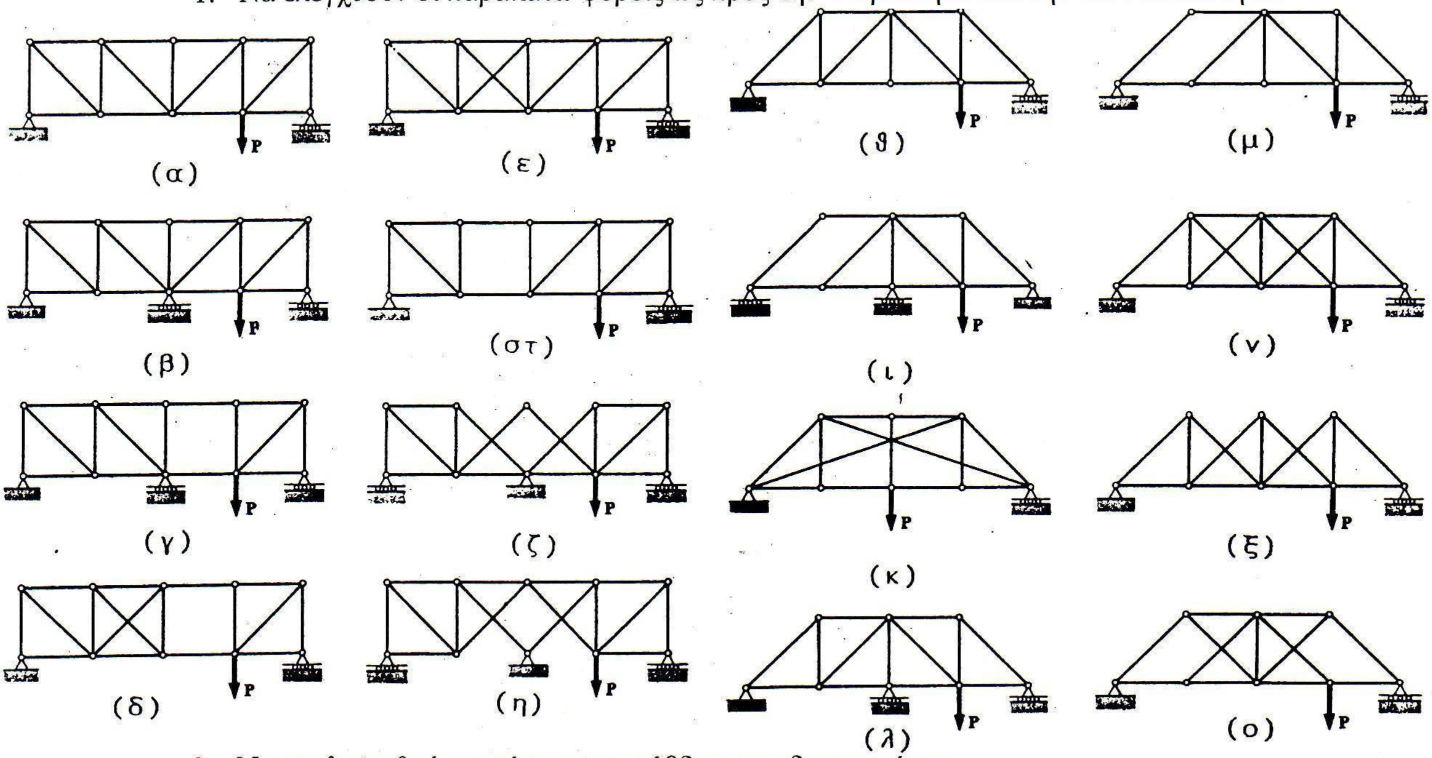
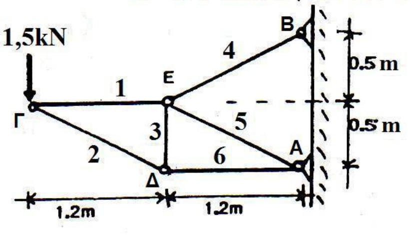
Ε.Μ.Π. - Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.
Τομέας Μηχανικής

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑΤΙΚΗΣ
ΟΜΑΔΑ Ε'

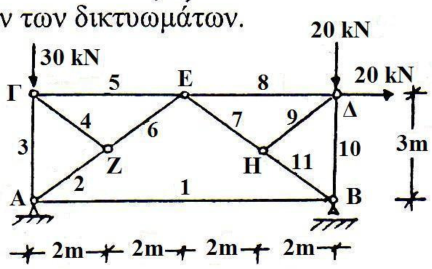
1. Να ελεγχθούν οι παρακάτω φορείς ως προς την στερεότητα και την ισοστατικότητα.



2. Να υπολογισθούν οι τάσεις των ράβδων των δικτυωμάτων.

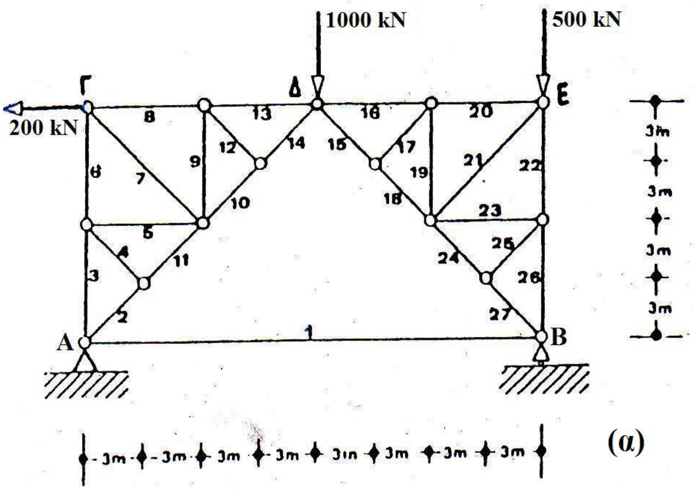


(α)

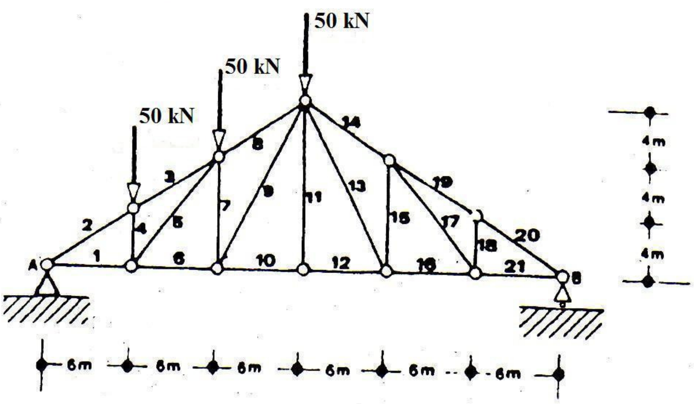


(β)

3. Να προσδιορισθούν οι τάσεις των ράβδων 1, 2, 3, 7 και 8 του δικτυώματος (α) καθώς και των ράβδων 7, 9, 13 και15 του δικτυώματος (β) του σχήματος.

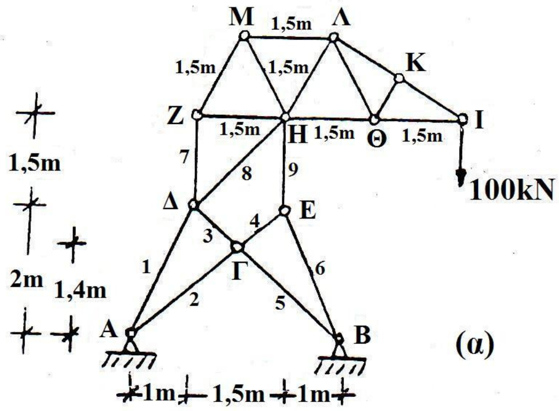


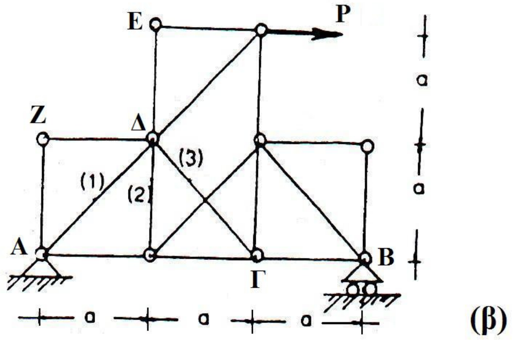
(α)



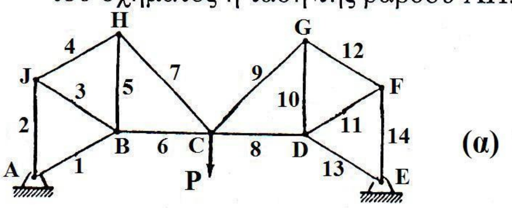
(β)

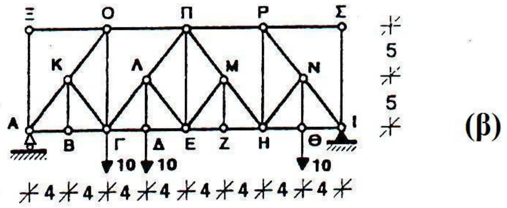
4. Να ελεγχθούν οι φορείς ως προς την ισοστατικότητα και να υπολογισθούν οι τάσεις των ράβδων 1, 2 και 3.



