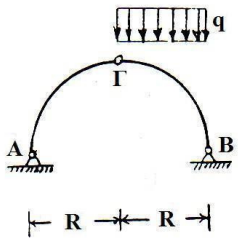
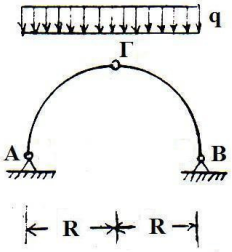
Ε.Μ.Π. - Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.
Τομέας Μηχανικής

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑΤΙΚΗΣ
ΟΜΑΔΑ Δ'

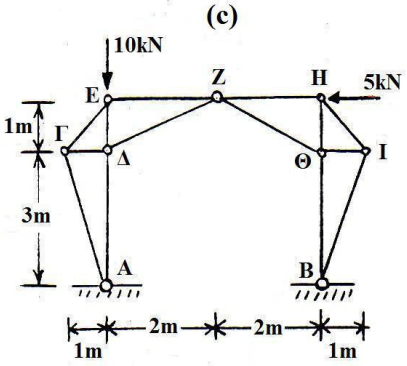
1. Να υπολογισθούν οι αντιδράσεις στηρίξεως των τριαρθρωτών τόξων του σχήματος.



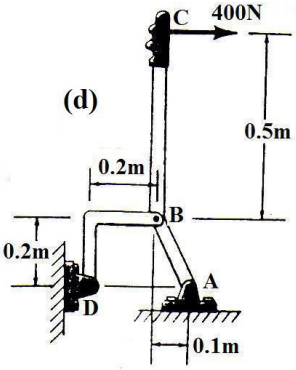
(a)



(b)

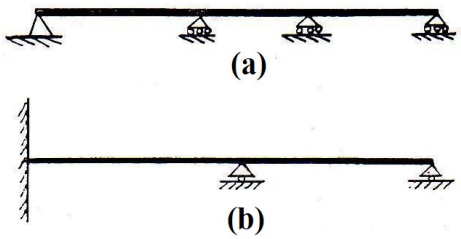


(c)

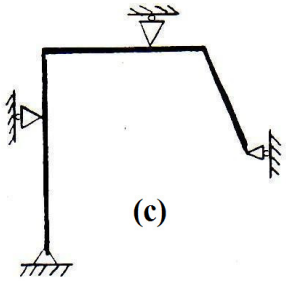


(d)

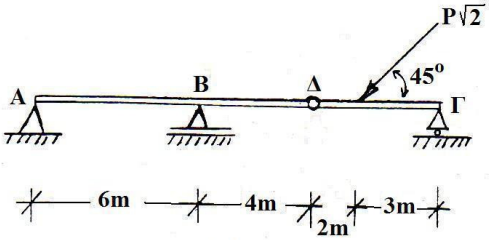
2. Οι φορείς του σχήματος να γίνουν ισοστατικοί με την προσθήκη καταλλήλου αριθμού εσωτερικών αρθρώσεων.


(a)

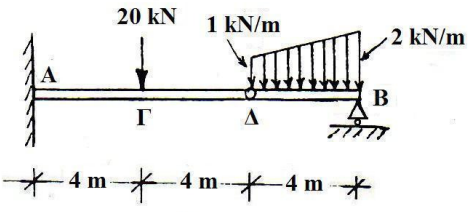
(b)


(c)

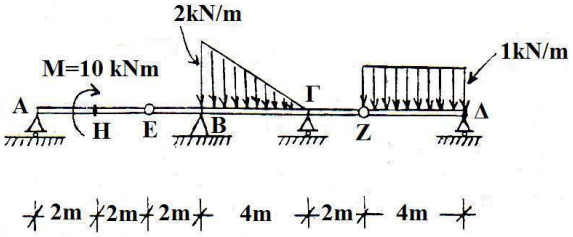
3. Να υπολογισθούν οι αντιδράσεις στηρίξεως των δοκών Gerber του σχήματος.



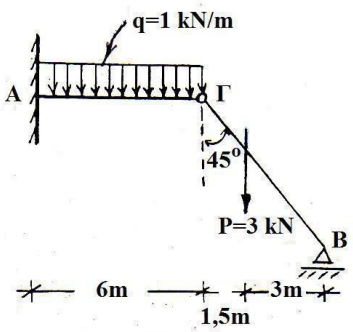
(α)



(β)



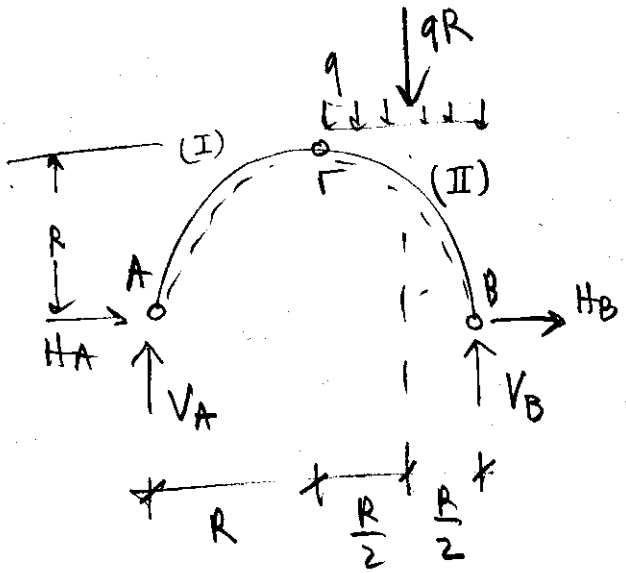
(γ)

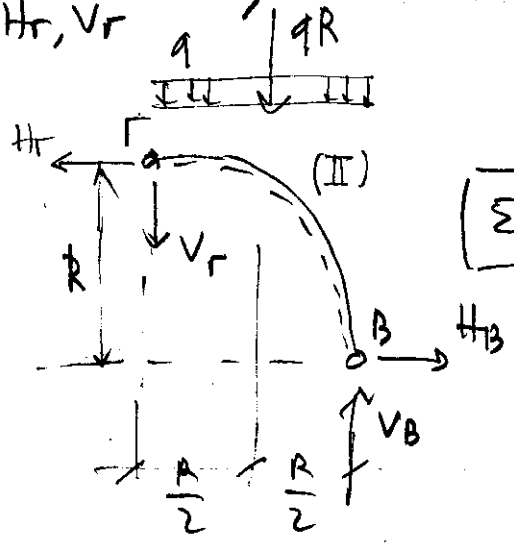


(δ)

