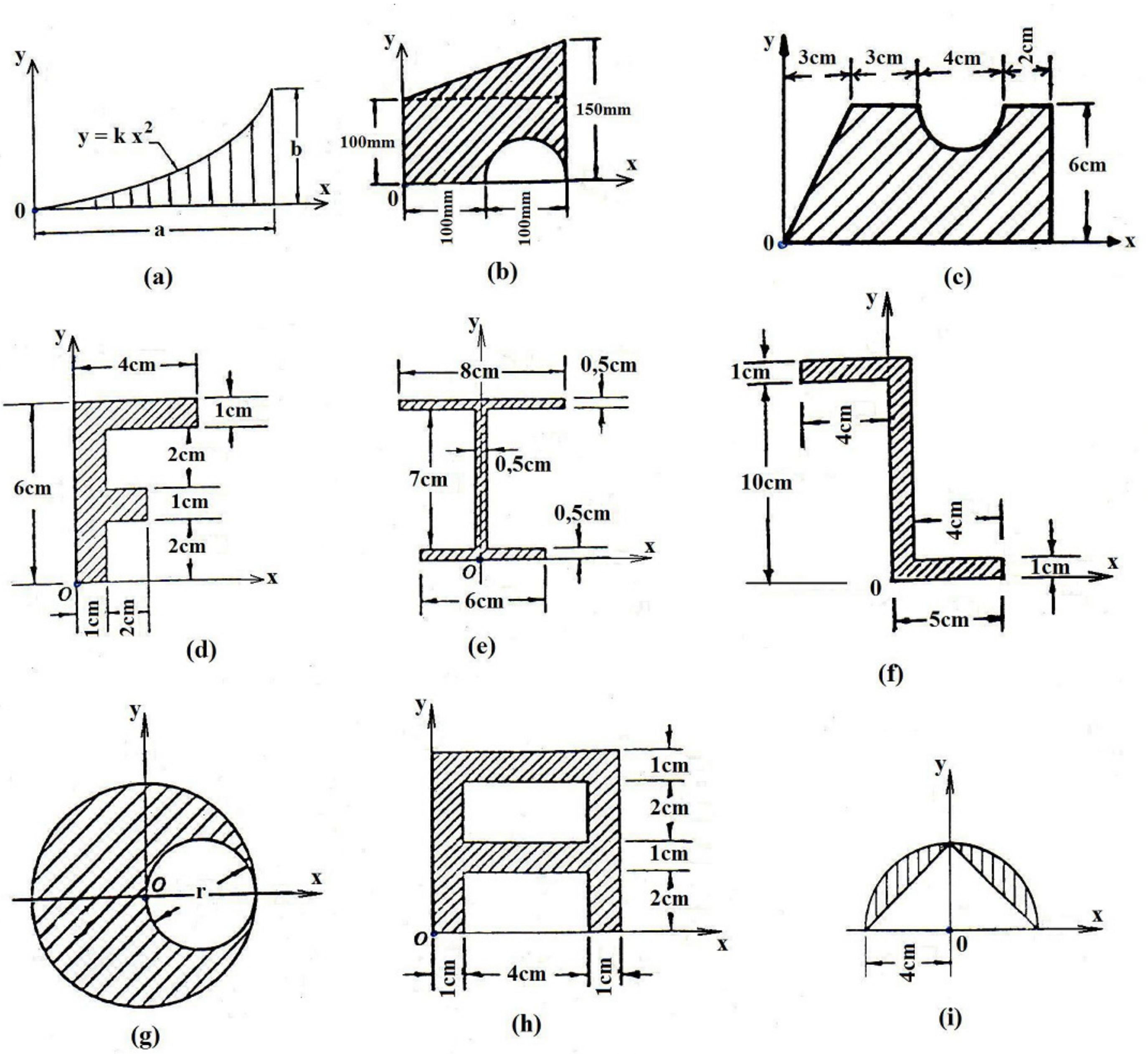
Ε.Μ.Π. – Σ.Ε.Μ.Φ.Ε. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑΤΙΚΗΣ

