$M_{O_2} = -9 \cdot 35 - 7 \cdot 30 + 3 \cdot 205 - 1{,}5 \cdot 60 = 0 \rightarrow$ ἀρθρωση – επαλήθευση !!

Σημείο Γ: 2η επιλ – δεξιό (ΙΙ)



$N_\Gamma = 0$

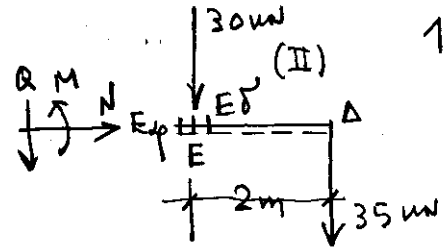
$Q_{\Gamma\alpha\rho} = -205 + 30 + 35 = -140\ kN$

$Q_{\Gamma\delta} = 30 + 35 = 65\ kN$

$M_\Gamma = -6 \cdot 35 - 4 \cdot 30 = -330\ kNm$

.../...

Σημείο Ε: 2η επιλογή – δεξιό (ΙΙ)



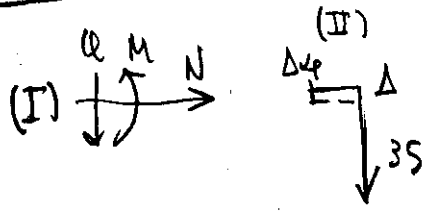
$N_E = 0$

$Q_{E\Gamma} = 35$ kN

$Q_{E\phi} = 35 + 30 = 65$ kN

$M_E = 2(-35) = -70$ [kNm]

Σημείο Δ: 2η επιλογή – δεξιό (ΙΙ)



$N_\Delta = 0$

$Q_{\Delta\phi} = 35$ kN

$M_\Delta = 0$

ΑΒ: $q = 0 \rightarrow Q = \text{const} \rightarrow$ Μ: γραμμ. μεταβολή

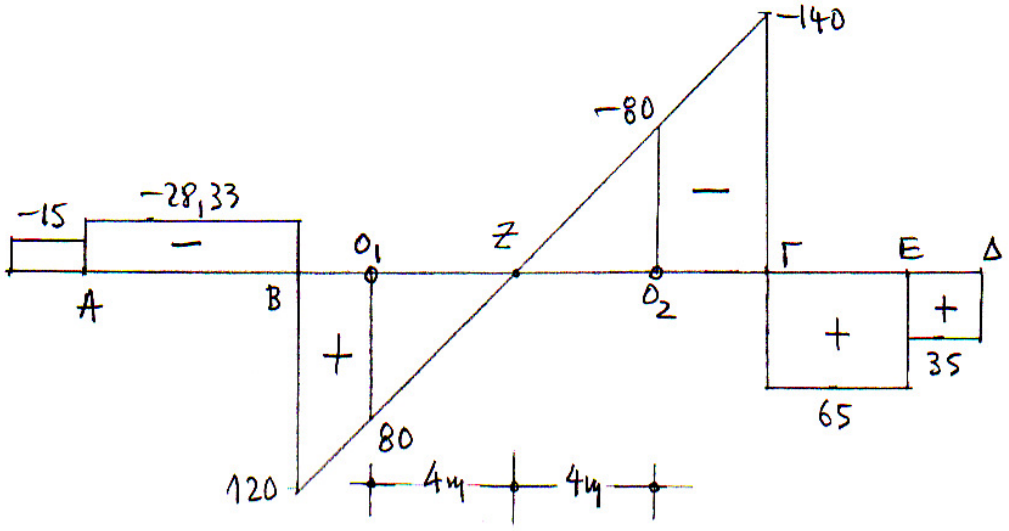
$B O_1 O_2 \Gamma$: $q = \text{const} \rightarrow$ Φ: γραμμ. μεταβ. $\rightarrow$ Μ: παραβολή

ΓΔ: $q = 0 \rightarrow Q = \text{const} \rightarrow$ Μ: γραμμ. μεταβολή

• Συνθήκη της άρθρωσης που ενώνει δύο ευθύγραμμα τμήματα.