1η Άσκηση (9)

$n = 2$ I, II
$r = 2+2$ H_A, V_A, H_B, V_B $\Big\}$ → $r + u = 3 \cdot n$ Ισοστατ. φορέας
$u = 2$ H_Γ, V_Γ





Ex 2

Αδύνατο φορέα

$$\begin{cases} \xrightarrow{+} \Sigma X_i = 0 \text{ ή } H_A + H_B = 0 & (1) \\ +\uparrow \Sigma Y_i = 0 \text{ ή } V_A + V_B - qR = 0 & (2) \\ \curvearrowleft + \Sigma (M_i)_A = 0 \text{ ή } -\frac{3R}{2} qR + 2R V_B = 0 & (3) \\ \curvearrowleft + \Sigma (M_i)^{II}_\Gamma = 0 \text{ ή } -\frac{R}{2} qR + R V_B + R H_B = 0 & (4) \end{cases} \rightarrow \boxed{V_B = \frac{3}{4} qR} \quad \boxed{H_B = -\frac{qR}{4}}$$

Εx 2.

- Οι (3) & (4) : συστημα 2 x 2

(1) → $\boxed{H_A = \frac{qR}{4}}$

(2) → $\boxed{V_A = \frac{qR}{4}}$

Από το Εx 2 $\xrightarrow{+} \Sigma X_i^{II} = 0$ ή $-H_\Gamma + H_B = 0 \Rightarrow \boxed{H_\Gamma = -\frac{qR}{4}}$

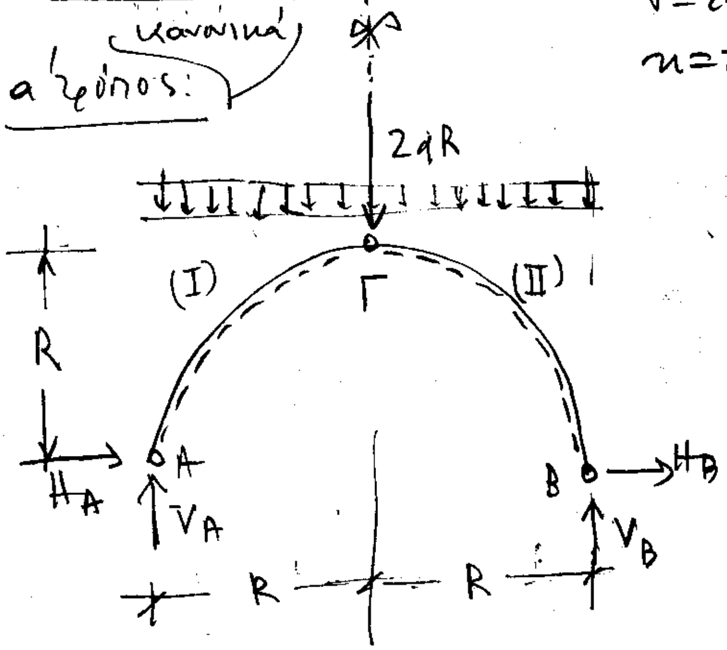
$+\uparrow \Sigma Y_i^{II} = 0$ ή $-V_\Gamma - qR + V_B = 0 \Rightarrow \boxed{V_\Gamma = -\frac{qR}{4}}$

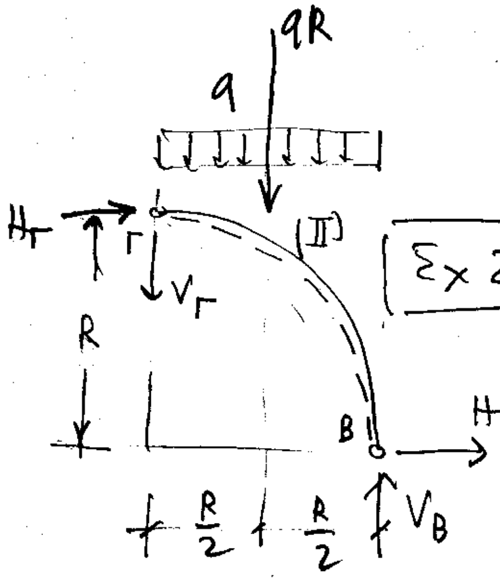
τριαρθρωτό τόξο ⇒ ισοστατικός φορέας

1η Άσκηση β)

α' τρόπος: (κανονικά)

$n=2$
$v=2\cdot2=4$
$u=2$
$\Rightarrow v+u=3n$ ισχύει





Σχ 2

διαγράμματα (στερεό)

$\xrightarrow{+} \Sigma X_i = 0$ ή $H_A + H_B = 0$ (1)

$+\uparrow \Sigma Y_i = 0$ ή $V_A + V_B - 2qR = 0$ (2)

$\circlearrowleft + \Sigma (M_i)_A = 0$ ή $-R\,2qR + 2R\,V_B = 0$ (3)

Σχ 2. $\circlearrowleft + \Sigma (M_i)_Γ^{II} = 0$ ή $-\frac{R}{2}qR + R V_B + R H_B = 0$ (4)