Τομέας Μηχανικής ΟΜΑΔΑ Β΄

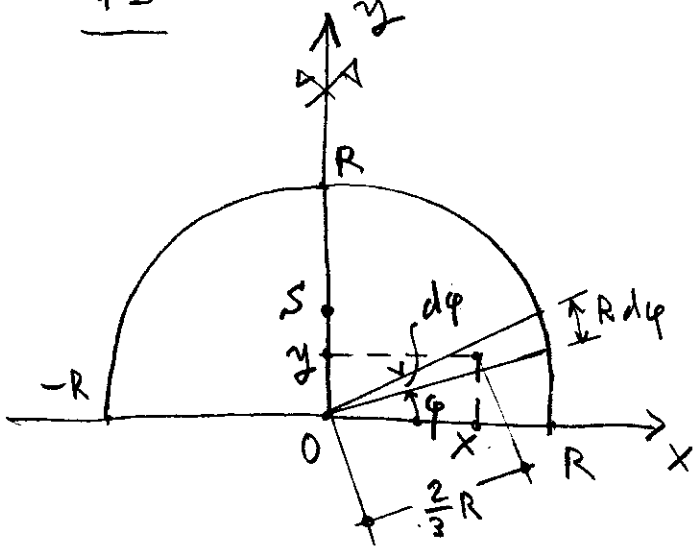
1. Να αποδειχθεί οτι το κέντρο βάρους ημικυκλίου ακτίνας R βρίσκεται σε απόσταση $^{4R}/_{3\pi}$ από το κέντρο του.

2. Να προσδιοριστούν τα κέντρα βάρους των γραμμοσκιασμένων διατομών των παρακάτω σχημάτων.



ΛΥΣΕΙΣ

1η



Συντ-νες $\overbrace{\text{του ημικυκλίου}}^{\text{ΚΒ του}}$:

(4α): $x_S = \dfrac{\int_{(A)} x\,dA}{\int_{(A)} dA}$ (1)

(4β): $y_S = \dfrac{\int_{(A)} y\,dA}{\int_{(A)} dA}$ (2)

Στοιχειώδης επιφάνεια dA:
"κυκλικός τομέας γωνίας $d\varphi$ στη θέση φ $(0 \le \varphi \le \pi)$"

$$dA = \overbrace{\frac{1}{2} R\,d\varphi \cdot R}^{\text{σαν τρίγωνο}} = \frac{R^2}{2}\,d\varphi$$

συντ-νες ΚΒ του dA
$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{3} R \cos\varphi \\ y = \dfrac{2}{3} R \sin\varphi \end{cases}$$

$$A = \int_{(A)} dA = \int_{\varphi=0}^{\pi} \frac{R^2}{2}\,d\varphi = \frac{R^2}{2}\int_{\varphi=0}^{\pi} d\varphi = \frac{R^2}{2}\,[\varphi]_0^{\pi} = \frac{R^2}{2}\,[\pi - 0] = \underbrace{\frac{\pi R^2}{2}}_{\text{εμβαδόν ημικυκλίου}}$$

$$\int_{(A)} x\,dA = \int_{\varphi=0}^{\pi} \frac{2}{3} R\cos\varphi\,\frac{R^2}{2}\,d\varphi = \frac{R^3}{3}\int_{\varphi=0}^{\pi} \cos\varphi\,d\varphi = \frac{R^3}{3}[\sin\varphi]_0^{\pi} = \frac{R^3}{3}[\overset{0}{\sin\pi} - \overset{0}{\sin 0}] = 0$$

