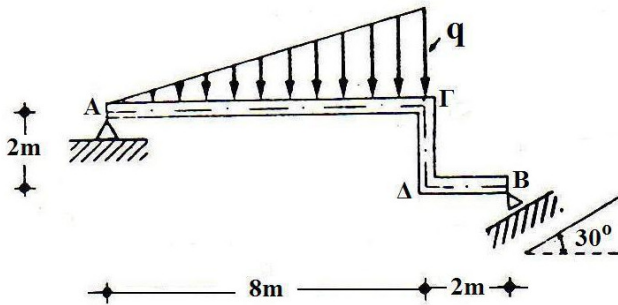
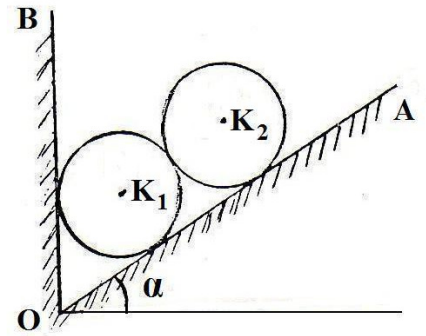
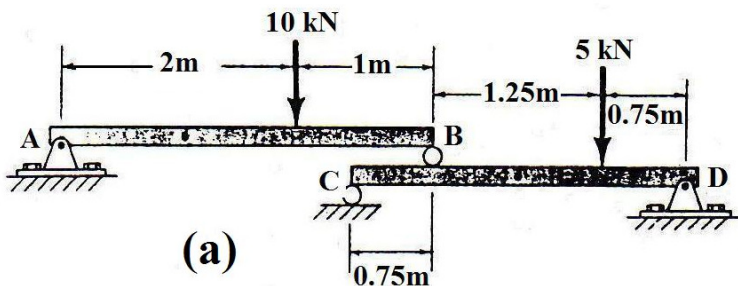


1. Δύο όμοιοι κύλινδροι K_1 και K_2 , βάρους Q ο καθένας, βρίσκονται επάνω στο κεκλιμένο επίπεδο OA . Ο κύλινδρος K_2 ακουμπά στον K_1 , ο οποίος στηρίζεται στον κατακόρυφο τοίχο OB , όπως στο σχήμα. Όλες οι επιφάνειες επαφής είναι λείες (δεν υπάρχει τριβή). Να υπολογιστούν οι αντιδράσεις από το κεκλιμένο επίπεδο και τον τοίχο επί των δύο κυλίνδρων για την κατάσταση αυτή της ισορροπίας τους.

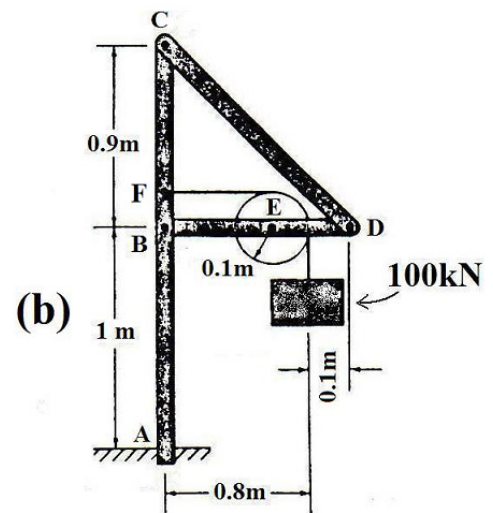


2. Ο ραβδωτός φορέας του σχήματος έχει ίδιο βάρος $w = 2 \text{ kN/m}$ και δέχεται την επίδραση του τριγωνικά κατανομημένου φορτίου με μέγιστη ένταση $q = 12 \text{ kN/m}$. Ο φορέας στηρίζεται στο A με άρθρωση και στο B με κύλιση της οποίας το επίπεδο σχηματίζει γωνία 30° με την οριζόντια διεύθυνση. Να προσδιοριστούν οι αντιδράσεις στήριξης.