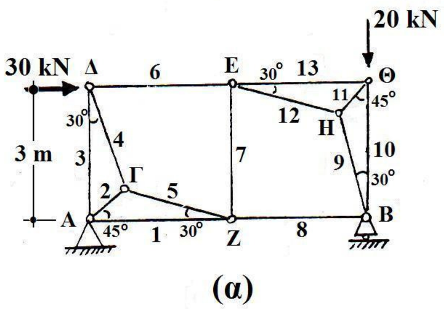


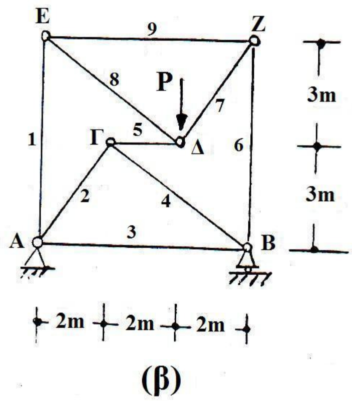
5. Στο δικτύωμα (α) του σχήματος να προσδιορισθούν οι αντιδράσεις στηρίξεως και η τάση της ράβδου GD (όλες οι γωνίες είναι 45°, 60° ή 90°) και στο δικτύωμα (β) του σχήματος η τάση της ράβδου ΛΠ.

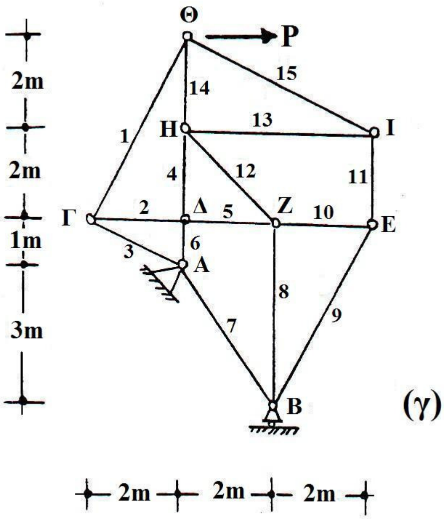


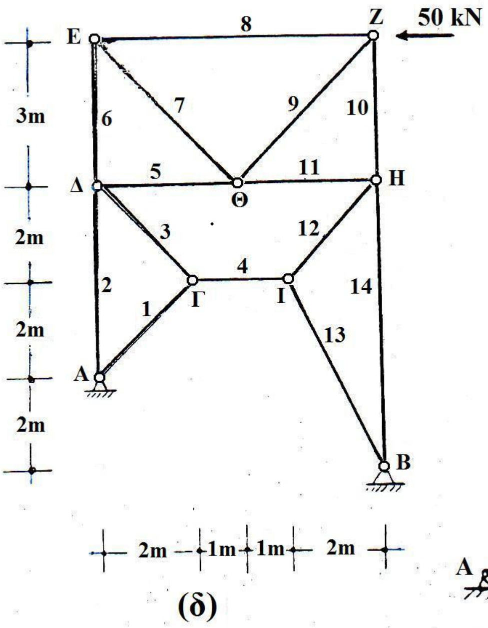


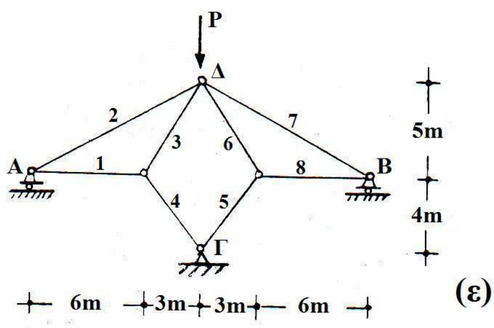
6. Να επιλυθούν τα παρακάτω δικτυώματα.

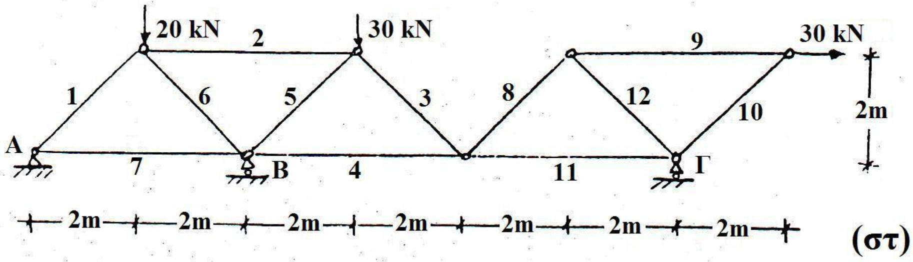












ΛΥΣΕΙΣ

1η Άσκηση

(α) Στερεόχημεία δέσμου: απλός στερεός με τριγωνισμό

Στερεόχημεία φορέα: v: $\underset{\text{υπάρχουν}}{(2+1=3)} = \underset{\text{ελάχ. απαιτ.}}{3}$ στερεός φορέας

Ισοστατικότητα φορέα: $\overset{17}{\rho} + \overset{3}{v} = 2\overset{10}{K}$ ισοστατικός φορέας

(b) Στερεόχημεία δέσμου: απλός στερεός επί τριγωνισμό

Στερεόχημεία φορέα: v: $\underset{\text{υπάρχουν}}{(2+1+1=4)} > \underset{\text{ελάχ. απαιτ.}}{3}$ στερεός φορέας

Ισοστατικότητα φορέα: $\overset{17}{\rho} + \overset{4}{v} > 2\overset{10}{K}$ υπερστατικός φορέας

(γ) Στερεόχημεία δέσμου: Σύνθετος και μηχανισμός $v'=1$ βαθμ. ελευθ.

Στερεόχημεία φορέα: v: $\underset{\text{υπάρχουν}}{(2+1+1=4)} = \underset{\text{ελάχ. απαιτ.}}{3+1}$ στερεός φορέας

Ισοστατικότητα φορέα: $\overset{16}{\rho} + \overset{4}{v} = 2\overset{10}{K}$ ισοστατικός φορέας

(δ) Στερεόχημεία δέσμου: $\overbrace{\text{Σύνθετος}}^{\text{(ο ένας δίσκος στερεός αλλά όχι απλός)}}$ και μηχανισμός, $v'=1$ βαθμ. ελευθ.

Στερεόχημεία φορέα v: $\underset{\text{υπάρχουν}}{(2+1=3)} < \underset{\text{ελάχ. απαιτ.}}{3+1}$ μηχανισμός

(ε) Στερεότητα δίσκου: Στερεός (αλλά όχι απλός) με τριγωνισμό
υπάρχουν ελάχ. απαιτ.

Στερεότητα φορέα: $r: (2+1=3) = 3$ Στερεός φορέας

Ισοστατικότητα φορέα: $\overset{18}{p}+\overset{3}{r} > 2\overset{10}{k}$ υπερστατικός

(στ) Στερεότητα δίσκου: Σύνθετος και μηχανισμός $r'=1$ βαθμ. ελευθ.
υπάρχουν ελάχ. απαιτ.

Στερεότητα φορέα: $r: (2+1=3) < 3+1$: μηχανισμός

(ζ) & (η) Στερεότητα δίσκου: Σύνθετος και Μηχανισμός $r'=1$ βαθμ. ελευθ.
υπάρχουν ελάχ. απαιτ.

Στερεότητα φορέα: $r: (1+2+1=4) = 3+1$: Στερεός φορέας

Ισοστατικότητα φορέα: $\overset{16}{p}+\overset{4}{r} = 2\overset{10}{k}$ ισοστατικός

(θ) Στερεότητα δίσκου: Απλός στερεός με τριγωνισμό
υπάρχουν ελάχ. απαιτ.

Στερεότητα φορέα: $r: (2+1=3) = 3$ Στερεός φορέας

Ισοστατικότητα φορέα: $\overset{13}{p}+\overset{3}{r} = 2\overset{8}{k}$ ισοστατικός (ι) Στερεότητα δίσκου: σύνθετος και μηχανισμός $\underbrace{}_{}$ $v'=1$ βαθ. ελ.

Στερεότητα φορέα: $v: (\underbrace{1+1+2=4}_{\text{υπάρχουν}}) = \underbrace{3+1}_{\text{ελάχ. απαιτ.}}$: στερεός φορέας

Ισοστατικότητα φορέα: $\overset{12}{p} + \overset{4}{v} = \overset{2\cdot 8}{2\kappa}$ ισοστατικός φορέας

(κ) Στερεότητα δίσκου σύνθετος από 3 στερεούς δίσκους που συνδέονται ανά δύο με 2 διαρθρ. ράβδους, αλλά τα 3 σημεία τομής κείνται επί ευθείας. Άρα μηχανισμός $v'=1$ βαθ. ελευθ.

Στερεότητα φορέα $v: (\underbrace{1+2=3}_{\text{υπάρχουν}}) < \underbrace{3+1}_{\text{ελάχ. απαιτ.}}$: μηχανισμός

(λ) Στερεότητα δίσκου: απλός στερεός με τριγωνισμό

Στερεότητα φορέα: $v: (\underbrace{2+1+1=4}_{\text{υπάρχουν}}) > \overset{\text{ελάχ. απαιτ.}}{3}$ στερεός φορέας

Ισοστατικότητα φορέα $\overset{13}{p} + \overset{4}{v} > \overset{8}{2\kappa}$ υπερστατικός

(μ) Στερεότητα δίσκου σύνθετος και μηχανισμός $v'=1$ βαθ. ελ.

Στερεότητα φορέα: $v: (\underbrace{2+1=3}_{\text{υπάρχουν}}) < \underbrace{3+1}_{\text{ελάχ. απαιτ.}}$ μηχανισμός

../..