$\Rightarrow$ $H_B = -\frac{qR}{2}$, $V_B = qR$

• (3) & (4) : σύστημα 2×2

(1) ⇒ $H_A = \frac{qR}{2}$

(2) ⇒ $V_A = qR$

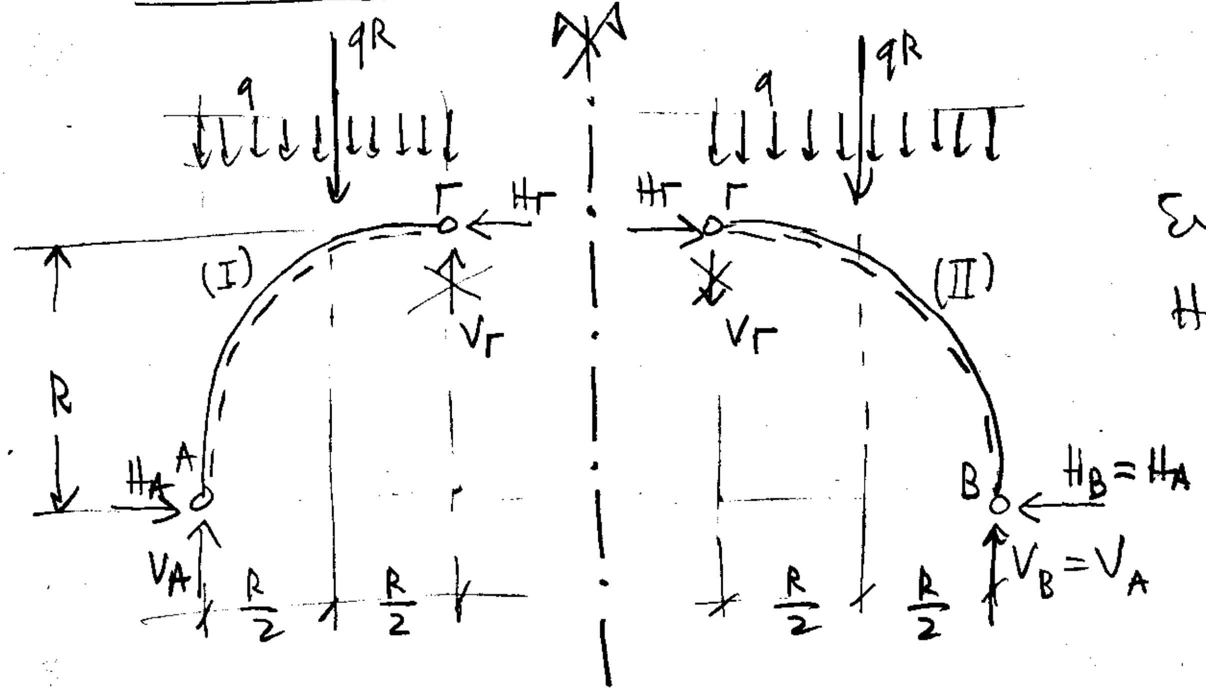
Από το Σχ 2

$\xrightarrow{+} \Sigma X_i^{II} = 0$ ή $H_Γ + H_B = 0 \rightarrow H_Γ = \frac{qR}{2}$

$+\uparrow \Sigma Y_i^{II} = 0$ ή $-V_Γ - qR + V_B = 0 \rightarrow V_Γ = 0$

…/..

β' τρόπος   Εκ χρήσεως συμμετρίας φορέα & φόρτισης



Συμμετρία:
$H_A = H_B$
$V_A = V_B$

Από 3ο νόμο Νεύτωνα ⟹ $V_Γ$ ίσες & αντίθετες } ⟹ $V_Γ = 0$
από συμμετρία ⟹ $V_Γ$ ίσες

όλος ο φορέας
$+\uparrow \Sigma Y_i = 0$ ή $2V_A - 2qR = 0 \Rightarrow \boxed{V_A = V_B = qR}$ ($V_A = V_B$)

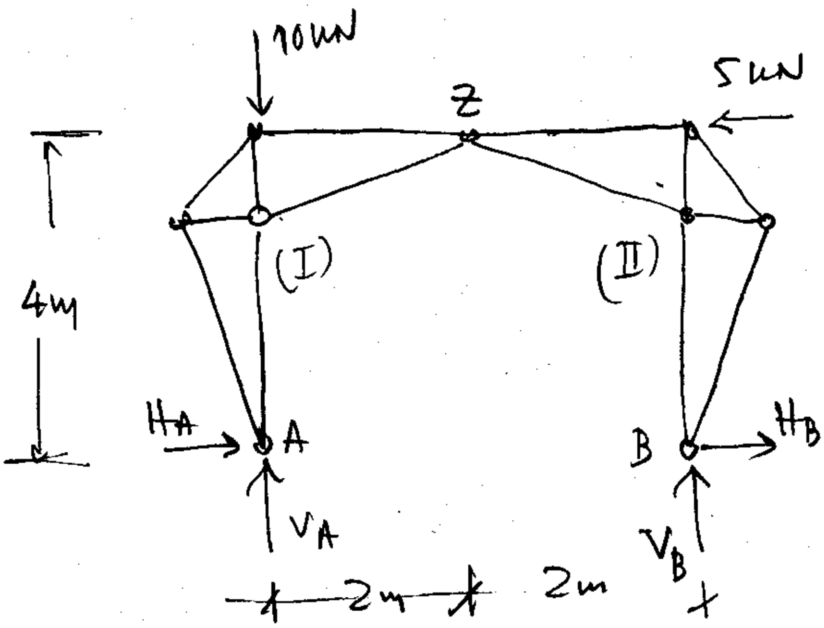
$\Sigma (M_i)^{II}_Γ = 0$ ή $-\frac{R}{2} qR - R H_B + R V_B = 0 \rightarrow \boxed{H_A = H_B = \frac{qR}{2}}$ ($H_B = H_A$, $V_B = V_A = qR$)

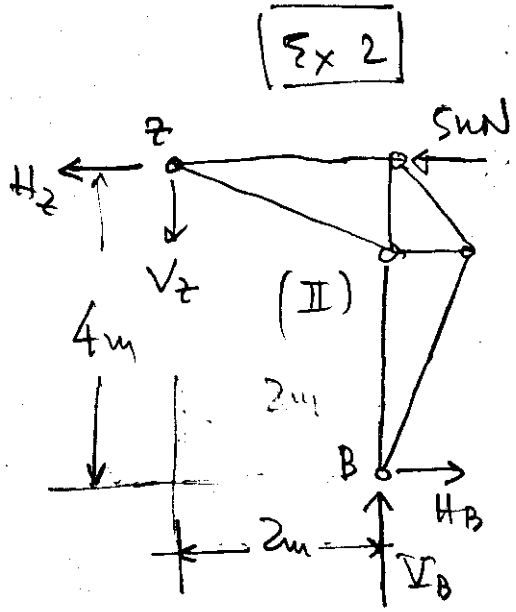
$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma X_i^{II} = 0$ ή $H_Γ - H_B = 0 \rightarrow \boxed{H_Γ = \frac{qR}{2}}$

../..