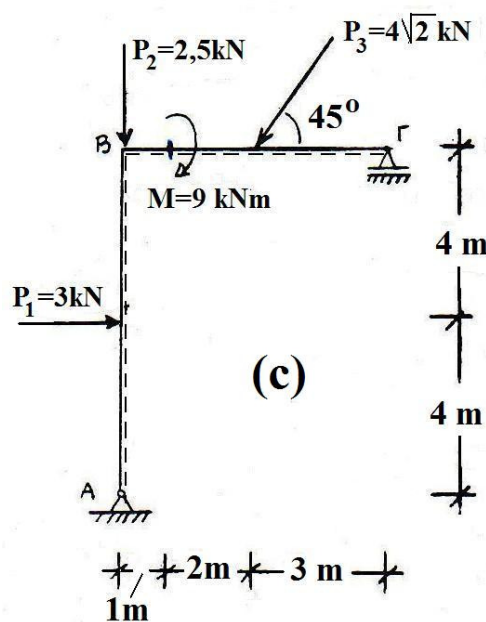
3. Να υπολογιστούν οι αντιδράσεις στήριξης των φορέων των παρακάτω σχημάτων.



(a)

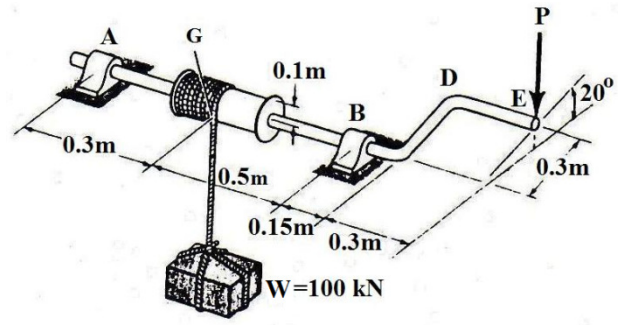


(b)



(c)

4. Να υπολογιστεί η κατακόρυφη δύναμη P ώστε ο περιστρεφόμενος μοχλός να ισορροπεί στη θέση που φαίνεται στο σχήμα.



ΛΥΣΕΙΣ

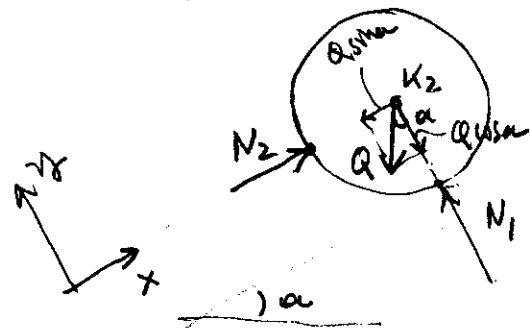
1^η Άσκηση

K2:

"Έπειτα επιλέγουμε K_2, K_1 ανώτερα ή ίσα σε σχέση των τοποθετώμενων K_1, K_2 "

3 δυνάμεις που δέχεται από το ίδιο σημείο:
"ως γυμνό σημείο" \rightarrow

• 2 ελαστικές εστ. ισορροπίας:

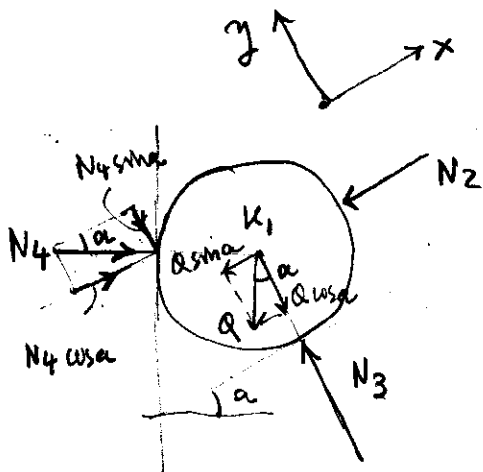


$$\begin{aligned} \rightarrow \Sigma F_x = 0 \text{ ή } N_2 - Q \sin \alpha &= 0 \rightarrow N_2 = Q \sin \alpha \\ \uparrow \Sigma F_y = 0 \text{ ή } N_1 - Q \cos \alpha &= 0 \rightarrow N_1 = Q \cos \alpha \end{aligned}$$