(ν) <u>Στερεότητα δίσκων</u> Στερεός (αλλά όχι αυστηρός) επί [illegible]

<u>Στερεότητα φορέα</u>: r: $(\underbrace{2+1}_{\text{υπάρχουν}} = \overset{\text{ελάχ. απαιτ.}}{3}) = 3$: στερεός φορέας

<u>Ισοστατικότητα φορέα</u>: $\overset{15}{p} + \overset{3}{r} > \overset{2\cdot 8}{2k}$ υπερστατικός φορέας

(ξ) <u>Στερεότητα δίσκων</u>: Αυστηρός στερεός επί [illegible]

<u>Στερεότητα φορέα</u>: r: $(\underbrace{2+1}_{\text{υπάρχουν}} = \overset{\text{ελάχ. απαιτ.}}{3}) = 3$: στερεός φορέας

<u>Ισοστατικότητα φορέα</u>: $\overset{13}{p} + \overset{3}{r} = \overset{2\cdot 8}{2k}$: ισοστατικός φορέας

(ο) <u>Στερεότητα δίσκων</u>: Αυστηρός στερεός επί [illegible]

<u>Στερεότητα φορέα</u>: r: $(\underbrace{2+1}_{\text{υπάρχουν}} = \overset{\text{ελάχ. απαιτ.}}{3}) = 3$: στερεός φορέας

<u>Ισοστατικότητα φορέα</u>: $\overset{13}{p} + \overset{3}{r} = \overset{2\cdot 8}{2k}$: ισοστατικός φορέας

2η Άσκηση (α)

• ΓΔΑΕ δίσκος απλός-στερεός (τριγων.) που "Α" στηρίζεται σε 1 άρθρ. + 1 δεσμ. ράβδο "ΕΒ" "4": $v=3$ → στερεός φορέας.

↑ ισοδύναμη μετάθεση

• Ισοστατικότητα φορέα: $\overset{5}{\rho}+\overset{3}{v}=2\overset{4}{k}$ ✓

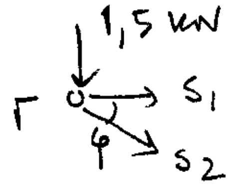
v: H_A, V_A, S_4

ρ: S_1, S_2, S_3, S_5, S_6

• Υπάρχει σειρά διαδοχικών κόμβων με 2 άγνωστες τάξεις: Γ → Δ → Ε → Α

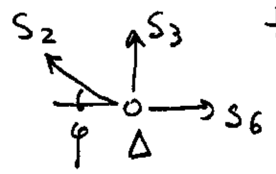
κόμβος Γ

$$\tan\varphi=\frac{0,5}{1,2}=0,417 \Rightarrow \begin{cases}\varphi=22,62^\circ\\ \cos\varphi=0,923\\ \sin\varphi=0,385\end{cases}$$



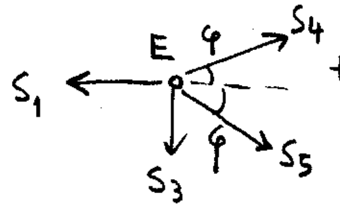
$$\left.\begin{array}{l}\overset{+}{\rightarrow}\ \Sigma X_i=0 \text{ ή } S_1+0,923\,S_2=0\\ +\uparrow\ \Sigma Y_i=0 \text{ ή } -1,5\,kN-0,385\,S_2=0\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}S_1=3,596\,kN & \text{εφελκ.}\\ S_2=-3,896\,kN & \text{θλ.}\end{cases}$$

κόμβος Δ:



$$\left.\begin{array}{l}\overset{+}{\rightarrow}\ \Sigma X_i=0 \text{ ή } -S_2\cdot 0,923+S_6=0\\ +\uparrow\ \Sigma Y_i=0 \text{ ή } S_2\cdot 0,385+S_3=0\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}S_6=S_2\cdot 0,923=-3,596\,kN & \text{θλ.}\\ S_3=-S_2\cdot 0,385=1,500\,kN & \text{εφελ.}\end{cases}$$

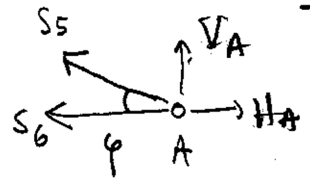
κόμβος Ε:



$$\left.\begin{array}{l}\overset{+}{\rightarrow}\ \Sigma X_i=0 \text{ ή } -S_1+0,923\,S_4+0,923\,S_5=0\\ +\uparrow\ \Sigma Y_i=0 \text{ ή } -S_3+0,385\,S_4-0,385\,S_5=0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}S_4+S_5=S_1\cdot 1,083 = 3,894\\ S_4-S_5=S_3\cdot 2,597 = 3,896\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}S_4=3,894\,kN & \text{εφ.}\\ S_5=0\end{cases}$$

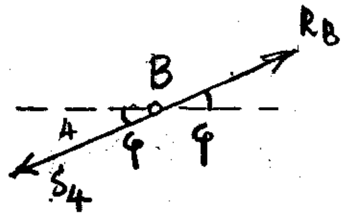
Κόμβος - Στήριξη Α:



$$\left.\begin{array}{l}\overset{+}{\rightarrow}\ \Sigma X_i=0 \text{ ή } -S_6-S_5\cdot 0,923+H_A=0\\ +\uparrow\ \Sigma Y_i=0 \text{ ή } S_5\cdot 0,385+V_A=0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}H_A=S_6+S_5\cdot 0,923=-3,60\,kN\\ V_A=-S_5\cdot 0,385=0\end{cases}$$

Κόμβος - Στήριξη Β:



Στατική ισορρ. κόμβου Β ⇒ R_B ίση και αντίθετη με την S_4.

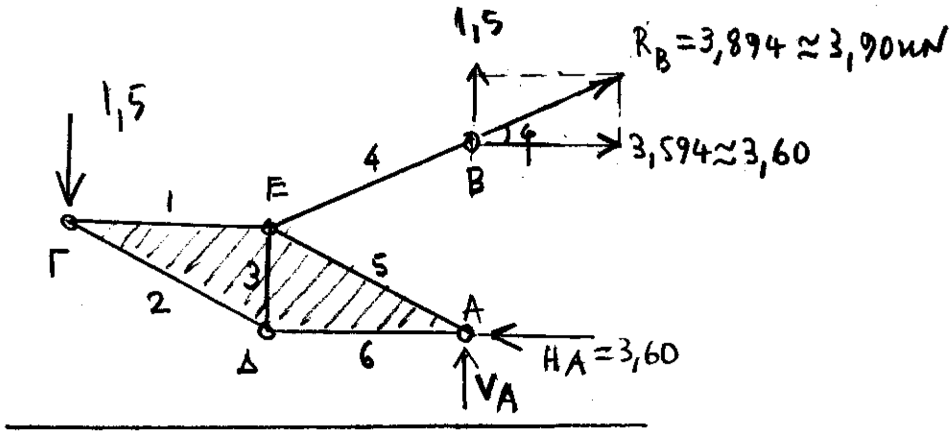
../..

Οι εξισώσεις ισορροπ. ολόκληρου του φορέα ικανοποιούνται αυτόματα εφ' όσον ικανοποιείται ήδη η ισορροπία όλων των κόμβων. Πράγματι:

$\xrightarrow{+}$ $\Sigma X_i = 0$ ή $\overset{-3{,}60}{H_A} + \overset{+3{,}594}{S_4 \cos\varphi} = 0$ ικανοποιείται!!

$+\uparrow$ $\Sigma Y_i = 0$ ή $-1{,}5\,kN + \overset{=0}{V_A} + \overset{1{,}5}{S_4 \sin\varphi} = 0$ ικανοποιείται!!

$\circlearrowleft +$ $\Sigma (M_i)_A = 0$ ή $2{,}4 \cdot 1{,}50 - 1{,}0 \cdot \overset{3{,}594}{S_4 \cos\varphi} = 0$ ικανοποιείται!!



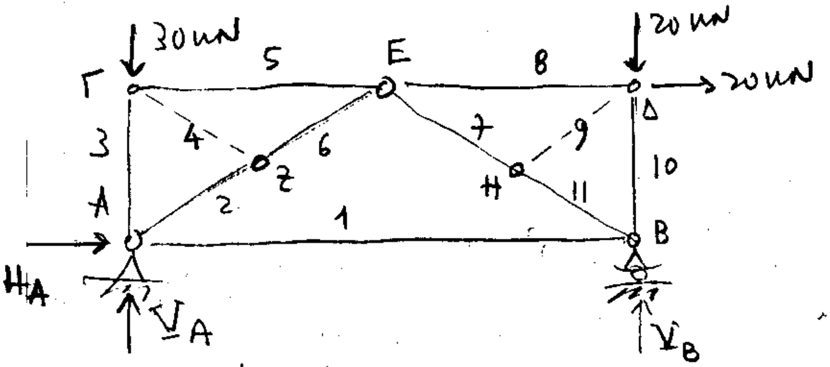
2η Άσκηση! (β) • Δίκτυο σύνθετο και στερεό (από δύο απλούς στερεούς σχηματισμούς, που συνδέονται με 1 άρθρωση "E" και 1 ράβδο "1")

• r: $2+1=3$

Ισοστατικότητα φορέα: $\overset{11}{p}+\overset{3}{r}=2\overset{7}{k}$ ισχύει!

• κανόνες μηδενισμού στους χαρακτηριστικούς κόμβους Z και H:

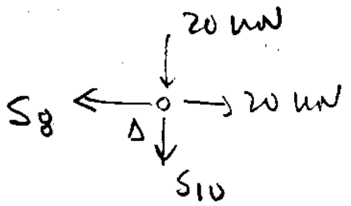
$S_4=S_9=0$, $S_2=S_6$, $S_7=S_{11}$



• Τώρα υπάρχει σειρά διαδοχ. κόμβων με δύο αγνώστους τάσεις

$(\Delta, \Gamma) \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow A$

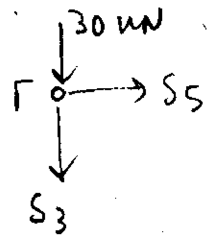
κόμβος Δ



$\xrightarrow{+} \Sigma X_i=0$ ή $-S_8+20=0 \Rightarrow \boxed{S_8=20\text{ kN}}$ εφ.

$+\uparrow \Sigma Y_i=0$ ή $-20-S_{10}=0 \Rightarrow \boxed{S_{10}=-20\text{ kN}}$ θλ.