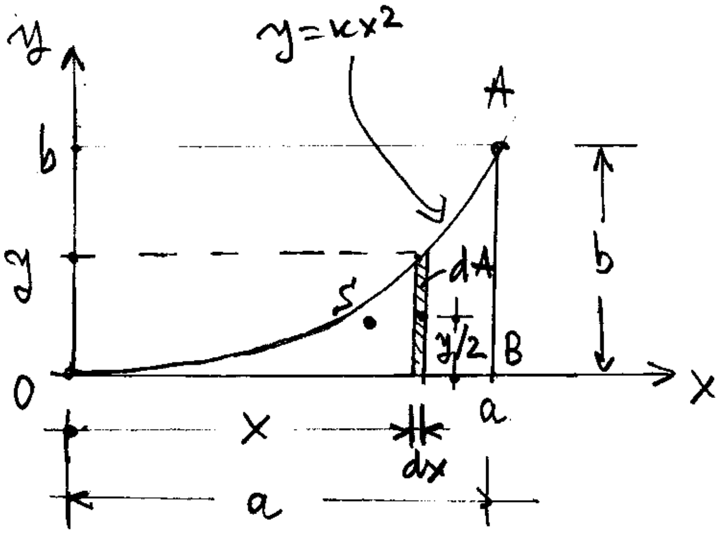
$$\int_{(A)} y\,dA = \int_{\varphi=0}^{\pi} \frac{2}{3} R\sin\varphi\,\frac{R^2}{2}\,d\varphi = \frac{R^3}{3}\int_0^{\pi} \sin\varphi\,d\varphi = \frac{R^3}{3}[-\cos\varphi]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{R^3}{3}\left[(-\overset{1}{\cos\pi}) - (-\overset{-1}{\cos 0})\right] = \frac{R^3}{3}(1+1) = \frac{2R^3}{3}$$

Αντικ. → (1) ⟹ $\boxed{x_s = \dfrac{0}{\frac{\pi R^2}{2}} = 0}$ αναμένεται λόγω συμμετρίας

Αντικ. → (2) ⟹ $\boxed{y_s = \dfrac{\frac{2R^3}{3}}{\frac{\pi R^2}{2}} = \dfrac{4}{3\pi} R \approx 0{,}4244\, R}$

2η (α)



Υπολογισμός του κ ώστε η παραβολή ΟΑ να διέρχεται από το $A(\alpha, b)$.

Για το σημείο Α: $y_A = \kappa x_A^2$ ή $b = \kappa a^2 \rightarrow \kappa = \frac{b}{a^2}$.

Εξίσωση παραβολής $\boxed{y = \frac{b}{a^2} x^2}$

Συντ-νες των ΚΒ του σχήματος: εξ. (4α, b)

$$x_S = \frac{\int_{(A)} x' \, dA}{\int_{(A)} dA} \quad (1) \qquad y_S = \frac{\int_{(A)} y' \, dA}{\int_{(A)} dA} \quad (2)$$

Στοιχειώδης επιφάνεια dA: "κατακόρυφη λωρίδα ύψους y και πλάτους dx, στη θέση x $(0 \leq x \leq a)$"

$$dA = y \, dx = \frac{b}{a^2} x^2 dx$$

Συντ-νες ΚΒ της dA: $\begin{cases} x' = x \\ y' = y/2 = \frac{b}{2a^2} x^2 \end{cases}$

$$A = \int_{x=0}^{a} dA = \int_0^a \frac{b}{a^2} x^2 dx = \frac{b}{a^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{b}{a^2} \frac{a^3}{3} = \frac{ba}{3}$$

$$\int_{x=0}^{a} x' dA = \int_{x=0}^{a} x \frac{b}{a^2} x^2 dx = \frac{b}{a^2} \int_0^a x^3 dx = \frac{b}{a^2} \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^a = \frac{b}{a^2} \frac{a^4}{4} = \frac{ba^2}{4}$$

../..

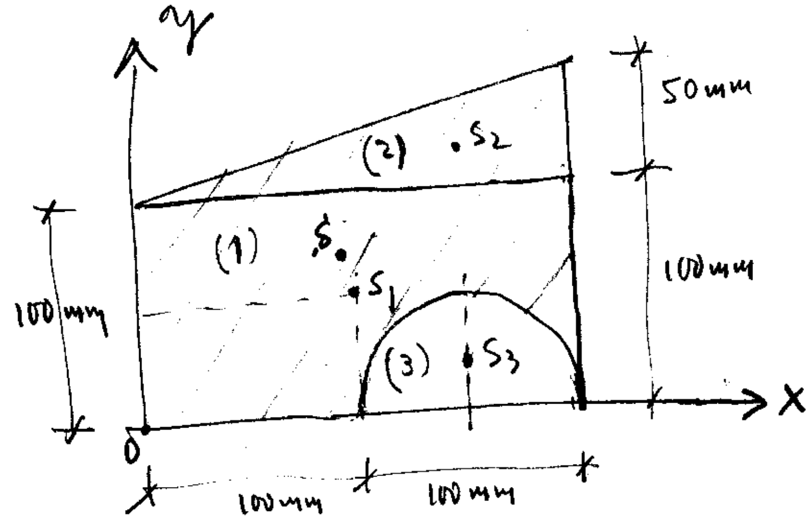
$$\int_{x=0}^{a} y' \, dA = \int_{x=0}^{a} \frac{y}{2}\,\frac{b}{a^2}\,x^2\,dx = \int_{x=0}^{a} \frac{b}{2a^2}\,x^2\,\frac{b}{a^2}\,x^2\,dx =$$