K1:

4 δυνάμεις που δέχεται από το ίδιο σημείο:
"ως γυμνό σημείο" \rightarrow

• 2 ελαστικές εστ. ισορροπίας:



$$\rightarrow \Sigma F_x = 0 \text{ ή } N_4 \cos \alpha - Q \sin \alpha - N_2 = 0 \quad (1)$$

$$\uparrow \Sigma F_y = 0 \text{ ή } -N_4 \sin \alpha - Q \cos \alpha + N_3 = 0 \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow N_4 \cos \alpha = Q \sin \alpha + Q \sin \alpha \Rightarrow N_4 = 2Q \tan \alpha$$

$$(2) \Rightarrow N_3 = N_4 \sin \alpha + Q \cos \alpha = 2Q \tan \alpha \cdot \sin \alpha + Q \cos \alpha$$

$$\text{ή } N_3 = Q \left(\underbrace{2 \tan \alpha \cdot \sin \alpha + \cos \alpha}_{\frac{2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha}} \right) = Q \frac{\sin^2 \alpha + 1}{\cos \alpha}$$

* ελαστικές & αμμοί

$n = 2$ κλίμακες

$v = 3$ N_1, N_3, N_4

$u = 1$ N_2

λογικά η

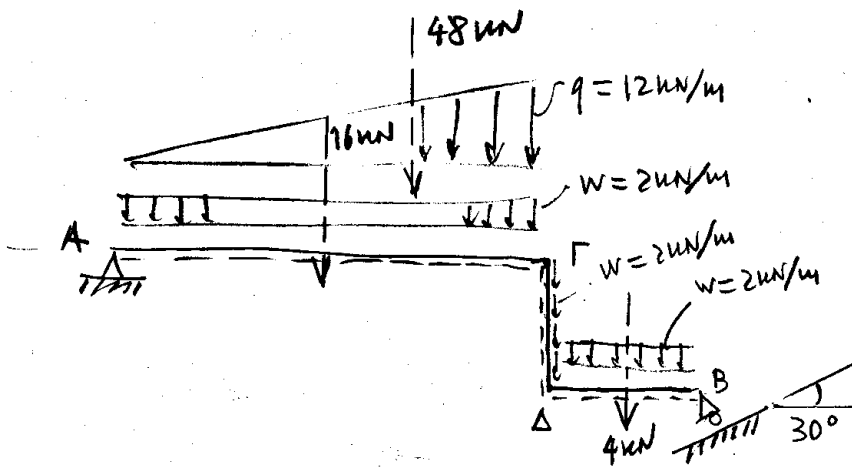
$$v + u = 2n$$

$\frac{3}{\text{αμμοί}} + \frac{1}{\text{ελαστική}} = \frac{2 \cdot 2}{\text{ελαστική}}$

εξίσωση ισορροπίας

2^η Άσκηση:

ΑΓΔΒ κλίσης-οριζών άξονας



$H_A, V_A, R_B: \nu = 3:1$ οριζών άξονας

• Τμήμα ΑΓ

Συνισταμένη: $\frac{1}{2} q l = \frac{1}{2} 12 \cdot 8 = 48 \text{ kN}$
 στα $\frac{2}{3}$ της ΑΓ