κόμβος Γ

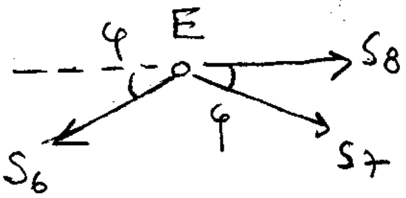


$\xrightarrow{+} \Sigma X_i=0$ ή $\boxed{S_5=0}$

$+\uparrow \Sigma Y_i=0$ ή $-30-S_3=0 \Rightarrow \boxed{S_3=-30\text{ kN}}$ θλ.

κόμβος E

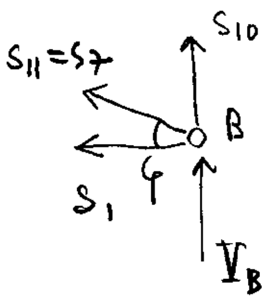
$\tan\varphi=\dfrac{1{,}5}{2}=0{,}75 \Rightarrow \begin{cases}\varphi=36{,}87^{\circ}\\ \cos\varphi=0{,}8\\ \sin\varphi=0{,}6\end{cases}$



$\left.\begin{array}{l}\xrightarrow{+} \Sigma X_i=0 \text{ ή } -S_6\cdot 0{,}8+S_7\cdot 0{,}8+S_8=0\\ +\uparrow \Sigma Y_i=0 \text{ ή } -S_6\, 0{,}6-S_7\cdot 0{,}6=0\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases}S_6=12{,}5\text{ kN} \text{ εφ.}\\ S_7=-12{,}5\text{ kN} \text{ θλ.}\end{cases}$

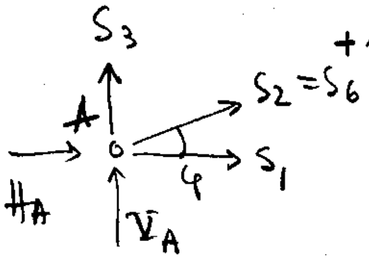
./..

κόμβος Β



$$\left.\begin{array}{l} \overset{+}{\rightarrow} \Sigma X_i = 0 \curvearrowright -S_1 - S_7\, 0{,}8 = 0 \\ +\uparrow \Sigma Y_i = 0 \curvearrowright S_{10} + S_7 \cdot 0{,}6 + V_B = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} S_1 = 10 \text{ kN} \\ V_B = 27{,}50 \text{ kN} \end{array}\right.$$

κόμβος Α



$$\left.\begin{array}{l} \overset{+}{\rightarrow} \Sigma X_i = 0 \curvearrowright H_A + S_1 + \overset{S_6}{S_2} \cdot 0{,}8 = 0 \\ +\uparrow \Sigma Y_i = 0 \curvearrowright V_A + S_3 + S_2 \cdot 0{,}6 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} H_A = -20 \text{ kN} \\ V_A = 22{,}5 \text{ kN} \end{array}\right.$$

• Οι επόμενες συνθ. ισορρ. θέλουμε να φανεί ικανοποιούνται αυτόματα.

3η Άσκηση α) • Στερεός σύνδεση δίσκου με δύο δίσκους (τριγων.) "Δ"

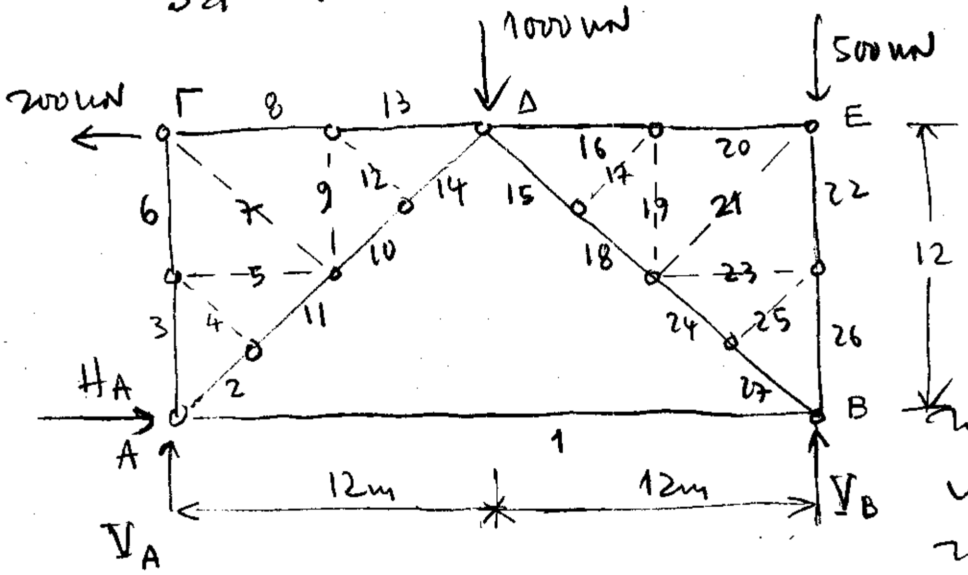
• $\nu : 2+1=3$ — που συνδέονται με 1 άρθρ. & 1 ράβδο "1"

• $\rho + \nu = 2\kappa$ ισχύει (27, 3, 15)

κανόνας διχοτόμησης $(S_4=0 \rightarrow S_5=0,\ S_{12}=0 \rightarrow S_9=0) \Rightarrow$

$\boxed{S_7=0}$ ομοίως δεξιά $(S_{25}=0 \rightarrow S_{23}=0,\ S_{17}=0 \rightarrow S_{19}=0) \Rightarrow$

$S_{21}=0$.



$S_8 = S_{13}$

$S_6 = S_3$

$S_2 = S_{11} = S_{10} = S_{14}$

$S_{16} = S_{20}$

$S_{22} = S_{26}$

$S_{15} = S_{18} = S_{24} = S_{27}$

Τώρα υπάρχει σειρά διαδοχ. λύσεων με δύο αγνώστους:

$(\Gamma, E) \rightarrow \Delta \rightarrow B \rightarrow A$

Όμως ζητάει μόνο 1, 2, 3, 7 και 8, θα κάνουμε τομή Ritter, αφού όμως πρώτα υπολογίσουμε τις αντιδράσεις.

• Υπολογ. αντιδράσεων — Εξισ. Ισορρ. ολόκλ. του φορέα

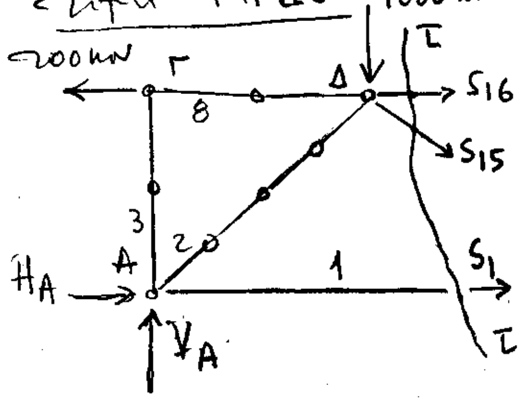
$\xrightarrow{+} \Sigma X_i = 0$ ή $-200 + H_A = 0 \Rightarrow \boxed{H_A = 200\ kN}$

$+\uparrow \Sigma Y_i = 0$ ή $V_A + V_B - 1000 - 500 = 0 \Rightarrow V_A + V_B = 1500\ kN$ (1)

$\circlearrowleft + \Sigma (M_i)_A = 0$ ή $12 \cdot 200 - 12 \cdot 1000 - 24 \cdot 500 + 24\, V_B = 0 \Rightarrow \boxed{V_B = 900\ kN}$

$(1) \Rightarrow \boxed{V_A = 600\ kN}$

τομή Ritter — Εξισ. Ισορρ. ροπών Αριστερού τμήματος



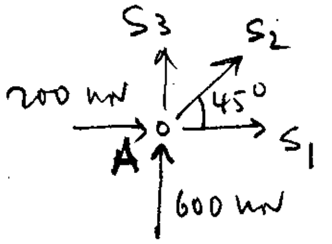
$\circlearrowleft + \Sigma (M_i)_\Delta = 0$ ή $12 \cdot S_1 - 12 \cdot \overset{600}{V_A} + 12 \cdot \overset{200}{H_A} = 0 \Rightarrow$

$\boxed{S_1 = 400\ kN}$

-/-

Στον κόμβο Α υπάρχουν μόνο δύο ράβδοι με άγνωστες τάσεις: S_2, S_3

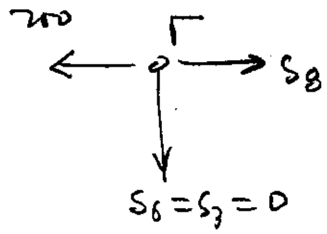
<u>κόμβος Α</u>



$$\left.\begin{array}{l} \overset{+}{\rightarrow} \Sigma X_i = 0 \text{ ή } \overset{400}{200} + S_1 + S_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \\ +\uparrow \Sigma Y_i = 0 \text{ ή } 600 + S_3 + S_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{S_2 = -848,5 \text{ kN}} \\ \boxed{S_3 = 0} \end{array}\right.$$

Στον κόμβο Γ υπάρχει μόνο η S_8 άγνωστη

<u>κόμβος Γ</u>



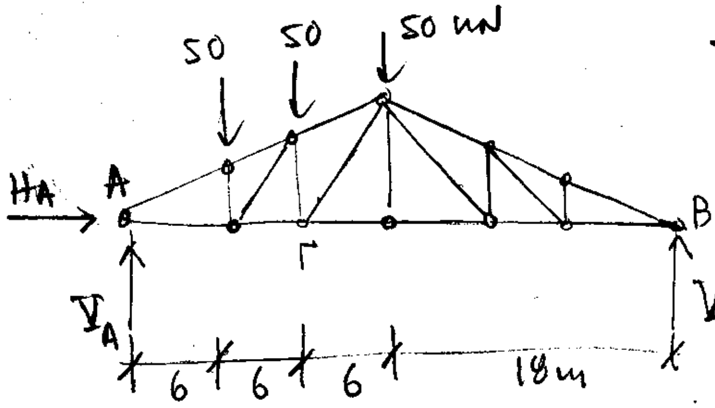
$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma X_i = 0 \text{ ή } -200 + S_8 = 0 \Rightarrow \boxed{S_8 = 200 \text{ kN}}$$