τριαρθρωτό τόξο ⇒ ισοστατικός φορέας

1η (γ) ($n=2$ $\quad v=2\cdot2=4 \quad u=2$: $v+u=3n$ ισχύει)





όλος φορέας:

$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma X_i = 0$ ή $H_A + H_B - 5 = 0$ (1)

$+\uparrow \ \Sigma Y_i = 0$ ή $V_A - 10 + V_B = 0$ (2)

$\circlearrowleft + \ \Sigma (M_i)_A = 0$ ή $4\cdot5 + 4 V_B = 0$ (3)

Σx2. $\circlearrowleft + \ \Sigma (M_i)_Z^{II} = 0$ ή $2\cdot V_B + 4 H_B = 0$ (4)

⇒ $H_B = 2{,}5$ kN, $V_B = -5$ kN

· (3) & (4) : σύστημα 2×2

(1) ⇒ $H_A = 2{,}5$ kN

(2) ⇒ $V_A = 15$ kN

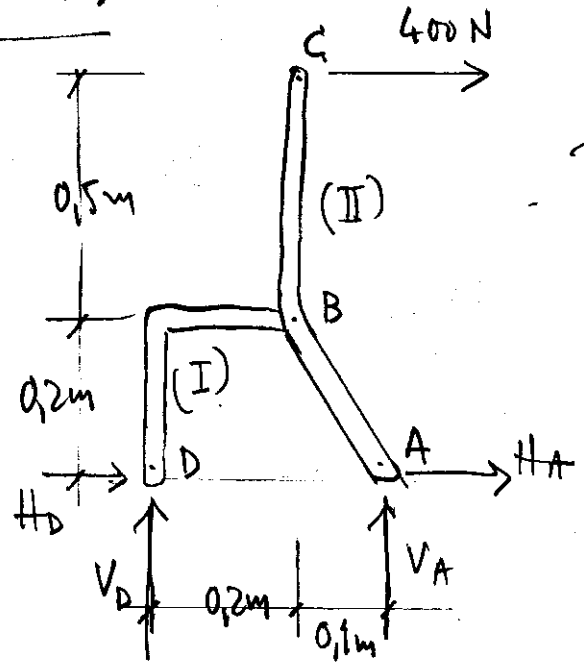
Από το Σx 2 $\overset{+}{\rightarrow} \Sigma X_i^{II} = 0$ ή $-H_Z - 5 + H_B = 0$ ⇒ $H_Z = -2{,}5$ kN

$+\uparrow \Sigma Y_i^{II} = 0$ ή $-V_Z + V_B = 0$ ⇒ $V_Z = -5$ kN

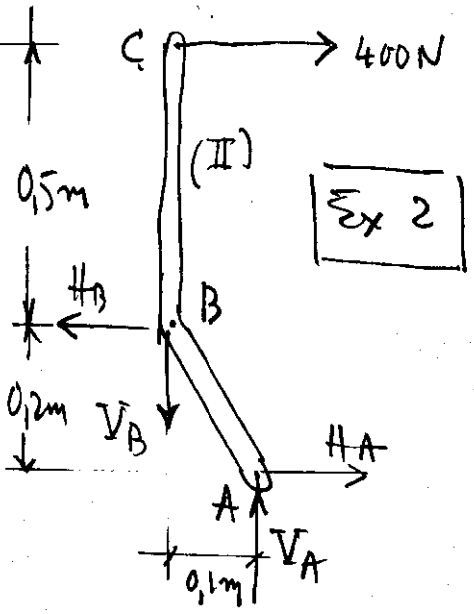
--/..

Άσκηση 4

$\eta = 4$ δ)



$n = 2$
$r = 2 \cdot 2 = 4$
$n = 2$
$\Rightarrow r + n = 3n$ ισχύει!



Αρχή των εργασιών

$$\begin{cases} \pm \rightarrow \Sigma X_i = 0 \text{ η } H_D + H_A + 400 = 0 \quad (1) \\ + \uparrow \Sigma Y_i = 0 \text{ η } V_D + V_A = 0 \quad (2) \\ \circlearrowleft + \Sigma (M_i)_D = 0 \text{ η } -0{,}7 \cdot 400 + 0{,}3\, V_A = 0 \quad (3) \end{cases}$$

Ex 2 $\circlearrowleft + \Sigma (M_i)^{II}_B = 0$ η $-0{,}5 \cdot 400 + 0{,}1\, V_A + 0{,}2\, H_A = 0 \quad (4)$

$\Rightarrow$ $\boxed{H_A = 533\,N}$ $\boxed{V_A = 933\,N}$

• (3) & (4) : συστημα 2×2

(1) → $\boxed{H_D = -933\,N}$

(2) → $\boxed{V_D = -933\,N}$

Από το Ex 2

$\pm \rightarrow \Sigma X^{II}_i = 0$ η $-H_B + H_A + 400 = 0 \rightarrow \boxed{H_B = 933\,N}$

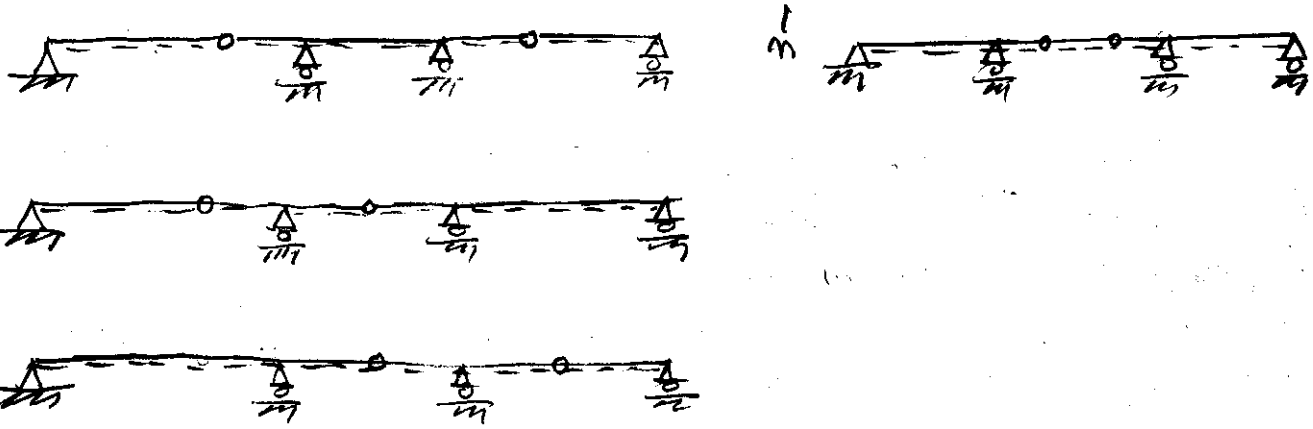
$+ \uparrow \Sigma Y^{II}_i = 0$ η $-V_B + V_A = 0 \Rightarrow \boxed{V_B = 933\,N}$

2ος Άσκηση Σταθερή 2 φορές στατικά αόριστη κατασκευή αρθρώσεων.