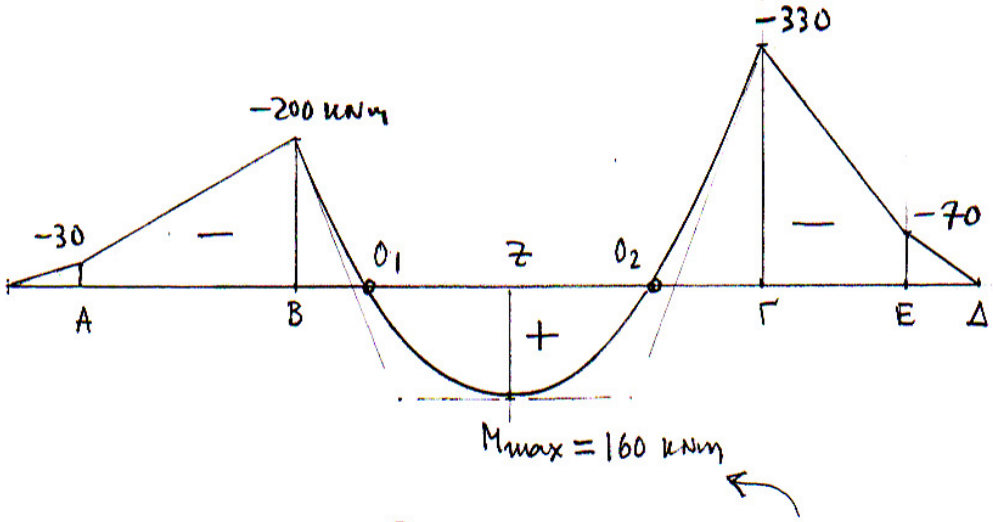
(Ν)

(Q)



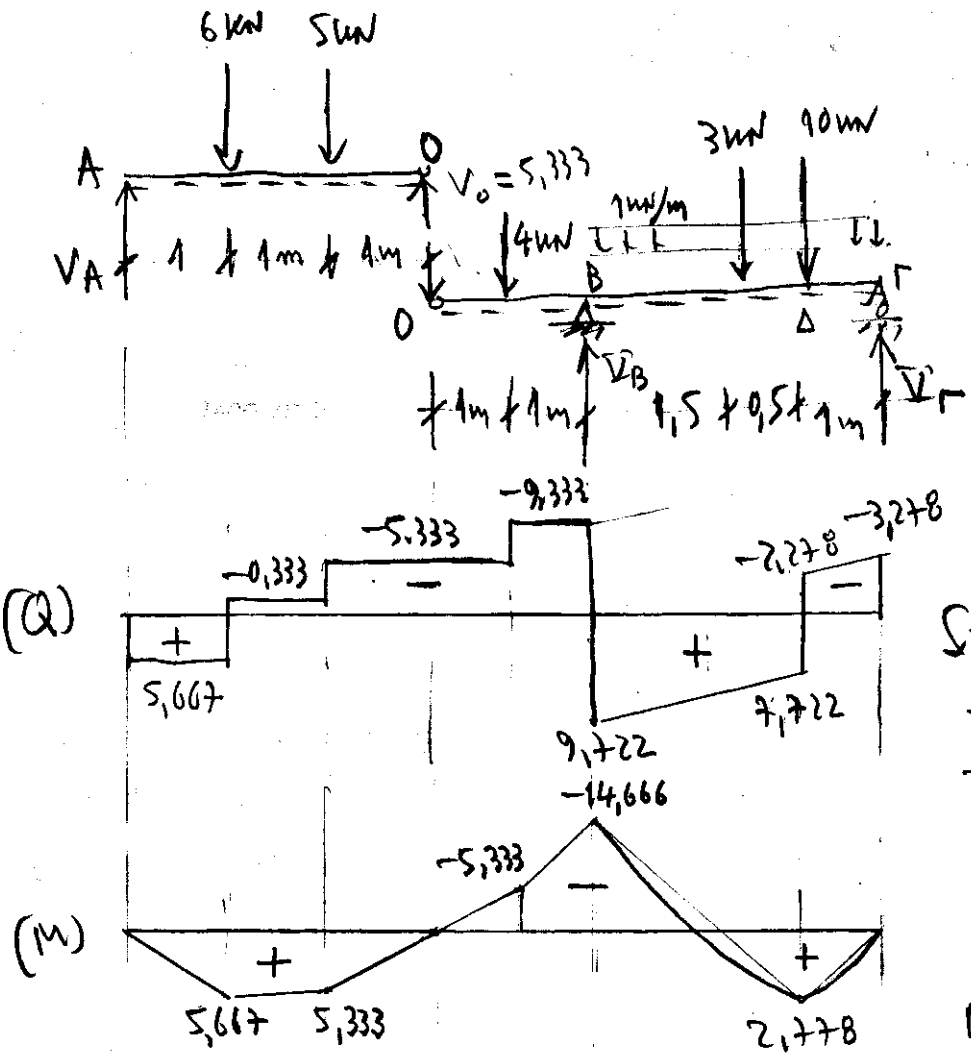
$Q_z = 0 \rightarrow M_z$: ακρότατο.