3^{η} Άσκηση β) 1 Στερεός δίσκος δίκτυο (τριγων. του στοιχείου)

• $r = 21 + 3$ • $p + r = 2k$ ισχύει ($21 \quad 3 \quad 2\cdot 12$)

Υπολογισμός αντιδράσεων και
- α) υπάρχει σειρά διαδοχ. κόμβων με δύο αγνώστες τάσεις
- β) τομή Ritter

Εξισ. Ισορρ. ολόκλ. του φορέα



$\xrightarrow{+} \Sigma X_i = 0 \rightarrow \boxed{H_A = 0}$

$+\uparrow \Sigma Y_i = 0 \rightarrow V_A - 3\cdot 50 + V_B = 0 \quad (1)$

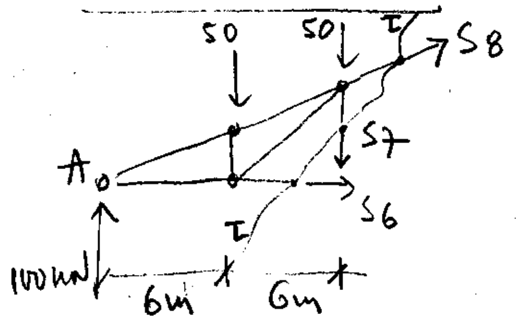
$\circlearrowleft + \Sigma (M_i)_A = 0 \rightarrow -6\cdot 50 - 12\cdot 50 - 18\cdot 50 + 36 V_B = 0 \Rightarrow \boxed{V_B = 50 \text{ kN}}$

$(1) \Rightarrow \boxed{V_A = 100 \text{ kN}}$

Μέθοδος Ritter τ-τ

Υπολογισμός S_7

Εξισ. Ισορρ. ροπών αριστ. τμήματος



$\circlearrowleft + \Sigma (M_i)_A = 0 \rightarrow -6\cdot 50 - 12\cdot 50 - 12\cdot S_7 = 0 \Rightarrow$

συντρέχουν S_8 & S_6

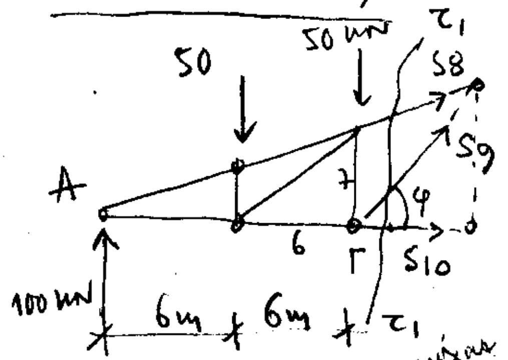
$\boxed{S_7 = -75 \text{ kN}}$ Θλ.

Υπολογισμός S_9

α' τρόπος με τομή Ritter $\tau_1 - \tau_1$

$\tan\varphi = \frac{12}{6} = 2 \rightarrow \begin{cases} \varphi = 63{,}44^{\circ} \\ \cos\varphi = 0{,}447 \\ \sin\varphi = 0{,}894 \end{cases}$

Εξισ. Ισορρ. ροπών αριστ. τμήματος



συντρέχουν S_{10} & S_8 $\quad \circlearrowleft + \Sigma (M_i)_A = 0 \rightarrow -6\cdot 50 - 12\cdot 50 + 12\cdot S_9 \cdot \underbrace{0{,}894}_{\sin\varphi} = 0 \longrightarrow$

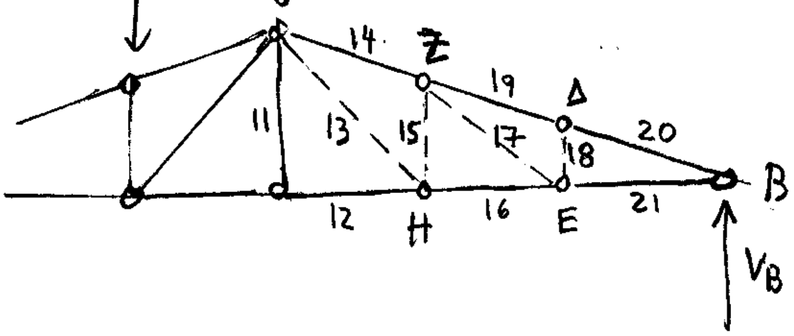
$\boxed{S_9 = 83{,}89 \text{ kN}}$ ή $\boxed{S_9 = -\frac{S_7}{\sin\varphi} = 83{,}89 \text{ kN}}$

β' τρόπος με εξισ. ισορρ. $\uparrow \Sigma Y_i = 0$ του κόμβου Γ: $\rightarrow S_7 + S_9 \cdot \sin\varphi = 0$

../..

Υπολογισμός των S_{13} και S_{15}

β' τρόπος με "κανόνες απλοποίησης"



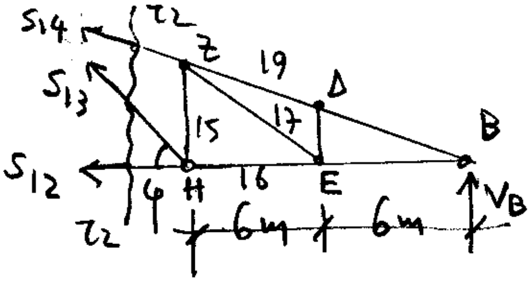
κόμβος Δ: χωρίς εξωτ. φορτία $\Longrightarrow$ $S_{18} = 0$ αφαιρείται

—"— Ε: —"— —"— —"— $\Longrightarrow$ $S_{17} = 0$ αφαιρείται

—"— Ζ: —"— —"— —"— $\Longrightarrow$ $\boxed{S_{15} = 0}$

—"— Η: —"— —"— —"— $\Longrightarrow$ $\boxed{S_{13} = 0}$

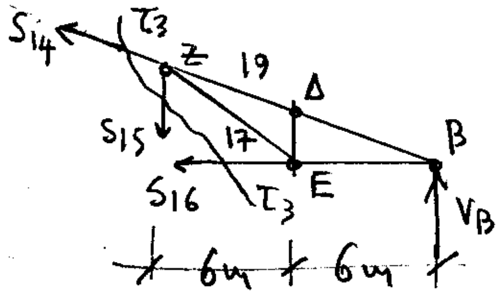
α' τρόπος: Υπολογισμός της S_{13} με τομή Ritter τ_2-τ_2



$$\circlearrowleft + \Sigma(M_i)_B = 0 \text{ ή } -12 \cdot S_{13} \cdot \underbrace{0{,}894}_{\sin\varphi} = 0 \Longrightarrow \boxed{S_{13} = 0}$$

συντρ. S_{12} & S_{14}

Υπολογισμός της S_{15}: με τομή Ritter τ_3-τ_3



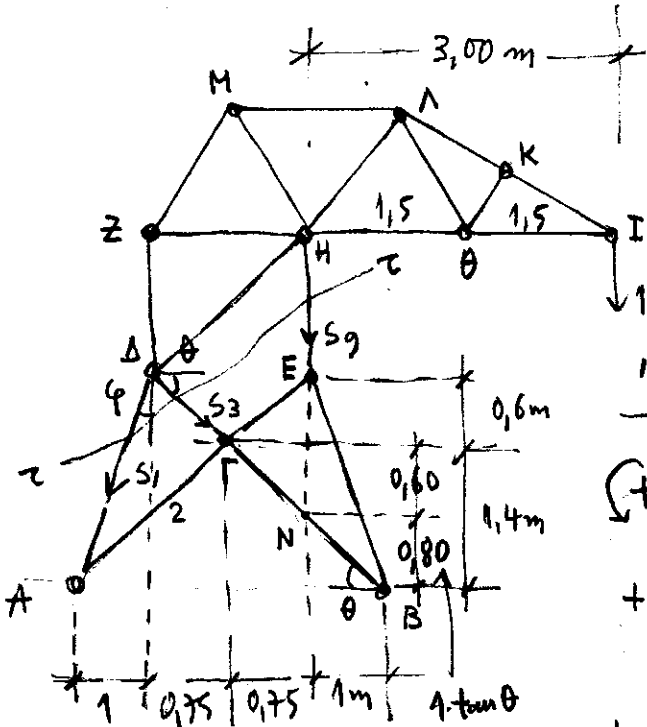
$$\circlearrowleft + \Sigma(M_i)_B = 0 \text{ ή } 12 \cdot S_{15} = 0 \Longrightarrow \boxed{S_{15} = 0}$$

συντρ. S_{14} & S_{16}

4η Άσκηση (α) Στερεώνεται: ΑΔΓΕΒ: τριαρθρωτό τόξο (στερεός φορέας) και σ' αυτό στηρίζεται ο στερεός κλάδος ΔΖΜΛΙΗΔ (τρίγων.) που συνδέεται με το τριαρθρωτό τόξο με την άρθρ. Δ και την δεσμ. ράβδο 9.

