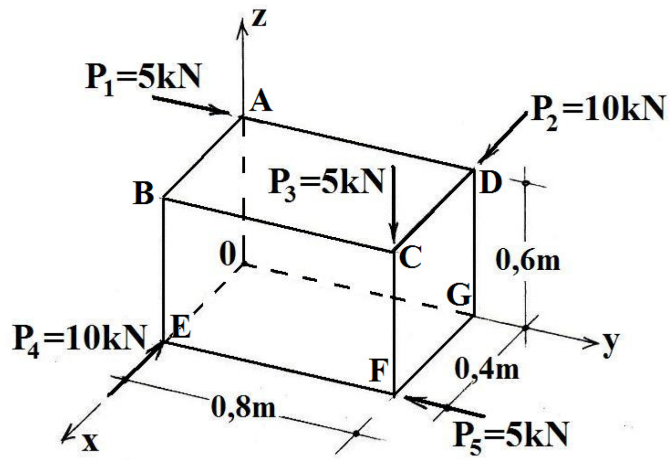
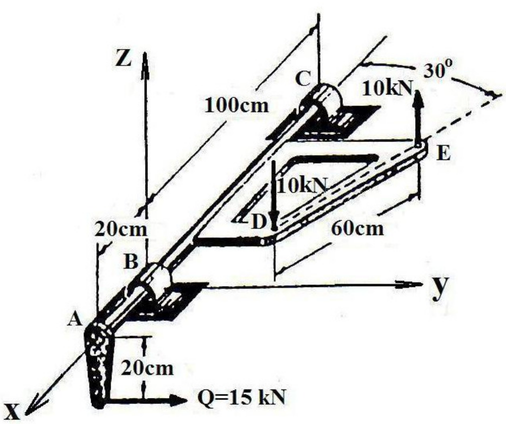
Ε.Μ.Π. – Σ.Ε.Μ.Φ.Ε. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑΤΙΚΗΣ

Τομέας Μηχανικής ΟΜΑΔΑ Α΄

1. Για το σύστημα των δυνάμεων που ασκούνται στο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο του σχήματος, να βρεθεί το ισοδύναμο σύστημα δύναμης και ροπής με αναγωγή στην αρχή Ο των αξόνων.





2. Ένα ζεύγος ροπής $M = 6\ kNm$ (αποτελούμενο από δύο δυνάμεις $F = 10\ kN$ η κάθε μία) και μία δύναμη $Q = 15\ kN$, εφαρμόζονται στον φορέα του σχήματος. Με αναγωγή στο Β, να αντικατασταθεί αυτό το σύστημα των δυνάμεων με ένα ισοδύναμο σύστημα δύναμης και ροπής.

ΛΥΣΕΙΣ

1η Άσκηση

α' τρόπος κάθε $\mathbf{P}_i$ ισοδυναμεί με μία δύναμη $\mathbf{P}_i$ επί το O και ένα ζεύγος $\mathbf{M}_{0i} = \mathbf{r}_i \times \mathbf{P}_i$

Έτσι έχουμε:

$$\mathbf{P}_1 = 5\mathbf{j}\ [kN], \quad \overset{OA}{\mathbf{r}_1} = 0{,}6\,\mathbf{k}\ [m] \Rightarrow$$

$$\mathbf{M}_{01} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{P}_1 = 3\,\mathbf{k}\times\mathbf{j} = -3\,\mathbf{i}\ [kNm]$$

$$\mathbf{P}_2 = 10\,\mathbf{i}\ [kN], \quad \mathbf{r}_2 = \overset{OG+GD}{0{,}8\mathbf{j} + 0{,}6\mathbf{k}}\ [m] \Rightarrow$$

$$\mathbf{M}_{02} = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{P}_2 = (0{,}8\mathbf{j} + 0{,}6\mathbf{k}) \times 10\mathbf{i} = -8\mathbf{k} + 6\mathbf{j}\ [kNm]$$

$$\mathbf{P}_3 = -5\mathbf{k}\ [kN], \quad \mathbf{r}_3 = \overset{OE\ +\ EF}{0{,}4\mathbf{i} + 0{,}8\mathbf{j}}\ [m] \Rightarrow$$

$$\mathbf{M}_{03} = \mathbf{r}_3 \times \mathbf{P}_3 = (0{,}4\mathbf{i} + 0{,}8\mathbf{j}) \times (-5\mathbf{k}) = 2\mathbf{j} - 4\mathbf{i}\ [kNm]$$