Έστω m εσωτερικές αρθρώσεις ⇒
Αριθμός στερεών ραβδωτών: $\eta = m+1$
Αριθμός άγνωστων δυνάμεων ανάδρασης: $u = 2 \cdot m$

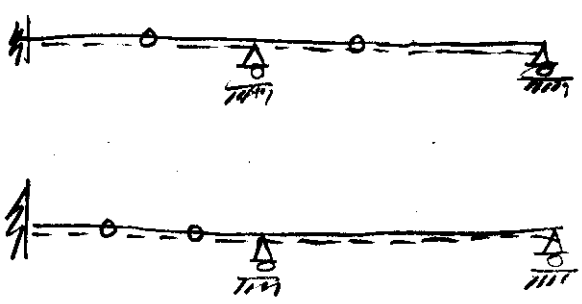
α) αρθρώσεις: 2 — 3 πακτώσεις
$r = 2+1+1+1 = 5$
$\eta = m+1$
$u = 2m$

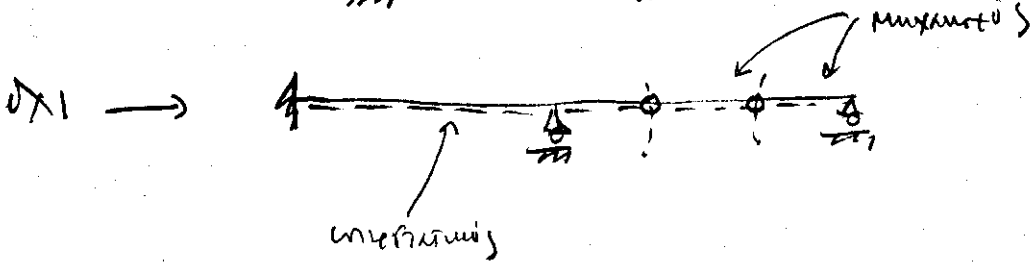
Πρέπει $r+u = 3\cdot\eta$ ή $5 + 2\cdot m = 3(m+1)$
$\Rightarrow$ $m = 2$ εσωτερικές αρθρώσεις



β) πλήστων: 3 — 2 πακτώσεις
$r = 3+1+1 = 5$
$\eta = m+1$
$u = 2m$

Πρέπει $r+u = 3\eta$ ή $5+2m = 3(m+1)$
$\Rightarrow$ $m = 2$ εσωτερικές αρθρώσεις





γ) $r = \underbrace{2}_{\text{2 εδ.}} + \overbrace{1+1+1}^{\text{3 υγρίνια}} = 5$

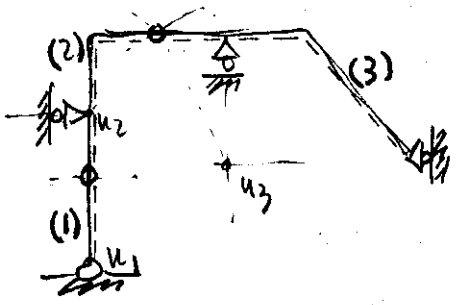
$\eta = m+1$

$n = 2m$

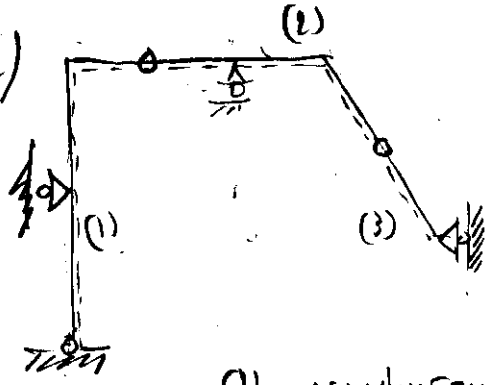
Τελικά $\boxed{r+n=3\eta}$ ή $5+2m=3(m+1) \Rightarrow$

$\boxed{m=2}$ βαθμός στατικής αοριστίας

(c)



(a)



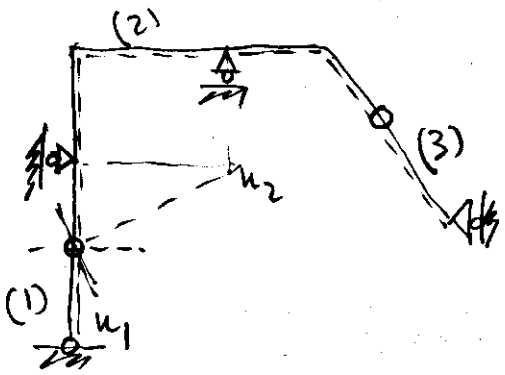
(1) αφαιρούμε

στο (a):

1ος τρόπος: μπαίνει (1) μετά (2) και μετά όλα με το (3)

2ος τρόπος: μπαίνει (3) μετά (2) και μετά όλα με το (1)

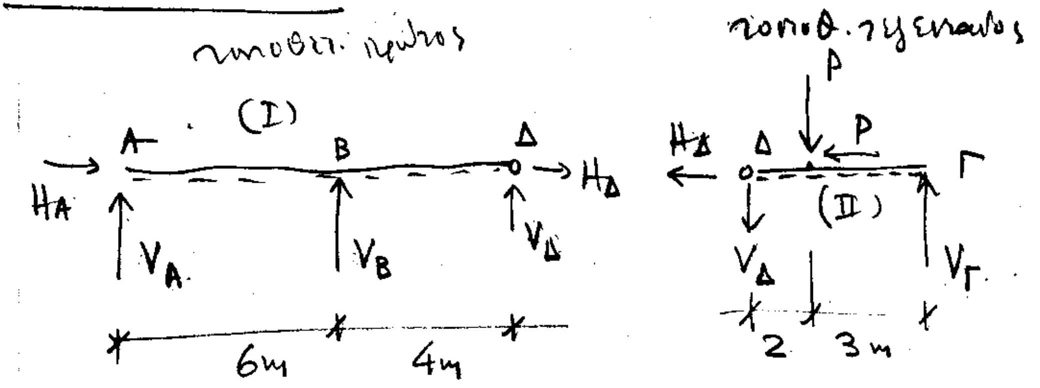
(b)



(1) & (2): ριζοθερμικό νόμο

3η Άσκηση α)

Απλώς πλαίσιο & ...