Ισοστατικότητα φορέα: $\overset{20}{p}+\overset{4}{r}=\overset{2\cdot 12}{2k}$ ισχύει

Υπολογισμός των S_1 και S_3: με τομή Ritter τ-τ



$\tan\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = 26{,}57^\circ \\ \cos\varphi = 0{,}894 \\ \sin\varphi = 0{,}447 \end{cases}$

$\tan\theta = \frac{0{,}6}{0{,}75}$ (άνω) ή $\frac{2}{2{,}5}$ (κάτω) $= 0{,}8 \Rightarrow \begin{cases} \theta = 38{,}66^\circ \\ \cos\theta = 0{,}781 \\ \sin\theta = 0{,}625 \end{cases}$

Απομόνωση "S_1 στο Δ"

$\circlearrowleft + \Sigma(M_i)_N = 0$ ή $-3\cdot 100 + 1{,}5\cdot S_1\cdot \overset{0{,}894}{\cos\varphi} +$ ← συντρ. S_3 & S_9

$+1{,}2\cdot S_1\cdot \underset{0{,}447}{\sin\varphi} = 0 \Rightarrow \boxed{S_1 = 159{,}80\ kN}$

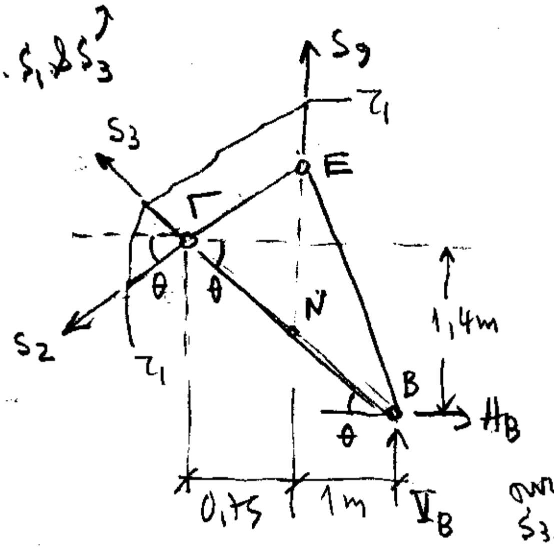
$\xrightarrow{+} \Sigma X_i = 0$ ή $-S_1 \overset{0{,}447}{\sin\varphi} + S_3 \overset{0{,}781}{\cos\theta} = 0$

$\Rightarrow \boxed{S_3 = \frac{159{,}8\cdot 0{,}447}{0{,}781} = 91{,}46\ kN}$

Χρειάζεται την S_2: Υπολογισμός της S_9 - χρειάζεται στην S_2

$\circlearrowleft + \Sigma(M_i)_\Delta = 0$ ή $-1{,}5\cdot S_9 - 4{,}5\cdot 100 = 0 \Rightarrow \boxed{S_9 = -300\ kN}$

συντρ. S_1 & S_3



Υπολογισμός της S_2

Τομή Ritter τ_1-τ_1

Εξισ. Ισορρ. κάτω τμήματος "S_2 στο Γ"

$\circlearrowleft + \Sigma(M_i)_B = 0$ ή $-1\cdot S_9 + 1{,}4\cdot S_2 \overset{0{,}781}{\cos\theta} +$

συντρέχουν S_3, H_B, V_B

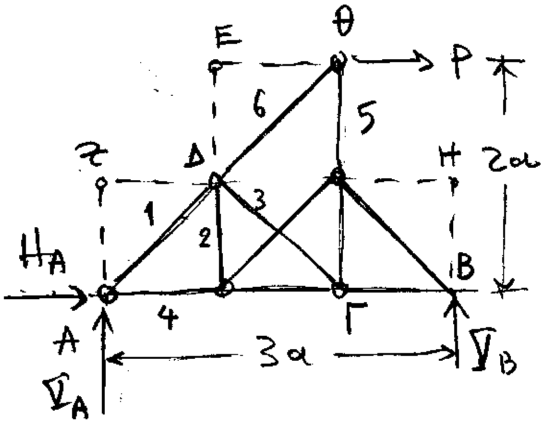
$+1{,}75\cdot S_2 \overset{0{,}625}{\sin\theta} = 0 \Rightarrow$

$\boxed{S_2 = -137{,}16\ kN}$

4η Άσκηση (β) Στερεότητα: 1 στερεός απλός δίσκος (τρίγωνο)

Ισοστατικότητα φορέα: $\overset{17}{p} + \overset{3}{r} = \overset{2\cdot 10}{2\kappa}$ ισχύει $\quad r = 2+1 = 3$

Κανόνας αποκλεισμού d) στους κόμβους Ζ, Ε, Η



Υπολογισμός Αντιδράσεων

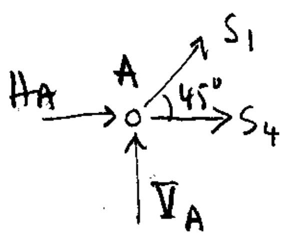
$\xrightarrow{+} \Sigma X_i = 0$ ή $H_A + P = 0 \Rightarrow H_A = -P$

$+\uparrow \Sigma Y_i = 0$ ή $V_A + V_B = 0 \quad (1)$

$\circlearrowleft + \Sigma (M_i)_A = 0$ ή $3\alpha V_B - 2\alpha P = 0 \Rightarrow \boxed{V_B = \frac{2}{3} P}$

$(1) \Rightarrow \boxed{V_A = -\frac{2}{3} P}$

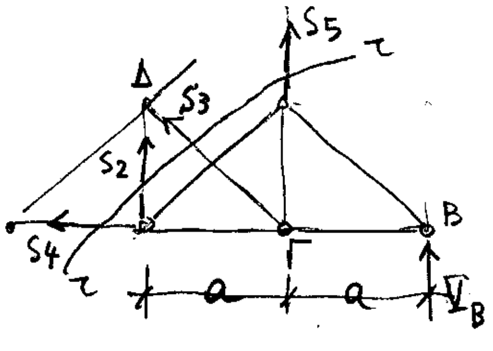
Υπολογισμός S_1 – Ισορροπία κόμβου A



$\Sigma X_i = 0$

$+\uparrow \Sigma Y_i = 0$ ή $S_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + V_A = 0 \Rightarrow \boxed{S_1 = \frac{2\sqrt{2}}{3} P = 0{,}943\, P}$

Υπολογισμός S_2: τομή Ritter τ-τ

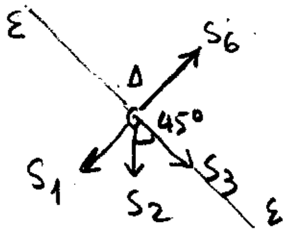


Εξισ. Στατ. Ισορρ. ροπών σημείου:

$\circlearrowleft + \Sigma (M_i)_\Gamma = 0$ ή $-\alpha S_2 + \alpha V_B = 0 \Rightarrow$

σημείο S_4, S_3, S_5 $\quad \boxed{S_2 = V_B = \frac{2}{3} P}$

Υπολογισμός S_3 Ισορροπία κόμβου Δ



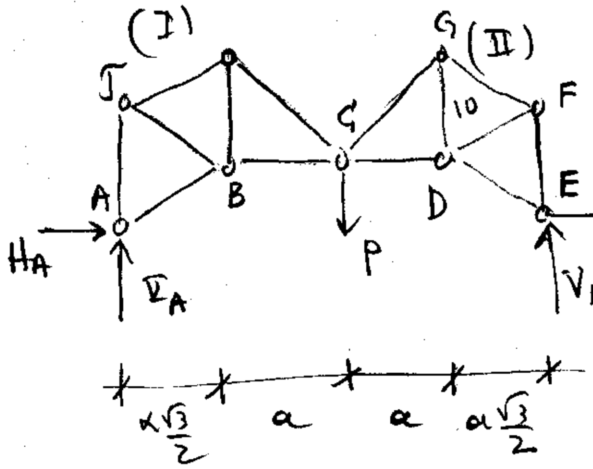
$+\searrow \Sigma F_{i\varepsilon} = 0$ ή $S_3 + S_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow$

$$\boxed{S_3 = -S_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{2}{3}\frac{\sqrt{2}}{2} P = -0{,}471\, P}$$

5η Άσκηση (α)

Τριαρθρωτό τόξο: στερεός φορέας

$\underset{14}{\rho} + \underset{4}{\nu} = \underset{2\cdot 9}{2k}$ ισχύει



Υπολογ. αντιδράσεων

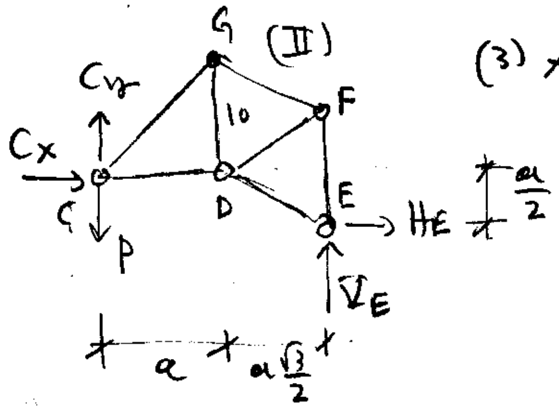
Εξισ. στατ. ισορροπίας:

$\xrightarrow{+} \Sigma X_i = 0 \Rightarrow H_A + H_E = 0 \quad (1)$

$+\uparrow \Sigma Y_i = 0 \Rightarrow V_A + V_E - P = 0 \quad (2)$

$\circlearrowleft + \Sigma (M_i)_A = 0 \Rightarrow -a\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)P + 2a\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)V_E = 0 \quad (3)$

$\circlearrowleft + \Sigma (M_i)^{II}_C = 0 \Rightarrow a\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)V_E + \frac{a}{2}H_E = 0 \quad (4)$



(3) & (4) $\Rightarrow$ $\boxed{H_E = -\frac{P}{2}\,2\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1{,}866\,Pa}$