$$\mathbf{P}_4 = -10\,\mathbf{i}\ [kN], \quad \mathbf{r}_4 = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{M}_{04} = \mathbf{r}_4 \times \mathbf{P}_4 = \mathbf{0}\ [kNm]$$

$$\mathbf{P}_5 = -5\,\mathbf{j}\ [kN], \quad \mathbf{r}_5 = \overset{OE}{0{,}4\,\mathbf{i}}\ [m] \Rightarrow$$

$$\mathbf{M}_{05} = \mathbf{r}_5 \times \mathbf{P}_5 = 0{,}4\,\mathbf{i} \times (-5\mathbf{j}) = -2\mathbf{k}\ [kNm]$$

Άρα ισοδύναμο σύστημα:

- Συνισταμένη δύναμη $\boxed{\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{5} \mathbf{P}_i = -5\mathbf{k}\ [kN]}$
- Ροπή συνιστάμενου ζεύγους $\boxed{\mathbf{M}_0^R = \sum_{i=1}^{5} \mathbf{M}_{0i} = -7\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 10\mathbf{k}\ [kNm]}$

<u>β' τρόπος:</u> Παρατηρούμε ότι έχουμε δύο ζεύγη (δυνάμεων) τα $(\underline{P}_1, \underline{P}_5)$ και $(\underline{P}_2, \underline{P}_4)$ και την δύναμη $\underline{P}_3$.

• το ζεύγος $(\underline{P}_1, \underline{P}_5)$ έχει
$$\begin{cases} \underline{r}_{15} = \overset{\underline{AB}+\underline{BE}}{0{,}4\,\underline{i} - 0{,}6\,\underline{k}}\ [m], & \underline{P}_5 = -5\,\underline{j}\ [kN] \\ \text{ή } \underline{r}_{51} = \overset{\underline{EG}+\underline{GD}}{-0{,}4\,\underline{i} + 0{,}6\,\underline{k}}\ [m], & \underline{P}_1 = 5\,\underline{j}\ [kN] \end{cases}$$

και ροπή $\underline{M}_{1,5} = \underline{r}_{15} \times \underline{P}_5 = \underline{r}_{51} \times \underline{P}_1 = -2\,\underline{k} - 3\,\underline{i}$ [kNm]

• το ζεύγος $(\underline{P}_2, \underline{P}_4)$ έχει
$$\begin{cases} \underline{r}_{24} = \overset{\underline{DA}+\underline{AO}}{-0{,}8\,\underline{j} - 0{,}6\,\underline{k}}\ [m], & \underline{P}_4 = -10\,\underline{i}\ [kN] \\ \text{ή } \underline{r}_{42} = \overset{\underline{EF}+\underline{FC}}{0{,}8\,\underline{j} + 0{,}6\,\underline{k}}\ [m], & \underline{P}_2 = 10\,\underline{i}\ [kN] \end{cases}$$

και ροπή $\underline{M}_{2,4} = \underline{r}_{24} \times \underline{P}_4 = \underline{r}_{42} \times \underline{P}_2 = -8\,\underline{k} + 6\,\underline{j}$ [kNm]

Τα ζεύγη (ως ελεύθερα διανύσματα) μεταφέρονται στο O ως έχουν.

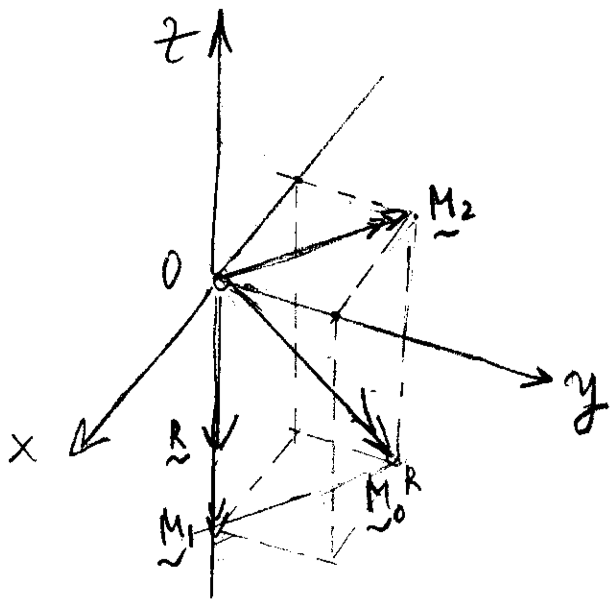
Η $\underline{P}_3$ μεταφέρεται στο O με ροπή (από α' τρόπο παραπάνω): $\underline{M}_{03} = 2\,\underline{j} - 4\,\underline{i}$ [kNm]