(M)



$$M_z = M_{O_1} + \text{εμβ}[Q]_{O_1}^{z} = 0 + \frac{1}{2} 80 \cdot 40 = 160 \text{ kNm} = M_{max}$$

Άσκηση 3(δ)



Α Ο :

$V_A + V_o = 11\,kN$

$(+\circlearrowleft)\ \Sigma(M_i)_A = 0$ ως $-1.6 - 2.5 + 3V_o = 0 \Rightarrow \boxed{V_o = 5,333\,kN}$

$\boxed{V_A = 5,667\,kN}$

ΟΒΓ :

$V_B + V_\Gamma = \overbrace{4+3+10}^{5.333+} = 22,333\,kN$

$(+\circlearrowleft)\ \Sigma(M_i)_B = 0$ ως $\overbrace{1.4}^{2.5,333+} - 1,5.3 - 2.10 + 3.V_\Gamma = 0 \Rightarrow$

$V_\Gamma = 3,278\,kN \Rightarrow$

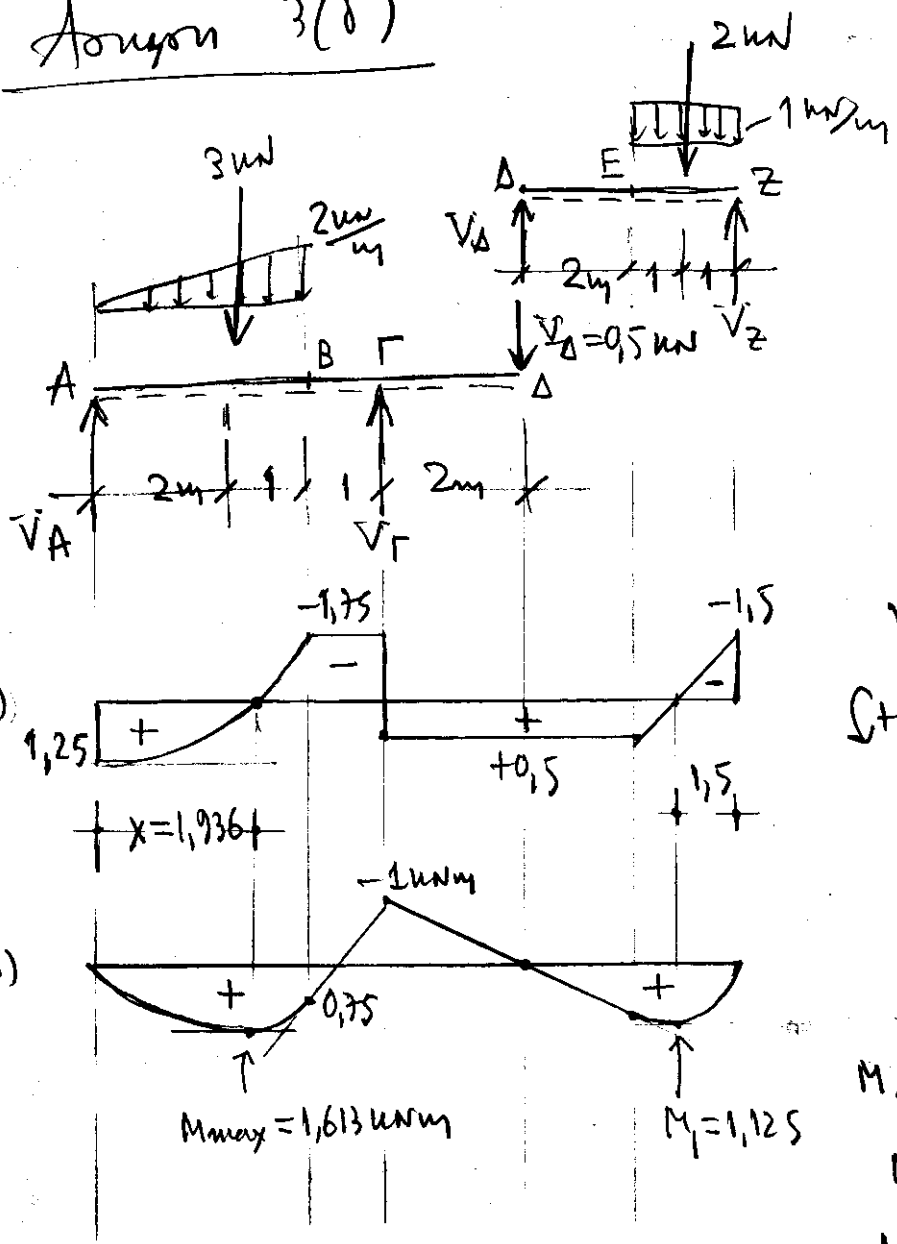
$V_B = 19,055\,kN$

$M_\Delta = \dfrac{2,278+3,278}{2} \cdot 1 = 2,778$

$M_B = 2,778 - \dfrac{9,722+7,722}{2} =$

$= -14,666\,kNm$