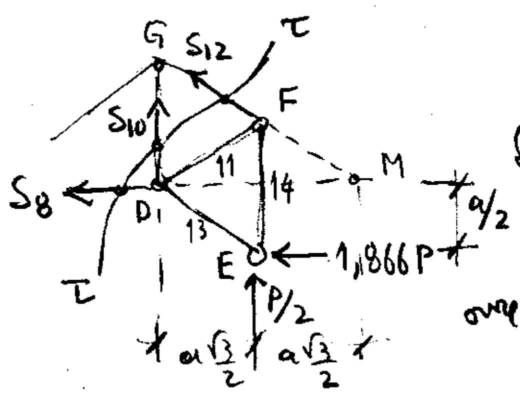
$\boxed{V_E = P/2}$

(1) & (2) $\Rightarrow$ $\boxed{H_A = 1{,}866\,P}$

$\boxed{V_A = \frac{P}{2}}$

Υπολογισμός S_{10}^{GD} τομή Ritter τ-τ

εξισ. ισορρ. δεξιά τμήματος

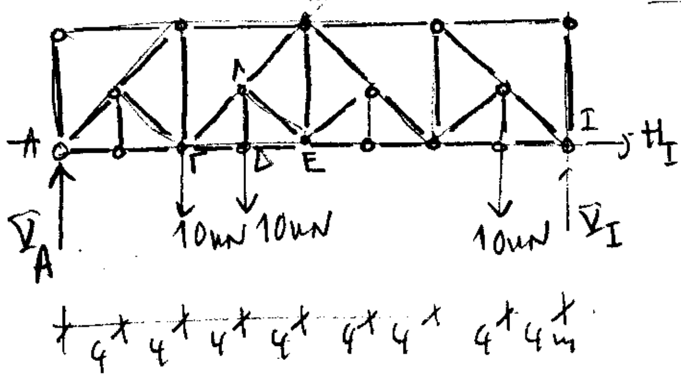


$\circlearrowleft + \Sigma (M_i)_M = 0 \Rightarrow -a\sqrt{3}\,S_{10} - \frac{a}{2}1{,}866P - \frac{a\sqrt{3}}{2}\frac{P}{2} = 0$

συντρ. S_8, S_{12} $\Rightarrow$ $\boxed{S_{10} = -0{,}789\,P}$

5η Άσκηση (b) Απλός Στερεός δίσκος (Τριγων. των επιπ. σχηματισμένο από το μέσον)

• $v = 2H = 3$, • $\overset{33}{p} + \overset{3}{r} = 2\overset{18}{k}$ ισχύει



• Υπολογισμός αντιδράσεων – Εξισ. Ισορροπ.

$\xrightarrow{+} \Sigma X_i = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{H_I = 0}$

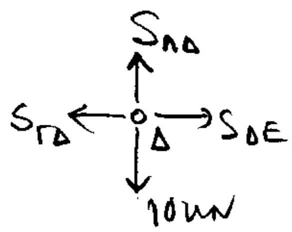
$+\uparrow \Sigma Y_i = 0 \;\Rightarrow\; V_A + V_I = 30\ kN \quad (1)$

$\circlearrowleft + \Sigma (M_i)_I = 0 \;\Rightarrow\; -32 \cdot V_A + 24 \cdot 10 +$

$+ 20 \cdot 10 + 4 \cdot 10 = 0 \longrightarrow \boxed{V_A = 15\ kN}$

$(1) \Rightarrow \boxed{V_I = 15\ kN}$

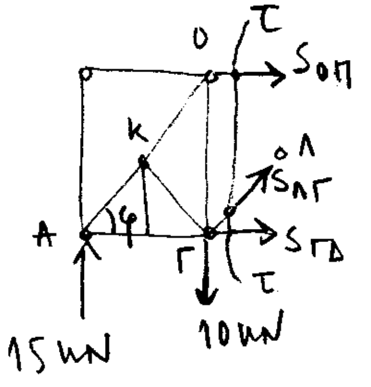
• Υπολογισμός $S_{ΛΔ}$ Ισορρ. κόμβου Δ



$\Sigma X_i = 0$

$+\uparrow \Sigma Y_i = 0 \;\Rightarrow\; S_{ΛΔ} - 10\,kN = 0 \longrightarrow \boxed{S_{ΛΔ} = 10\ kN}$

• Υπολογισμός $S_{ΛΓ}$ Τομή Ritter τ-τ $\tan\varphi = \frac{5}{4} \rightarrow \begin{cases} \varphi = 51{,}34^\circ \\ \cos\varphi = 0{,}625 \\ \sin\varphi = 0{,}781 \end{cases}$



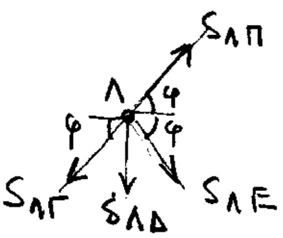
$\Sigma X_i = 0$

$+\uparrow \Sigma Y_i = 0 \;\Rightarrow\; 15 - 10 + S_{ΛΓ} \overset{0{,}781}{\sin\varphi} = 0$

$\Sigma (M_i) = 0$

$\boxed{S_{ΛΓ} = -6{,}402\ kN}$

• Υπολογισμός $S_{ΛΠ}$ Ισορρ. κόμβου Λ



$\xrightarrow{+} \Sigma X_i = 0 \;\Rightarrow\; -S_{ΛΓ}\cos\varphi + S_{ΛΠ}\cos\varphi + S_{ΛΕ}\cos\varphi = 0$

$+\uparrow \Sigma Y_i = 0 \;\Rightarrow\; -S_{ΛΓ}\sin\varphi - S_{ΛΔ} - S_{ΛΕ}\sin\varphi + S_{ΛΠ}\sin\varphi = 0$

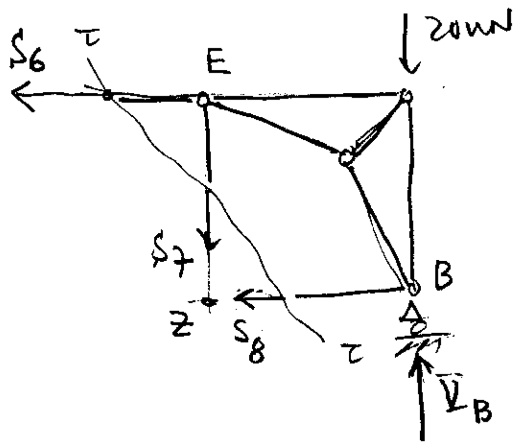
$\left.\begin{array}{l} S_{ΛΠ} + S_{ΛΕ} = -6{,}402 \\ S_{ΛΠ} - S_{ΛΕ} = 6{,}402 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{S_{ΛΠ} = 0}$

-/-

6η Άσκηση (α)

Σύνθετος δίσκος στερεός, από δύο απλώς-στερεούς υποδίσκους που συνδέονται με τρεις ράβδους και όλες περνούν από το ίδιο σημείο. Αντιδράσεις: $r = 2+1 = 3 \leftarrow$ ελάχιστες

- $\overset{13}{\rho} + \overset{3}{\tau r} = \overset{2\cdot 8}{2\kappa}$ ισχύει
- Δεν υπάρχει κόμβος με δύο άγνωστες τάσεις.
- Υπολογίζονται οι αντιδράσεις H_A, V_A, V_B
- Τομή Ritter τ-τ



$+\uparrow \Sigma Y_i = 0 \rightarrow S_7 = \cdots$

$\circlearrowright + \Sigma(M_i)_E = 0 \Rightarrow S_8 = \cdots$

$\circlearrowright + \Sigma(M_i)_Z = 0 \rightarrow S_6 = \cdots$

(ΕΖ όχι ⊥ στον y)

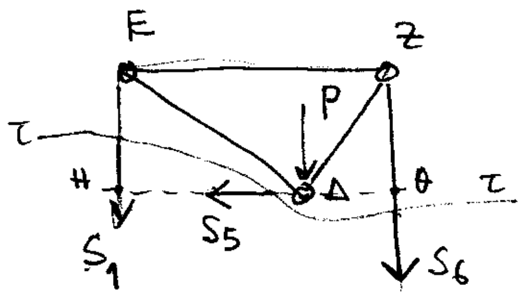
Πέρα υπάρχει σειρά διαδοχικών κόμβων με μόνο 2 άγνωστες τάσεις:

$B \rightarrow H$, $\Delta \rightarrow \Gamma, Z, E$

6η Άσκηση (b)

Τα ίδια όπως η Άσκ. 6(a)

- $\overset{9}{\rho} + \overset{3}{\tau r} = \overset{6}{2\kappa}$ ισχύει
- Δεν υπάρχει κόμβος με 2 άγνωστες τάσεις
- Υπολογίζονται οι αντιδράσεις V_A, H_A, V_B.
- Τομή Ritter τ-τ:



$\Sigma X_i = 0 \Rightarrow S_5 = 0$

$\Sigma(M_i)_H = 0 \Rightarrow S_6 = \cdots$

$\Sigma(M_i)_\Theta = 0 \rightarrow S_1 = \cdots$

(ΗΘ όχι ⊥ στον x)

Πέρα υπάρχει σειρά κόμβων με μόνο 2 άγνωστες τάσεις: Α, Ζ, Γ, Δ.

../..

γ) Στερεότητα: Εξετάζω παραμένει

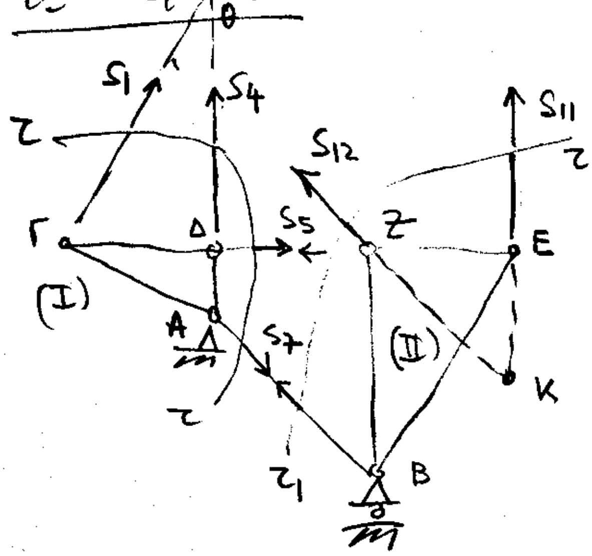
$$\overset{15}{\rho} + \overset{3}{r} = \overset{9}{2k}$$

- Δεν υπάρχει κόμβος με 2 αγνώστες τάσεις.
- Υπολογισμός των αντιδράσεων

- 1ος τρόπος Μέθοδος Henneberg (αντικατάσταση ράβδων)

Αφαιρώ την ράβδο 7 και τοποθετώ ράβδο ανάμεσα στους A και Z. Συνεχίζω κατά τα γνωστά.