• 1^ο τμήμα ΑΓ σταθερό

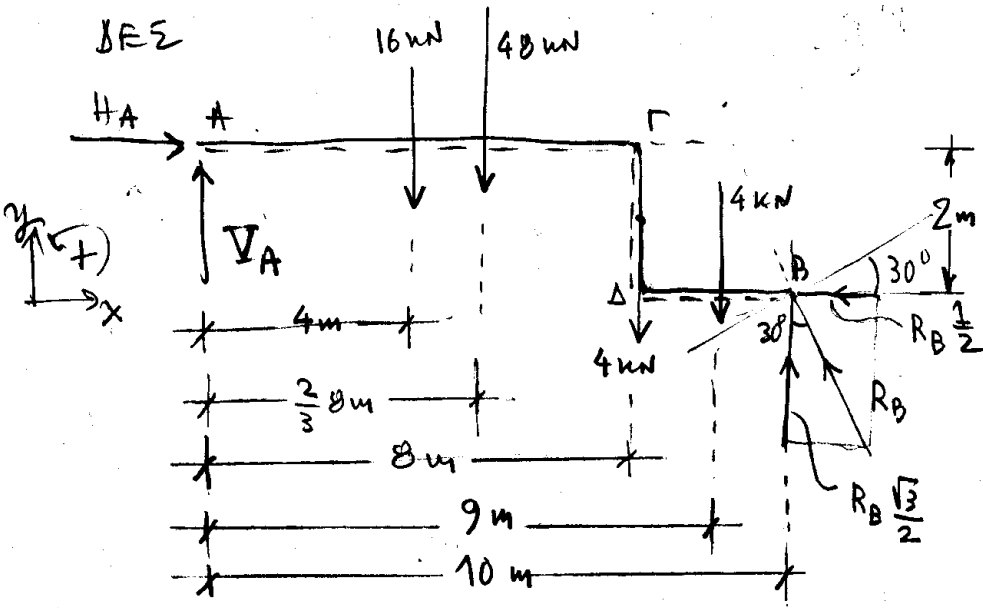
Συνισταμένη: $w \cdot 8 = 16 \text{ kN}$
 στο μέσο της ΑΓ

• 1^ο τμήμα ΓΔ σταθερό

Συνισταμένη $w \cdot 2 = 4 \text{ kN}$
 στο μέσο της ΓΔ

• 1^ο τμήμα ΔΒ: κλίση

Συνισταμένη $w \cdot 2 = 4 \text{ kN}$
 στο μέσο της ΔΒ.



Οι άξονες που διέρχονται από το κέντρο της έσοδος είναι

3 εξισώσεις ισορροπίας:
 (σταθερές)

$\rightarrow \sum X_i = 0 \Rightarrow H_A - R_B \frac{1}{2} = 0 \quad (1)$

$\uparrow \sum Y_i = 0 \Rightarrow V_A - 16 - 48 - 4 - 4 + R_B \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \quad (2)$

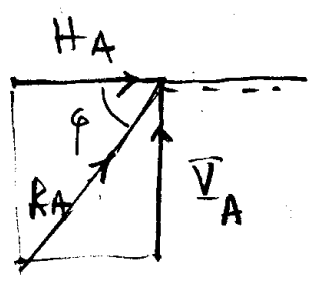
$\curvearrowright \sum (M_i)_A = 0 \Rightarrow -4 \cdot 16 - \frac{2}{3} \cdot 8 \cdot 48 - 8 \cdot 4 - 9 \cdot 4 + 10 \cdot R_B \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \cdot R_B \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow$

$-388 + 7,66 R_B = 0 \Rightarrow R_B = 50,65 \text{ kN}$

(1) $\Rightarrow H_A = R_B \frac{1}{2} = 25,33 \text{ kN}$

.../.