$$= \frac{b^2}{2a^4}\int_{x=0}^{a} x^4\,dx = \frac{b^2}{2a^4}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^a = \frac{b^2}{2a^4}\,\frac{a^5}{5} = \frac{b^2 a}{10}$$

Anw. → (1) ⇒ $\boxed{x_s = \dfrac{\frac{ba^2}{4}}{\frac{ba}{3}} = \dfrac{3}{4}a}$

Anw → (2) → $\boxed{y_s = \dfrac{\frac{b^2 a}{10}}{\frac{ba}{3}} = \dfrac{3}{10}b}$

2η (b)



Σύνθετη Επιφάνεια από:

- ορθογώνιο (1)
- τρίγωνο (2)
- κυκλικό ημικύκλιο (3)

(1) ορθογώνιο: $A_1 = 100\cdot 200 = 20.000\ mm^2$, $x_{S1} = 100\ mm$, $y_{S1} = 50\ mm$

(2) τρίγωνο: $A_2 = \frac{1}{2}\, 200\cdot 50 = 5000\ mm^2$, $x_{S_2} = \frac{2}{3}\, 200 = 133,3\ mm$

$$y_{S2} = 100 + \frac{1}{3}\, 50 = 116,67\ mm$$

(3) ημικύκλιο-κυκλικό: $A_3 = -\frac{1}{2}\frac{\pi d^2}{4} = -\frac{1}{2}\frac{\pi\, 100^2}{4} = -3.927\ mm^2$

$$x_{S3} = 100 + 50 = 150\ mm$$

$$y_{S3} = \frac{4R}{3\pi} = \frac{4\cdot 50}{3\pi} = 21,22\ mm$$

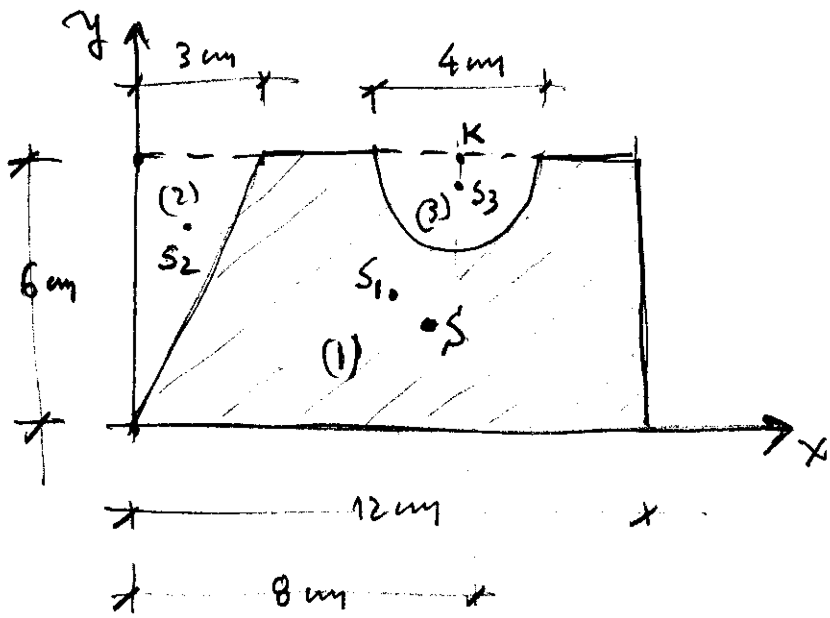
εξ (7α) $\boxed{x_S} = \dfrac{x_{S1}A_1 + x_{S2}A_2 + x_{S3}A_3}{A_1+A_2+A_3} = \dfrac{100\cdot 20.000 + 133,3\cdot 5000 + 150(-3.927)}{20000+5000+(-3.927)} =$