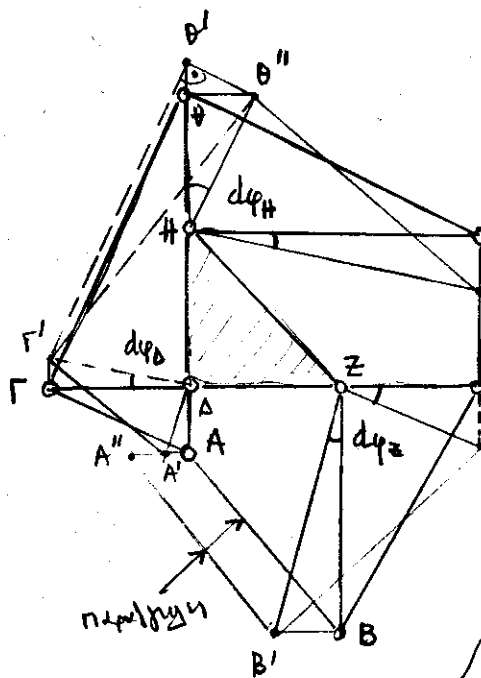
- 2ος τρόπος 2 τομές Ritter



$$\Sigma(M_i)^{(I)}_{\Theta}=0 \rightarrow a_{11} S_5 + a_{12} S_7 = b_1$$
$$\Sigma(M_i)^{(II)}_{K}=0 \rightarrow a_{21} S_5 + a_{22} S_7 = b_2$$
$$\begin{cases} S_5 = \dots \\ S_7 = \dots \end{cases}$$

Τώρα στον κόμβο Β υπάρχουν μόνο 2 αγνώστες τάσεις.

Στερεότητα



Έστω ο ακραίος δίσκος ΔΗΖ ακινητοποιημένος. Αποδεσμεύω προσωρινά τη ράβδο ΑΒ από τον κόμβο Α.

Περιστρέφω τον δίσκο ΔΑΓ περί το Δ κατά $d\varphi_\Delta$.

Λόγω της ράβδου ΔΘ, ο δίσκος ΗΘΙ περιστρέφεται κατά $d\varphi_H$.

Λόγω της ράβδου ΙΕ, ο δίσκος ΖΕΒ περιστρέφεται κατά $d\varphi_Z$.

Αν Α" συμπίπτει με Α' τότε ο δίσκος έχει απειροστή κινητικότητα.

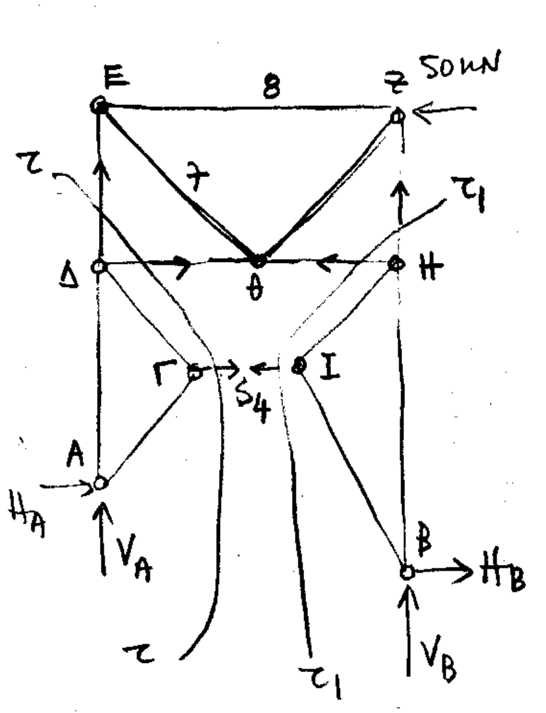
Αν ΑΑ" ≠ ΑΑ' τότε ο δίσκος είναι στερεός.

(ισχύει ότι ΒΒ' = ΑΑ")

6η Άσκηση (δ)

Σχηματίζεται τριαρθρωτό τόξο (ΑΘΓ) (I) & (ΒΗΙ) (II). Η μεταξύ τους άρθρωση είναι δύο δίτιμες ράβδοι: η 4 και ο στερεός κρηπιδός δίσκος (ΔΕΖΗ) που γεφυρώνεται στο άπειρο στην οριζόντια. Το άπειρο στην οριζόντια και τα Α και Β δεν κείνται επ' ευθείας.

- $\overset{14}{\rho}+\overset{4}{\nu}=2\overset{9}{\mu}$ ισχύει
- Δεν υπάρχει κόμβος με δύο άγνωστες τάσεις
- Υπολογισμός των αντιδράσεων μαζί με την S_4



$$\left.\begin{array}{l}
\Sigma X_i=0 \leftrightarrow H_A+H_B-50=0\\
\Sigma Y_i=0 \leftrightarrow V_A+V_B=0\\
\circlearrowleft+\Sigma(M_i)_A=0 \leftrightarrow 6\cdot 50+6V_B+2H_B=0\\
\circlearrowleft+\Sigma(M_i)_H^{\tau,\tau_1}=0 \leftrightarrow -2S_4+6H_B=0\\
\circlearrowleft+\Sigma(M_i)_\Delta^{\tau\tau}=0 \leftrightarrow 2S_4+4H_A=0
\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l}
H_A=150\ kN\\
V_A=16{,}67\ kN\\
H_B=-100\ kN\\
V_B=-16{,}67\ kN\\
S_4=-300\ kN
\end{array}}$$

Τώρα υπάρχουν κόμβοι με 2 άγνωστες τάσεις:

Β−Η, Α−Δ, Γ, Ι, Θ−Ε−Ζ.

--/..

6η Άσκηση (Ε) Στερεότητα δίσκου: είναι "τριαρθρωτό τόξο"

με: μεσαία άρθρωση: Δ

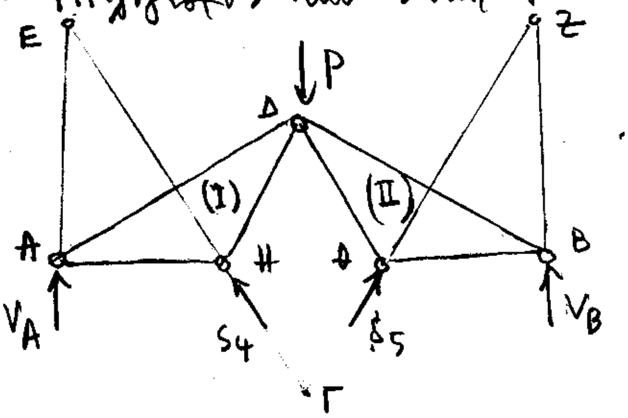
αριστερή άρθρωση: ισοδύναμη τομής V_A & 4 : Ε

δεξιά — " — : -"- -"- V_B & 5 : Ζ

• $\overset{8}{p} + \overset{4}{r} = \overset{2\cdot 6}{2k}$ ισχύει: "ισοστατικός φορέας"

Δεν υπάρχει κόμβος με δύο άγνωστες τάσεις

• Υπολογισμός των αντιδράσεων (και για $H_Γ$, $V_Γ$ δηλαδή των S_4, S_5)



$$\left.\begin{array}{l}\Sigma X_i = 0 \\ \Sigma Y_i = 0\end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} S_4 = .. \\ V_A = .. \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma (M_i)_E^{I} = 0 \\ \Sigma (M_i)_Δ^{II} = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} S_5 = .. \\ V_B = .. \end{array}\right\}$$

• Τώρα υπάρχει σειρά διαδοχικών κόμβων με 2 άγνωστες τάσεις.

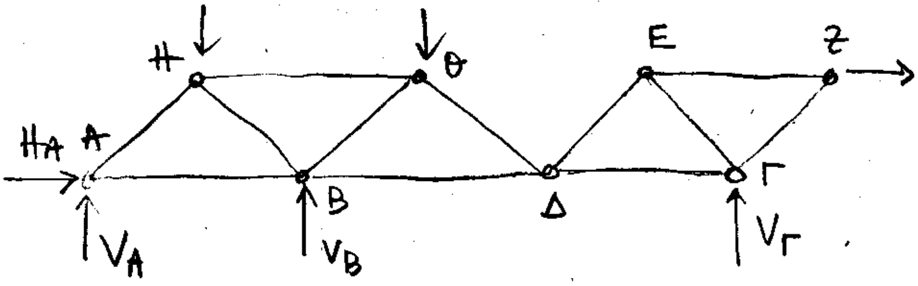
6η Άσκηση (ΣΤ)

Στερεότητα: δοκός Gerber από δύο αρχικούς στερεούς δίσκους $v'=1$, $v: (2+1+1=4) = 3 + v'^{1}$ (υπάρχον, κλειδώματα)

$\overset{12}{p} + \overset{4}{v} = \overset{2\cdot 8}{2k}$ ισχύει

• Υπολογισμός των αντιδράσεων

• Τώρα υπάρχει η εξής σειρά κόμβων με 2 άγνωστες ράβδους:



Ζ – Ε – Γ – Δ – Θ – Η –

– Β – Α