(2) \Rightarrow $V_A = 72 - R_B \frac{\sqrt{3}}{2} = 28,14 \text{ kN}$



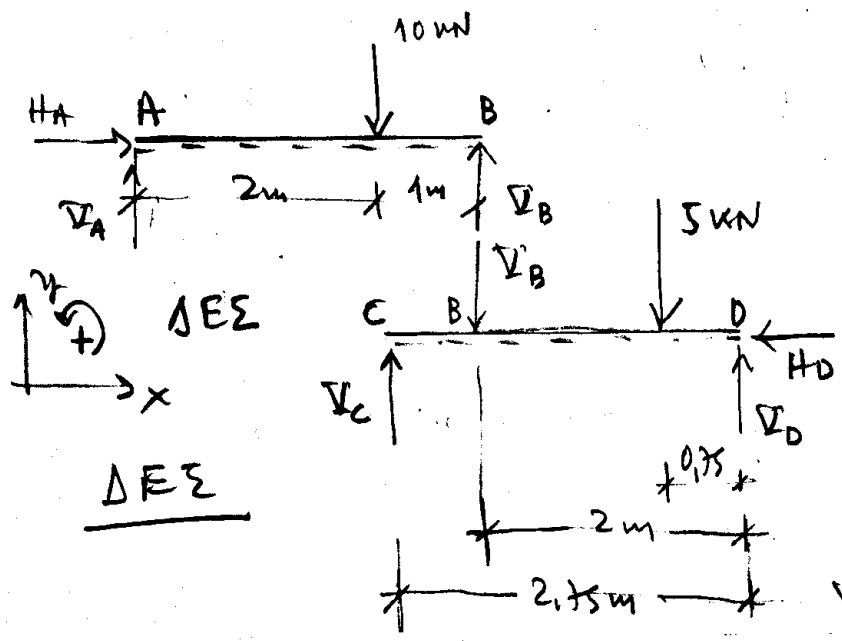
$$R_A = \sqrt{H_A^2 + V_A^2} = 37,86 \text{ kN}$$

$$\tan \varphi = \frac{V_A}{H_A} = \frac{28,14}{25,33} = 1,111 \Rightarrow$$

$\varphi = \arctan 1,111 = 48,01^\circ$

...

3^η Άσκηση α) AB + CD: δύος σύνδεσ & μηχανισμός



$m=2$ AB, CD
 $v=5$ H_A, V_A, V_C, H_D, V_D
 $u=1$ V_B

$v+u=3n$: ισοστάσιος φορέας

- οι συνδέσεις δεν διαφέρουν και το ίδιο οργάνο: ως στερεά σώματα
- εξετάζουμε ενόψει των συνδέσεων

AB: υποδομή με 2^η -επιπέδου 1^η

Εξισ. εξισ. ισοσταθίας

$\rightarrow \sum X_i = 0 \Rightarrow H_A = 0$

$\uparrow \sum Y_i = 0 \Rightarrow V_A - 10 + V_B = 0 \quad (1)$

$\sum (M_i)_A = 0 \Rightarrow -2 \cdot 10 + 3 \cdot V_B = 0 \Rightarrow V_B = 6,67 \text{ kN}$

(1) $\Rightarrow V_A = 10 - V_B = 3,33 \text{ kN}$

CD: υποδομή με 1^η -επιπέδου 2^η

Εξισ. εξισ. ισοσταθίας

$\rightarrow \sum X_i = 0 \Rightarrow -H_D = 0 \Rightarrow H_D = 0$

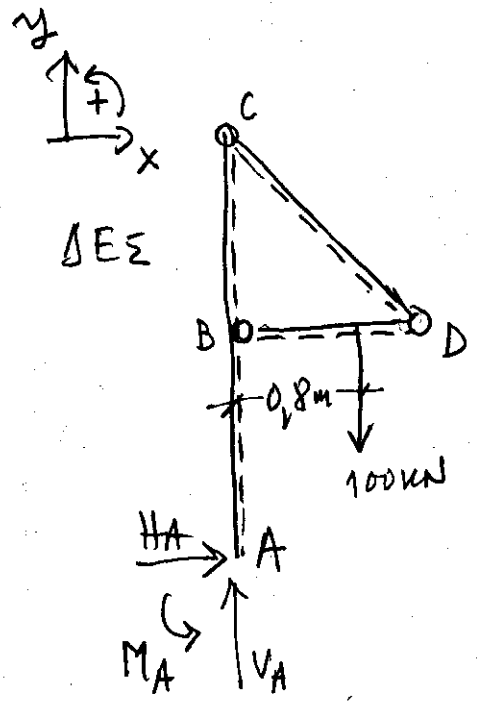
$\uparrow \sum Y_i = 0 \Rightarrow V_C - 6,67 - 5 + V_D = 0 \quad (2)$