$$= \frac{2077.450}{21073} = 98,58\ mm$$

εξ (7β) $\boxed{y_S} = \dfrac{y_{S1}A_1 + y_{S2}A_2 + y_{S3}A_3}{A_1+A_2+A_3} = \dfrac{50\cdot 20.000 + 116,67\cdot 5000 + 21,22(-3.927)}{21073} =$

$$= \frac{1500.019,06}{21073} = 71,18\ mm$$

2η (c)



Σύνθετο σχήμα από

- ορθογώνιο (1)
- αρνητικό τρίγωνο (2)
- αρνητικό ημικύκλιο (3)

(1) ορθογώνιο

$A_1 = 12 \cdot 6 = 72\ cm^2, \quad x_{S_1} = 6\ cm, \quad y_{S_1} = 3\ cm$

(2) αρνητικό τρίγωνο

$A_2 = -\frac{1}{2} 3 \cdot 6 = -9\ cm^2, \quad x_{S_2} = \frac{1}{3} 3 = 1\ cm, \quad y_{S_2} = \frac{2}{3} 6 = 4\ cm$

(3) αρνητικό ημικύκλιο

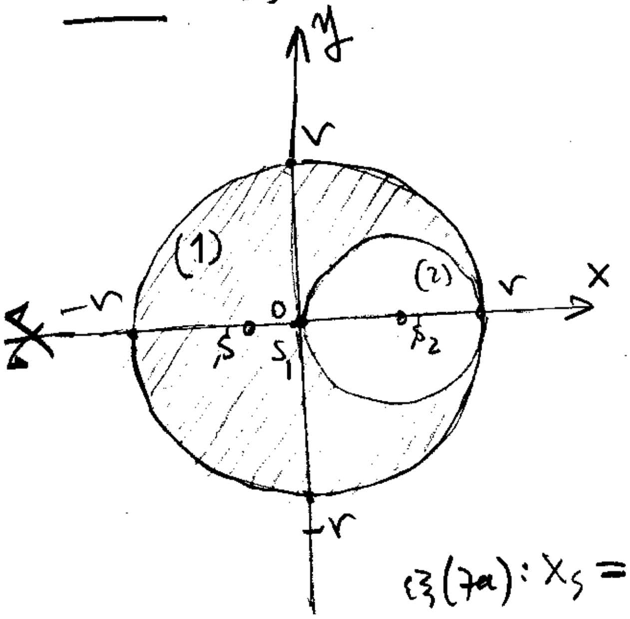
$A_3 = -\frac{1}{2} \frac{\pi d^2}{4} = -\frac{1}{2} \pi \frac{4^2}{4} = -6{,}28\ cm^2, \quad x_{S_3} = 8\ cm, \quad y_{S_3} = 6 - \frac{4R}{3\pi} =$

$= 6 - \frac{4 \cdot 2}{3\pi} = 5{,}15\ cm$

εξ (7α) $x_S = \dfrac{x_{S1} A_1 + x_{S2} A_2 + x_{S3} A_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \dfrac{6 \cdot 72 + 1 \cdot (-9) + 8(-6{,}28)}{72 + (-9) + (-6{,}28)} = \dfrac{372{,}76}{56{,}72} = 6{,}57\ cm$

εξ (7β) $y_S = \dfrac{y_{S1} A_1 + y_{S2} A_2 + y_{S3} A_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \dfrac{3 \cdot 72 + 4(-9) + 5{,}15(-6{,}28)}{72 + (-9) + (-6{,}28)} = \dfrac{147{,}66}{56{,}72} = 2{,}60\ cm$

Σχ. 4 (g)



Σύνθετη επιφάνεια από:

(1) κεντρικός κύκλος με S_1

(2) κενωτικός κύκλος με S_2

(1) $A_1 = \pi r^2$, $x_{S1} = 0$, $y_{S1} = 0$

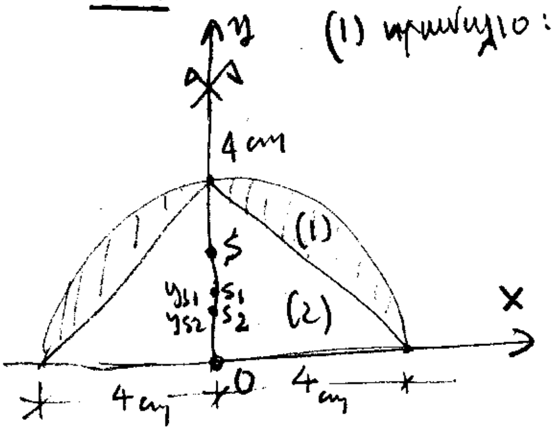
(2) $A_2 = -\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 = -\frac{\pi r^2}{4}$, $x_{S2} = \frac{r}{2}$, $y_{S2} = 0$

$$\text{εξ}(7a): x_S = \frac{x_{S1}A_1 + x_{S2}A_2}{A_1 + A_2} = \frac{0 \cdot \pi r^2 + \frac{r}{2}\left(-\frac{\pi r^2}{4}\right)}{\pi r^2 + \left(-\frac{\pi r^2}{4}\right)} = -\frac{\frac{\pi r^3}{8}}{\frac{3}{4}\pi r^2} = -\frac{1}{6}r$$

$$\text{εξ}(7b): y_S = \frac{y_{S1}A_1 + y_{S2}A_2}{A_1 + A_2} = \frac{0 - 0}{A_1 + A_2} = 0$$

αναμένεται λόγω συμμετρίας

Σχ. 4 (i)



Σύνθετη επιφάνεια από (1) ημικύκλιο (2) κενωτικό τρίγωνο

(1) ημικύκλιο: $A_1 = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi 4^2}{2} = 25{,}13\ cm^2$

$x_{S1} = 0$, $y_{S1} = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot \pi} = 1{,}70\ cm$

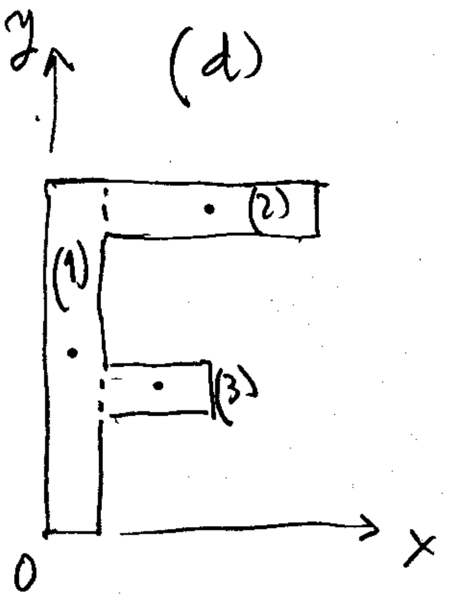
(2) κενωτικό τρίγωνο: $A_2 = -\frac{1}{2}8 \cdot 4 = -16\ cm^2$, $x_{S2} = 0$