Δοκος 3(δ)



ΔΖ:

$V_Δ + V_Z = 2$ κN

$\zeta + \Sigma(M_i)_Δ = 0$ μ' $\rightarrow -3\cdot 2 + 4V_Z = 0$

$\Rightarrow \boxed{V_Z = \frac{6}{4} = 1,5 \text{ κN}}$

$\boxed{V_Δ = 0,5 \text{ κN}}$

ΑΔ:

$V_A + V_Γ = 3,0 + 0,5 = 3,5$ κN

$\zeta + \Sigma(M_i)_A = 0$ μ' $-2\cdot 3 + 4\cdot V_Γ - 6\cdot 0,5 = 0 \Rightarrow \boxed{V_Γ = \frac{9}{4} = 2,25 \text{ κN}}$ ($V_Δ$)

$\Rightarrow \boxed{V_A = 1,25 \text{ κN}}$

$M_1 = \frac{1}{2}\,1,5 \cdot 1,5 = 1,125$ κNμ

$M_Γ = -2\cdot 0,5 = -1$ κNμ

$M_Δ = M_Γ + 1\cdot 1,75 = 0,75$ κNμ

$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} x = 1,25 \Rightarrow x = 1,936$ μ (Q A)

$M_{max} = \frac{2}{3}\,1,936 \cdot 1,25 = 1,613$ κNμ