$r = 4$ $H_A, V_A, V_B, V_Γ$

$u = 2$ $H_Δ, V_Δ$

$n = 2$ I, II

$r + u = 3 \cdot n$ ισχύει!

- Απλός υποδοχή (II): υποθετικός γερβαυλς — λύεται πρώτος
Εξισ. στατ. ισορροπ.

$\xrightarrow{+} \ \Sigma X_i = 0 \ ή \ -H_Δ - P = 0 \Rightarrow \boxed{H_Δ = -P}$ (1)

$+\uparrow \ \Sigma Y_i = 0 \ ή \ -V_Δ - P + V_Γ = 0 \Rightarrow \boxed{V_Δ = -P + V_Γ = -\frac{3}{5}P}$ (2)

$\circlearrowleft + \ \Sigma (M_i)_Δ = 0 \ ή \ -2P + 5V_Γ = 0 \Rightarrow \boxed{V_Γ = \frac{2}{5}P}$

Απλός υποδοχή (I): υποθετικός πρόβολος — δέχεται γερβαυλς
Εξισ. στατ. ισορροπ.

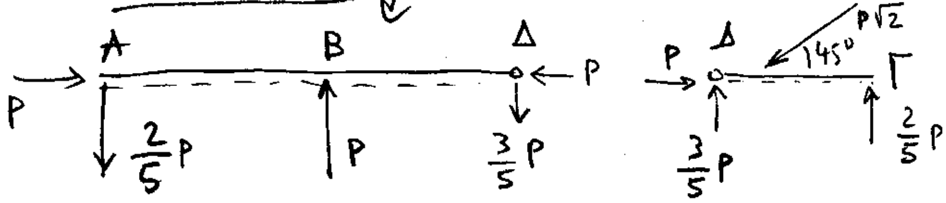
$\xrightarrow{+} \ \Sigma X_i = 0 \ ή \ H_A + H_Δ = 0 \xrightarrow{(1)} \boxed{H_A = P}$

$+\uparrow \ \Sigma Y_i = 0 \ ή \ V_A + V_B + V_Δ = 0$ (3)

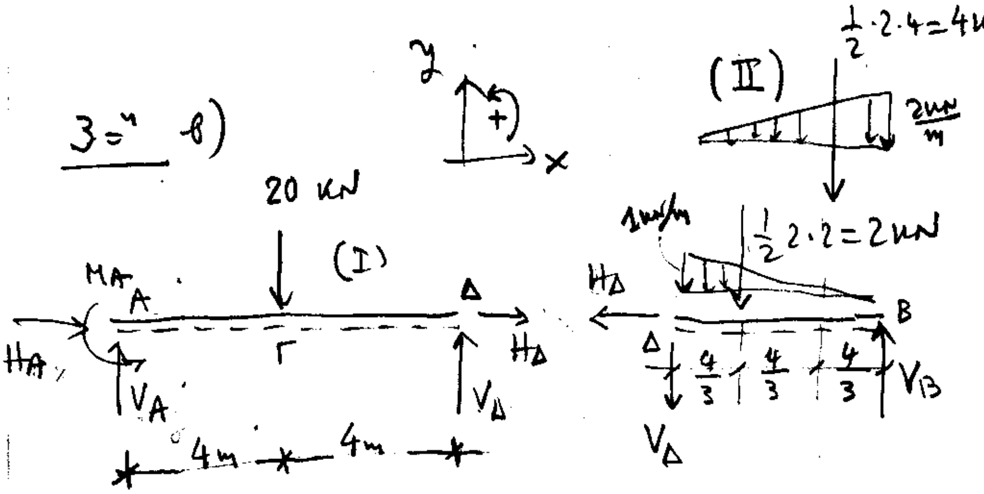
$\circlearrowleft + \ \Sigma (M_i)_A = 0 \ ή \ 6V_B + 10V_Δ = 0 \Rightarrow \boxed{V_B = -\frac{10}{6} V_Δ \overset{(2)}{=} P}$

$(3) \Rightarrow \boxed{V_A = -V_B - V_Δ = -P + \frac{3}{5}P = -\frac{2}{5}P}$

Αποτέλεσμα:



3ο β)



Δίτμητος ένδοσις δ μηχανισμός

$r = 3+1 : H_A, V_A, M_A, V_B$

$u = 2 : H_\Delta, V_\Delta$

$n = 2 : I, II$

$r + u = 3\cdot n$ ισχύει.

- Απλός (υπο)δίσκος (II): τοποθετούμε τελευταίος – λύνεται πρώτος

  Εξισ. Στατ. Ισορροπ.