Άρα <u>ισοδύναμο σύστημα:</u>

Συνισταμένη δύναμη $\boxed{\underline{R} = \underline{P}_3 = -5\,\underline{k}\ [kN]}$

Ροπή συνιστ. ζεύγους $\boxed{\underline{M}_O^R = \underline{M}_{1,5} + \underline{M}_{2,4} + \underline{M}_{03} = -7\,\underline{i} + 8\,\underline{j} - 10\,\underline{k}\ [kNm]}$

../..



Ανάλυση της $\underset{\sim}{M}_0^R$:

$\underset{\sim}{M}_0^R = \underset{\sim}{M}_1 + \underset{\sim}{M}_2$

$\underset{\sim}{M}_1 \parallel \underset{\sim}{R}$, $\underset{\sim}{M}_2 \perp \underset{\sim}{R}$

• Θέση κεντρικού άξονα $\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{OS} = \dfrac{\underset{\sim}{R} \times \underset{\sim}{M}_0^R}{R^2}$ [m] =

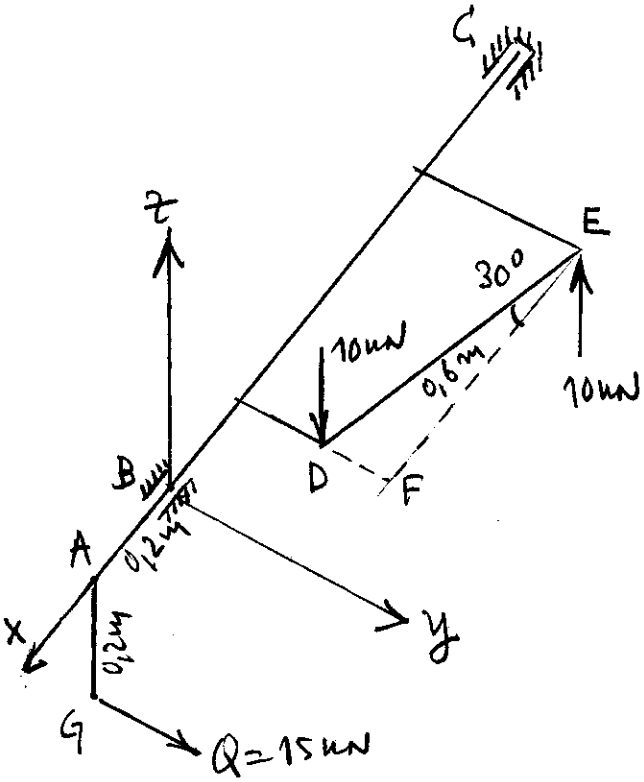
$$= \frac{(-5\underset{\sim}{k}) \times (-7\underset{\sim}{i} + 8\underset{\sim}{j} - 10\underset{\sim}{k})}{5^2} = 1{,}6\,\underset{\sim}{i} + 1{,}4\,\underset{\sim}{j} \ [m]$$

S: σημείο του κεντρικού άξονα,
κεντρικός άξονας $\parallel \underset{\sim}{R}$ ή $\underset{\sim}{k}$

• παραμετρική μορφή του κεντρικού άξονα:

$$\underset{\sim}{\rho} = \underbrace{1{,}6\,\underset{\sim}{i} + 1{,}4\,\underset{\sim}{j}}_{\underset{\sim}{v}} + \lambda \underset{\sim}{k}, \quad -\infty < \lambda < +\infty$$

2η Άσκηση:



Οι 10kN −10kN στα E & D είναι ζεύγος δυνάμεων με ροπή:

$$\overset{E}{\underset{\sim}{M}} = \underset{\sim}{DE} \times 10\underset{\sim}{k} \left(= \overset{D}{\underset{\sim}{ED}} \times (-10\underset{\sim}{k})\right) =$$

$$= \underbrace{\left[\overset{0,6m}{DE}\sin30^\circ\, \underset{\sim}{j} + \overset{0,6m}{DE}\cos30^\circ(-\underset{\sim}{i})\right]}_{\underset{\sim}{DE} = \underset{\sim}{DF} + \underset{\sim}{FE}} \times 10\underset{\sim}{k} =$$

$$= 0,6\cdot\sin30^\circ\cdot10(\underbrace{\underset{\sim}{j}\times\underset{\sim}{k}}_{\underset{\sim}{i}}) + 0,6\cos30^\circ\cdot10(\underbrace{-\underset{\sim}{i}\times\underset{\sim}{k}}_{\underset{\sim}{j}})$$