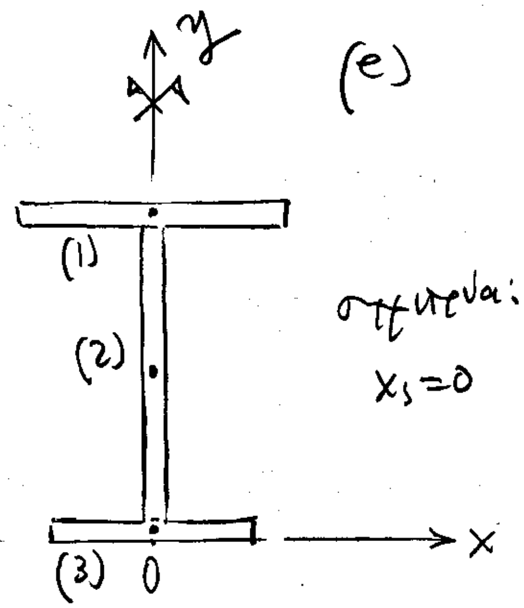
$y_{S2} = \frac{1}{3}4 = 1{,}33\ cm$

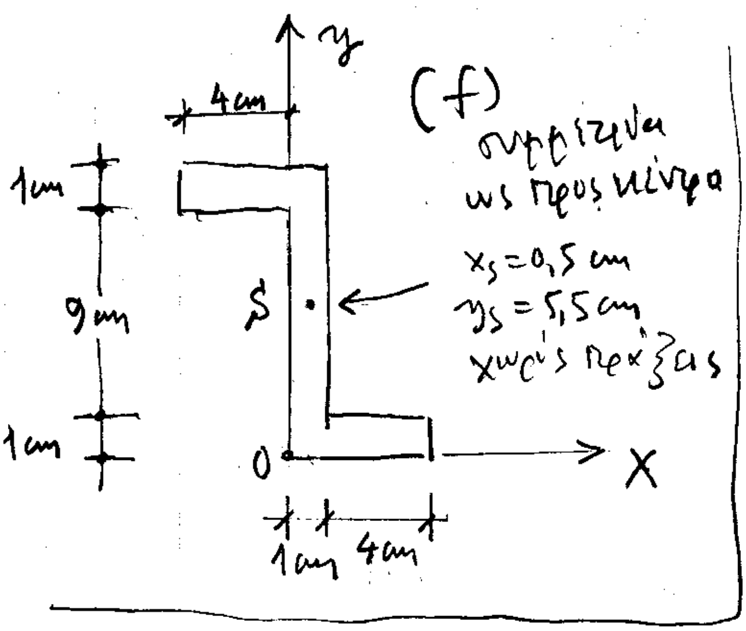
$$\text{εξ}(7a): x_S = \frac{x_{S1}A_1 + x_{S2}A_2}{A_1 + A_2} = \frac{0 - 0}{A_1 + A_2} = 0$$

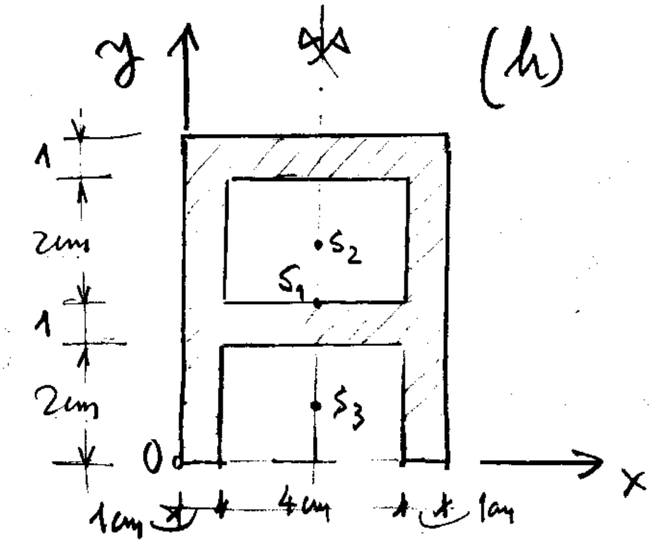
αναμένεται λόγω συμμετρίας

$$\text{εξ}(7b): y_S = \frac{y_{S1}A_1 + y_{S2}A_2}{A_1 + A_2} = \frac{1{,}70 \cdot 25{,}13 + 1{,}33(-16)}{25{,}13 + (-16)} = \frac{21{,}44}{9{,}13} = 2{,}35\ cm$$









Σύνθετη επιφάνεια από:

(1) Συνολικό ορθογώνιο $A_1 = 6\times 6$ $y_{s_1}=\frac{6}{2}=3$ cm

(2) Άνω αφαιρετικό ορθογώνιο $A_2=-4\times 2$ $y_{s_2}=2+1+1$

(3) κάτω — " — — " — $A_3=-4\times 2$ $y_{s_3}=1$

$$y_s=\frac{y_{s_1}A_1+y_{s_2}A_2+y_{s_3}A_3}{A_1+A_2+A_3}=\dots$$

$x_s=1+2=3$ cm λόγω συμμετρίας