$\xrightarrow{+} \Sigma X_i = 0 \;\; \dot{\imath}\;\; -H_\Delta = 0 \rightarrow \boxed{H_\Delta = 0}$ (1)

$+\uparrow \Sigma Y_i = 0 \;\; \dot{\imath}\;\; -V_\Delta - 2 - 4 + V_B = 0 \Rightarrow \boxed{V_\Delta = V_B - 6 = -2{,}667\,kN}$ (2)

$\circlearrowleft + \Sigma (M_i)_\Delta = 0 \;\; \dot{\imath}\;\; -\frac{4}{3}\cdot 2 - \frac{8}{3}\, 4 + 4\cdot V_B = 0 \rightarrow \boxed{V_B = 3{,}333\,kN}$

- Απλός (υπο)δίσκος (I): τοποθετούμε πρώτος – λύνεται τελευταίος

$\xrightarrow{+} \Sigma X_i = 0 \;\; \dot{\imath}\;\; H_A + H_\Delta = 0 \Rightarrow \boxed{H_A = -H_\Delta = 0}$ ← (1)

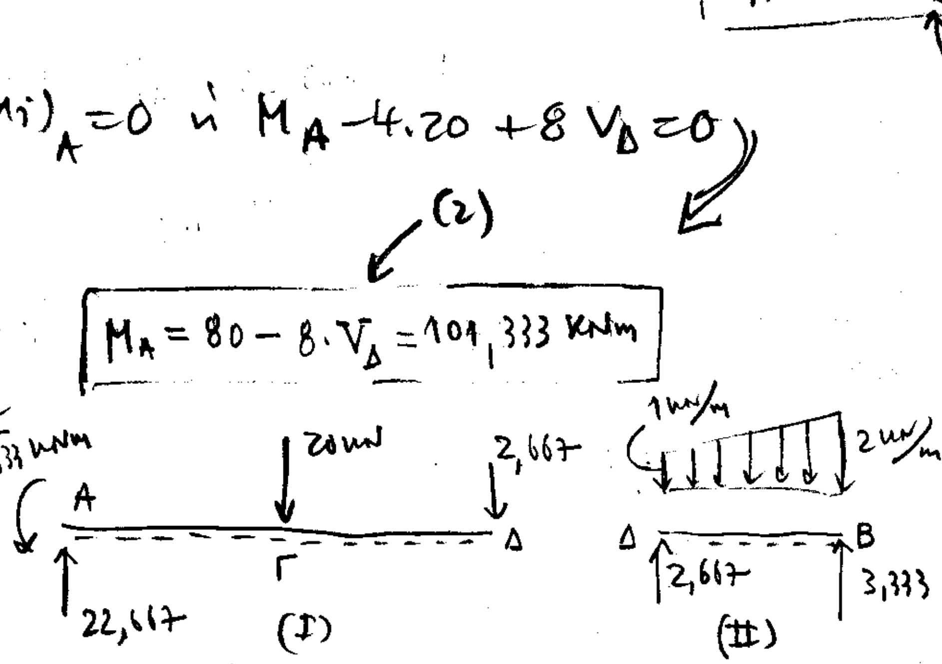
$+\uparrow \Sigma Y_i = 0 \;\; \dot{\imath}\;\; V_A - 20 + V_\Delta = 0 \Rightarrow \boxed{V_A = 20 - V_\Delta = 22{,}667\,kN}$ ← (2)

$\circlearrowleft + \Sigma (M_i)_A = 0 \;\; \dot{\imath}\;\; M_A - 4\cdot 20 + 8\,V_\Delta = 0$

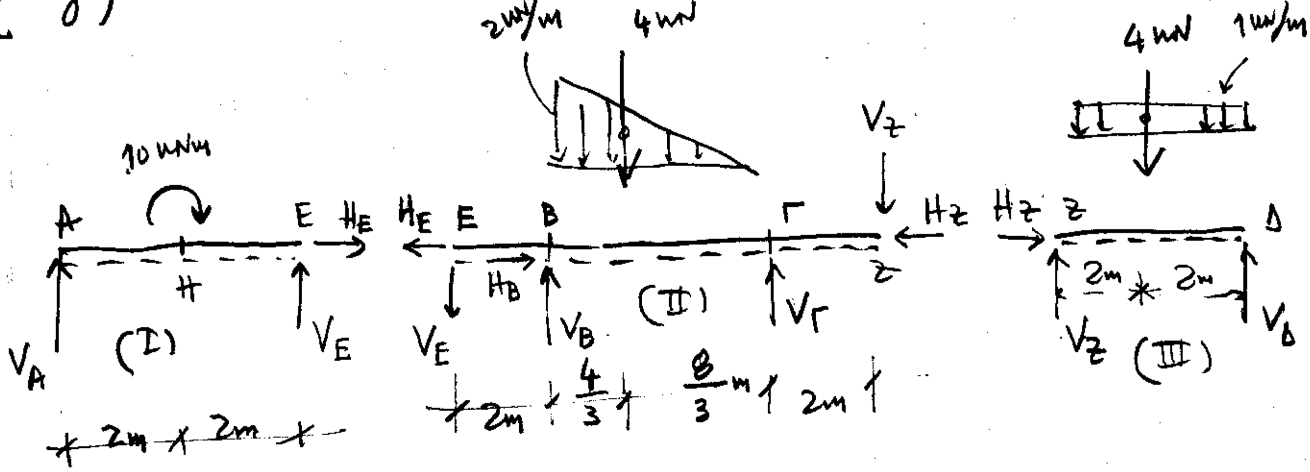
(2) ↙

$\boxed{M_A = 80 - 8\cdot V_\Delta = 101{,}333\,kNm}$

Αποτέλεσμα



3=η γ) δίσκος σύνθετος και μηχανισμός



$r = 1+2+1+1 = 5$: $V_A, H_B, V_B, V_Γ, V_Δ$

$n = 2\times 2 = 4$ H_E, V_E, H_Z, V_Z

$m = 3$ I, II, III

$\}$ $r+n = 3\cdot m$ ισχύει

- Απλός υποδίσκος (III): τοποθετ. τελευταίος – λύνεται 1ος
  Εξισ. στατ. ισορρ.

$\xrightarrow{+} \Sigma X_i = 0 \Rightarrow$ $\boxed{H_Z = 0}$

$+\uparrow \Sigma Y_i = 0 \Rightarrow V_Z + V_Δ - 4\,kN = 0$ (1)

$\circlearrowleft + \Sigma (M_i)_Z = 0 \Rightarrow -2\cdot 4 + 4V_Δ = 0 \Rightarrow$ $\boxed{V_Δ = 2\,kN}$

(1) $\Rightarrow$ $\boxed{V_Z = 4 - V_Δ = 2\,kN}$

- Απλός υποδίσκος (I): τοποθετήθηκε 2ος – λύνεται 2ος
  Εξισ. στατ. ισορροπ.