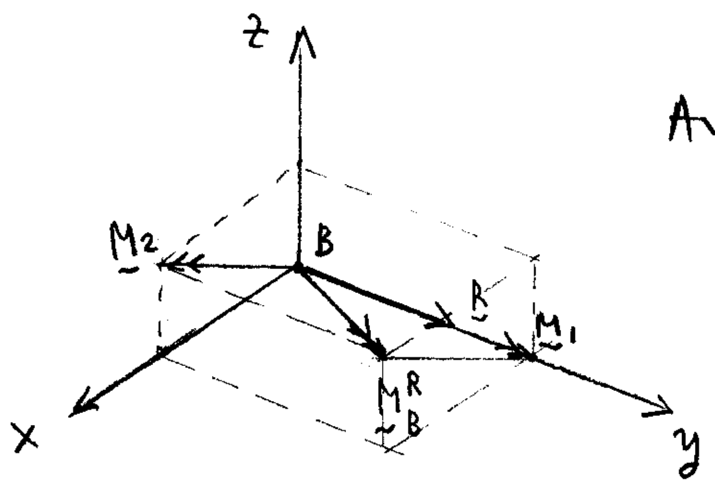
ή $\underset{\sim}{M} = 3\underset{\sim}{i} + 5,196\underset{\sim}{j}$ [kNm]

το $\underset{\sim}{M}$ (ως ελεύθερο διάνυσμα) μεταφέρεται στο B ως έχει.

Η δύναμη $\underset{\sim}{Q} = 15\underset{\sim}{j}$ [kN], με $\underset{\sim}{r}_Q = \overset{BG}{} = \underset{\sim}{BA} + \underset{\sim}{AG} = 0,2\underset{\sim}{i} + (-0,2\underset{\sim}{k})$ [m] ανάγεται μεταφερόμενη στο B (προσθέτοντας και) συνροπή $M_Q = \underset{\sim}{r}_Q \times \underset{\sim}{Q} = (0,2\underset{\sim}{i} - 0,2\underset{\sim}{k}) \times 15\underset{\sim}{j} = 3\underset{\sim}{k} + 3\underset{\sim}{i}$ [kNm]

Ισοδ. Σύστημα: Συνισταμ. δύναμη $\boxed{\underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{Q} = 15\underset{\sim}{j} \text{ [kN]}}$

Ροπή συνισταμ. ζεύγους $\boxed{\underset{\sim}{M}_B^R = \underset{\sim}{M} + \underset{\sim}{M}_Q = 6\underset{\sim}{i} + 5,196\underset{\sim}{j} + 3\underset{\sim}{k} \text{ [kNm]}}$



Ανάλυση της $\underset{\sim}{M}_B^R$:

$$\underset{\sim}{M}_B^R = \underset{\sim}{M}_1 + \underset{\sim}{M}_2$$

$$\underset{\sim}{M}_1 \parallel \underset{\sim}{R} \,, \quad \underset{\sim}{M}_2 \perp \underset{\sim}{R}$$

• Θέση κεντρικού άξονα $\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{BS} = \dfrac{\underset{\sim}{R} \times \underset{\sim}{M}_B^R}{R^2}$ [m] =

$$= \frac{15\underset{\sim}{j} \times (6\underset{\sim}{i} + 5{,}196\underset{\sim}{j} + 3\underset{\sim}{k})}{15^2} = 0{,}2\underset{\sim}{i} - 0{,}4\underset{\sim}{k} \quad [\mathrm{m}]$$

S : σημείο του κεντρικού άξονα

κεντρικός άξονας $\parallel \underset{\sim}{R}$ ή $\underset{\sim}{j}$

• Παραμετρική μορφή του κεντρικού άξονα:

$$\underset{\sim}{\rho} = \underbrace{0{,}2\underset{\sim}{i} - 0{,}4\underset{\sim}{k}}_{\underset{\sim}{v}} + \lambda \underset{\sim}{j} \,, \quad -\infty < \lambda < +\infty$$