$\sum (M_i)_D = 0 \Rightarrow -2,75 V_C + 2 \cdot 6,67 + 0,75 \cdot 5 = 0 \Rightarrow V_C = 6,21 \text{ kN}$

(2) $\Rightarrow V_D = -V_C + 6,67 + 5 = 5,46 \text{ kN}$

3^η Ασκηση β)

AC + CD + DB: στεγνά σώματα & ελεύθερα
 $H_A, V_A, M_A: r=3$ ισοσταθμίες: μέγιστες
 • Οι διαφάνειες δεν διαχωρίζονται από το



Γόδο σωμάτω: ως ελεύθερα σώματα

• Εξισώσεις στατ ισορροπίας:

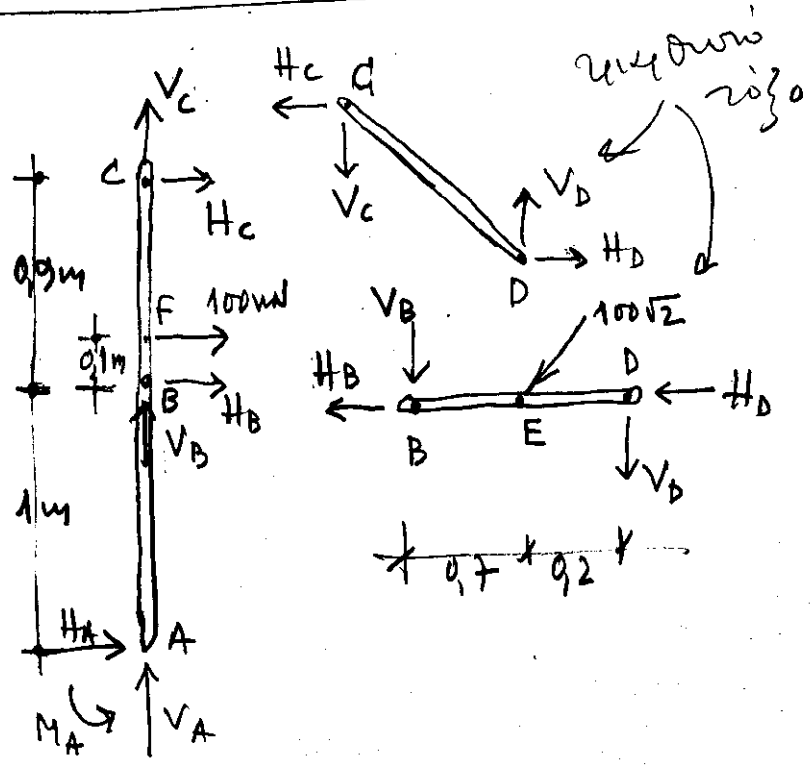
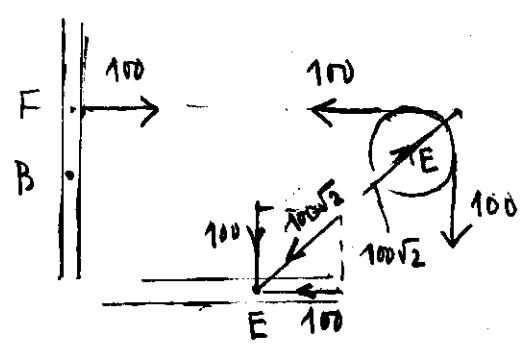
$\rightarrow \sum X_i = 0 \quad \text{ή} \quad H_A = 0$