$\xrightarrow{+} \Sigma X_i = 0 \Rightarrow$ $\boxed{H_E = 0}$

$+\uparrow \Sigma Y_i = 0 \Rightarrow V_A + V_E = 0$ (2)

$\circlearrowleft + \Sigma (M_i)_A = 0 \Rightarrow -10\,kNm + 4V_E = 0 \Rightarrow$ $\boxed{V_E = 2{,}5\,kN}$

(2) $\Rightarrow$ $\boxed{V_A = -2{,}5\,kN}$

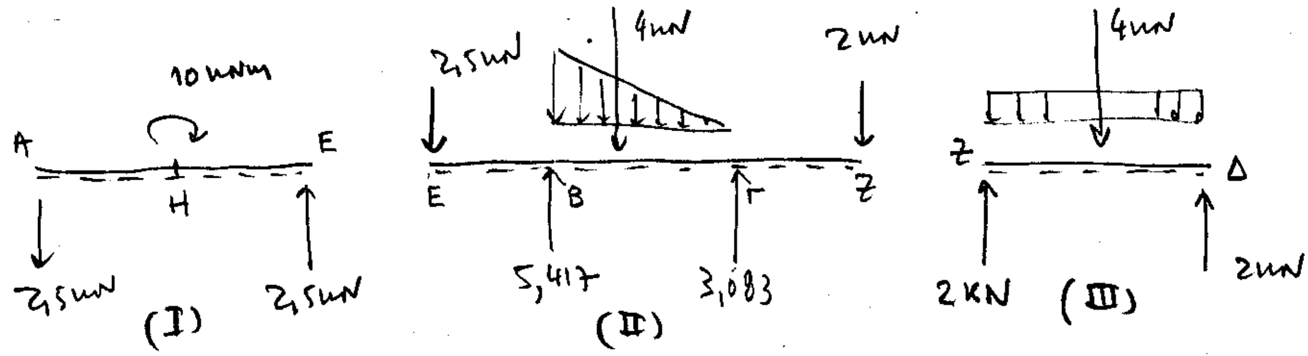
• Απλοσ(υπο)δοκός (ΙΙ): τοποθετούμε 1ος – λύνεται τελευταίος
Εξισ. στατ. ισορροπ.

$\xrightarrow{+} \Sigma X_i = 0 \Rightarrow -H_E + H_B - H_Z = 0 \longrightarrow \boxed{H_B = 0}$

$+\uparrow \Sigma Y_i = 0 \Rightarrow -V_E + V_B - 4 + V_\Gamma - V_Z = 0 \Rightarrow V_B + V_\Gamma = V_E + 4 + V_Z = 8{,}5\,kN \quad (3)$

$\circlearrowleft + \Sigma (M_i)_B = 0 \Rightarrow 2\,V_E - \frac{4}{3}\cdot 4 + 4\cdot V_\Gamma - 6\cdot V_Z = 0 \Rightarrow \boxed{V_\Gamma = 3{,}083\ kN}$

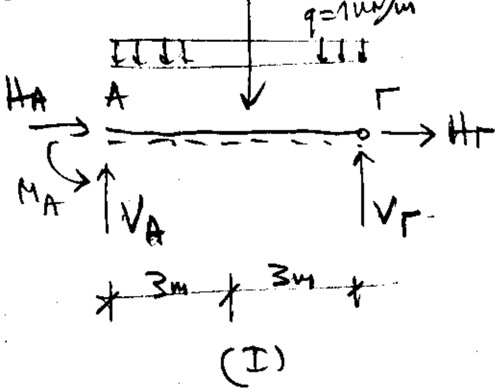
$(3) \Rightarrow \boxed{V_B = 5{,}417\ kN}$

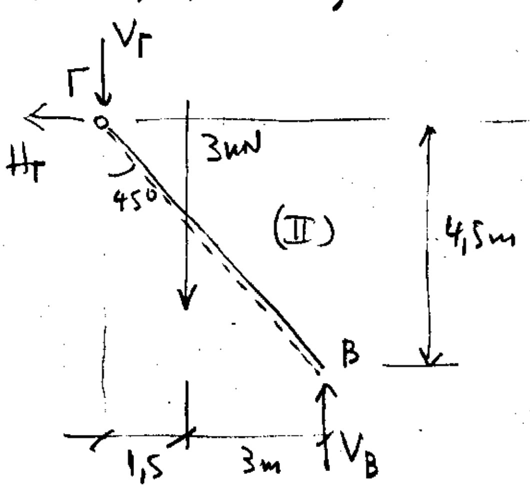


3-η Γ)

$\eta = 2$ Ι, ΙΙ
$\nu = 2$ H_Γ, V_Γ
$r = 4$ H_A, V_A, M_A, V_B

$r + \nu = 3\eta$ ✓





(αφαίρεση)

• Απλός (υπο)δίσκος (ΙΙ): υποστηρίχθηκε ισοστατικώς — λύνεται 1-ος
Εξισ. Στατ. Ισορροπ.

$\xrightarrow{+} \Sigma X_i = 0$ ⇒ $-H_\Gamma = 0 \Rightarrow \boxed{H_\Gamma = 0}$ (1)

$+\uparrow \Sigma Y_i = 0$ ⇒ $-V_\Gamma - 3 + V_B = 0$ (2)

$\circlearrowleft + \Sigma (M_i)_\Gamma = 0$ ⇒ $-1{,}5 \cdot 3 + 4{,}5\, V_B = 0 \Rightarrow \boxed{V_B = 1 \text{ kN}}$

(2) ⇒ $\boxed{V_\Gamma = -2 \text{ kN}}$ (3) (πρόσημο)

• Απλός (υπο)δίσκος (Ι): υποστηρίχθηκε 1-ος — λύνεται ισοστατικός
Εξισ. Στατ. Ισορροπ.

$\xrightarrow{+} \Sigma X_i = 0$ ⇒ $H_A + H_\Gamma = 0 \xrightarrow{(1)} \boxed{H_A = 0}$

$+\uparrow \Sigma Y_i = 0$ ⇒ $V_A - 6 + V_\Gamma = 0 \Rightarrow \boxed{V_A = 6 - V_\Gamma = 8 \text{ kN}}$ (3)

$\circlearrowleft + \Sigma (M_i)_A = 0$ ⇒ $M_A - 3 \cdot 6 + 6 V_\Gamma = 0$

$\boxed{M_A = 18 - 6V_\Gamma = 30 \text{ kNm}}$ (3)