$\uparrow \sum Y_i = 0 \quad \text{ή} \quad V_A - 100 \text{ kN} = 0 \Rightarrow V_A = 100 \text{ kN}$

$\curvearrowright \sum (M_i)_A = 0 \quad \text{ή} \quad M_A - 0,8 \cdot 100 = 0 \Rightarrow$

$M_A = 80 \text{ kNm}$

Λεπτομέρεια ανάλυσης:



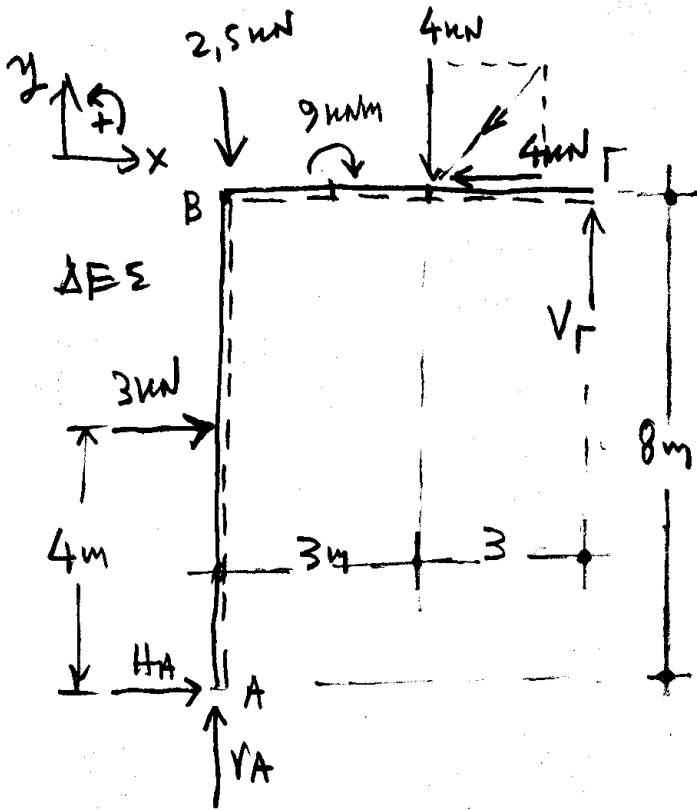
- $n=3$ AD, CD, DB
- $r=3$ H_A, V_A, M_A
- $u=6$ $H_B, V_B, H_C, V_C, H_D, V_D$

$3 + 6 = 3n$ (ισοσταθμίες γυροδω)

3 = 4 Άσκηση γ)

Δίδονται κλίμακες - Στιγμιότυπο
 H_A, V_A, V_F $v=3$ ίσοι κλίμακας: κλίμακας 1:1000
 6

Οι αναλύσεις των δυνάμεων είναι οι ίδιες όπως και στην ερώτηση 2



Εξίσωση Στμ. Ισορροπ.

$$\rightarrow \sum X_i = 0 \quad \text{ή} \quad H_A + 3 - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{H_A = 1 \text{ kN}}$$

$$\uparrow \sum Y_i = 0 \quad \text{ή} \quad V_A - 2.5 - 4 + V_F = 0 \quad (1)$$

$$\sum (M_i)_A = 0 \quad \text{ή} \quad -4 \cdot 3 - 9 - 3 \cdot 4 +$$

$$+ 8 \cdot 4 + 6 \cdot V_F = 0 \Rightarrow \boxed{V_F = 0.167 \text{ kN}}$$

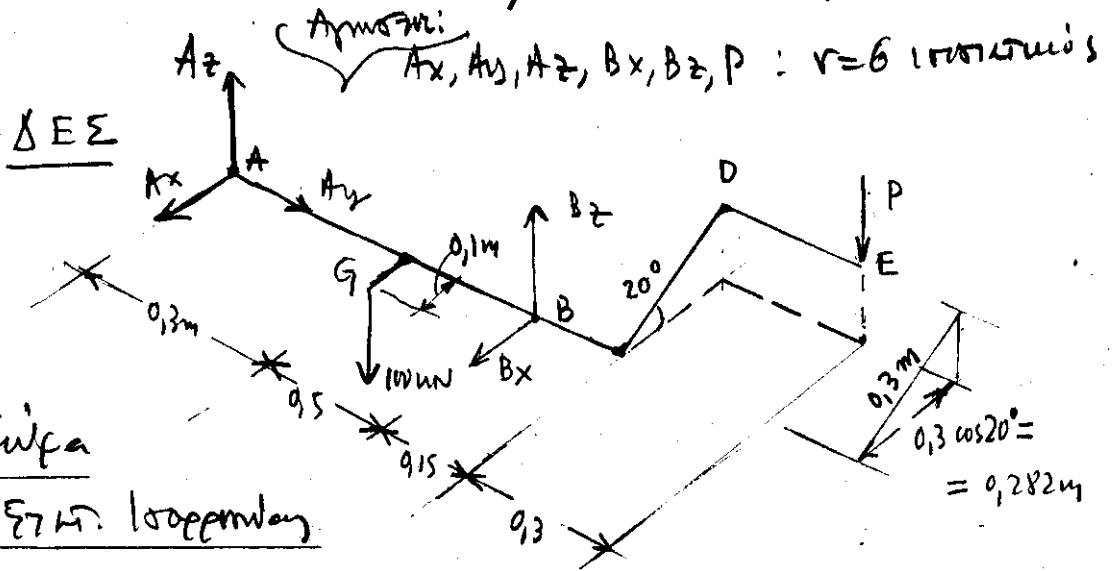
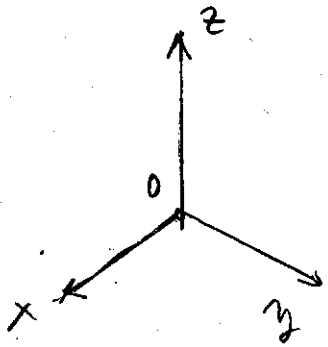
$$(1) \Rightarrow \boxed{V_A = -V_F + 6.5 = 6.333 \text{ kN}}$$

ABDE
Σώμα γυφίται: Ανζό-Εξζέω

4^η Ασκηση :

Επιρίζη Α : Σφαιρική Αρθρώση : A_x, A_y, A_z

Επιρίζη Β : { κράρωση στο επίπεδο xBz : B_x, B_z
καμύση των δυν $B_y : B_y = 0$



0 s εξζέω Σώμα

6 εξζωσεις εξκ. Ισορροπίας

$\sum x_i = 0 \quad A_x + B_x = 0 \quad (1)$

$\sum y_i = 0 \quad \boxed{A_y = 0}$

$\sum z_i = 0 \quad A_z + B_z - 100 \text{ kN} - P = 0 \quad (2)$

$\sum (M_i)_{a3} A_z = 0 \quad - 0,8 \cdot B_x = 0 \quad \rightarrow \boxed{B_x = 0} \quad (3)$

$\sum (M_i)_{a3} A_x = 0 \quad - 0,3 \cdot 100 \text{ kN} + 0,8 B_z - 1,25 P = 0 \quad (4)$

$\sum (M_i)_{a3} A_y = 0 \quad 0,1 \cdot 100 - 0,282 \cdot P = 0 \Rightarrow \boxed{P = 35,46 \text{ kN}}$

(1) $\Rightarrow \boxed{A_x = 0}$

(4) $\Rightarrow \boxed{B_z = 92,91 \text{ kN}}$

(2) $\Rightarrow \boxed{A_z = 100 - 92,91 + 35,46 = 42,55 \text{ kN}}$