ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΑΛΜΑ / ΕΔΕΜΜ **ΑΛΓΟΡΙΘΜΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ**
Διδάσκοντες: Θ. Λιανέας, Ε. Μαρκάκης, Δ. Φωτάκης
Εαρινό Εξάμηνο 2026

3η Σειρά Ασκήσεων **Προθεσμία Παράδοσης: 14 Ιουνίου 2026**

Πρόβλημα 1. (10 μονάδες) Θεωρούμε μια δημοπρασία VCG με τρεις bidders και τρία αγαθά, τα a, b και c. Τα valuations v_1, v_2 και v_3 των τριών bidders δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

subset	v_1	v_2	v_3
$\emptyset$	0	0	0
$\{a\}$	1	0	0.5
$\{b\}$	0	0	0.5
$\{c\}$	0	0	1.5
$\{a,b\}$	1	2	1
$\{a,c\}$	1	1	2
$\{b,c\}$	0	1	2
$\{a,b,c\}$	2	3	3

Να βρείτε τη βέλτιστη ανάθεση και τις αντίστοιχες VCG πληρωμές για αυτή τη δημοπρασία. Να διερευνήσετε ακόμη αν τα valuations v_1, v_2 ή v_3 είναι submodular ή όχι (να αιτιολογήσετε κατάλληλα τις απαντήσεις σας).

Πρόβλημα 2. (10 μονάδες) Για το πρόβλημα της μεγιστοποίησης του κοινωνικού οφέλους (social welfare maximization) στο πλαίσιο της διανομής m αγαθών σε n παίκτες με συναρτήσεις ωφέλειας $v_j : 2^{[m]} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, θεωρούμε τον άπληστο αλγόριθμο ανάθεσης:

1. Αρχικά $S_1 \leftarrow \emptyset, \ldots, S_n \leftarrow \emptyset$
2. Εξετάζουμε τα αγαθά ένα-ένα, με τη σειρά. Το αγαθό i, $i = 1, \ldots, m$, ανατίθεται στον παίκτη j με τη μέγιστη διαφορική ωφέλεια (σε σχέση με την τρέχουσα ανάθεση αγαθών). Έτσι θέτουμε $S_j \leftarrow S_j \cup \{i\}$, όπου $j = \arg\max_{\ell \in [n]}\{v_\ell(S_\ell \cup \{i\}) - v_\ell(S_\ell)\}$.

Μέσω αντιπαραδείγματος (αρκεί να θεωρήσετε 2 παίκτες και λίγα αγαθά), να δείξετε ότι για τον παραπάνω αλγόριθμο ανάθεσης, δεν υπάρχουν πληρωμές που εξασφαλίζουν φιλαλήθεια, ακόμη και στην περίπτωση που οι συναρτήσεις ωφέλειας είναι submodular.

Πρόβλημα 3. (26 μονάδες) Θεωρούμε πρόβλημα δρομολόγησης εργασιών, όπου $n = 5$ παίκτες έχουν από μία εργασία μοναδιαίας διάρκειας, και έχουμε στη διάθεσή μας έναν μόνο υπολογιστή. Η αξία του παίκτη i αν η εργασία του δρομολογηθεί στη θέση j, $j \in \{1, \ldots, 5\}$, είναι $v_i \cdot \alpha^{j-1}$ (το v_i είναι ιδιωτική παράμετρος του παίκτη i, ενώ το $\alpha \in (0,1)$ είναι δημόσια παράμετρος κοινή για όλους τους παίκτες).

Θεωρούμε την δρομολόγηση που μεγιστοποιεί την κοινωνική ωφέλεια (social welfare): κάθε παίκτης i υποβάλει προσφορά b_i, οι παίκτες ταξινομούνται σε φθίνουσα σειρά με βάση τις προσφορές τους $b_1 > b_2 > \cdots > b_5$, και η εργασία του i-οστού παίκτη δρομολογείται στην i-οστή θέση.

1. (7 μον.) Έστω ότι η τιμή που πληρώνει ο i-οστός παίκτης είναι $b_{i+1} \cdot \alpha^{i-1}$. Ποια είναι η ωφέλεια (utility) του παίκτη i σε αυτή την περίπτωση; Να δείξετε, μέσω αντιπαραδείγματος, ότι αυτές οι τιμές δεν εξασφαλίζουν φιλαλήθεια (truthfulness).

2. (11 μον.) Να προτείνετε τιμές που εξασφαλίζουν τόσο φιλαλήθεια όσο και individual rationality. Να αιτιολογήσετε κατάλληλα την φιλαλήθεια του μηχανισμού για τις τιμές που προτείνετε. Να δείξετε ότι οι πληρωμές του Myerson μηχανισμού για μονο-παραμετρικές δημοπρασίες και οι πληρωμές του VCG μηχανισμού οδηγούν στις ίδιες ακριβώς τιμές για τους παίκτες.

3. (8 μον.) Αν γνωρίζουμε ότι οι ιδιωτικές παράμετροι v_i των παικτών προκύπτουν ως ανεξάρτητα δείγματα από την ίδια regular κατανομή $\mathcal{D}$, πως μπορούμε να ενσωματώσουμε reserve prices στον μηχανισμό του προηγούμενου ερωτήματος ώστε να διατηρήσουμε τη φιλαλήθεια του μηχανισμού; Πως υπολογίζονται τα reserve prices που θα χρησιμοποιήσουμε.

Πρόβλημα 4. (24 μονάδες) Θεωρούμε μια αγορά με 3 παίκτες / αγοραστές, $N = \{1, 2, 3\}$, και 3 μοναδικά, αδιαίρετα αγαθά, $M = \{A, B, C\}$. Κάθε αγοραστής είναι unit-demand, δηλαδή διεκδικεί το πολύ ένα αγαθό. Οι αποτιμήσεις δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Αγοραστής	**Αξία για A**	**Αξία για B**	**Αξία για Γ**
Παίκτης 1	10	5	2
Παίκτης 2	8	6	1
Παίκτης 3	7	4	3

1. (8 μον.) Να εκτελέσετε την αυξάνουσα δημοπρασία (ascending auction) Kelso-Crawford (που είδαμε στο μάθημα), αρχικοποιώντας τις τιμές όλων των αγαθών στο 0 χρησιμοποιώντας βήμα αύξησης $\epsilon = 1$. Καταγράψτε ανά γύρο το τρέχον διάνυσμα τιμών των αγαθών και την προσωρινή ανάθεση αγαθών στους παίκτες στο τέλος κάθε γύρου. Σε περίπτωση ισοπαλιών, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε οποιονδήποτε κανόνα επίλυσης (αρκεί η επίλυση να είναι συνεπής για όλη τη διάρκεια της δημοπρασίας).

2. (6 μον.) Ποιες είναι οι τιμές των αγαθών και ποια είναι η ανάθεση αγαθών στους παίκτες στο τέλος του αλγορίθμου; Να βρείτε ένα σύνολο τιμών για τα αγαθά και μια ανάθεση αγαθών στους παίκτες που αποτελούν Walrasian ισορροπία. Είναι η Walrasian ισορροπία που υπολογίσατε μοναδική;

3. (4 μον.) Αληθεύει ότι η ανάθεση κάθε Walrasian ισορροπίας οφείλει να μεγιστοποιεί την κοινωνική ευημερία (social welfare) της αγοράς; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

4. (6 μον.) Να υπολογίσετε τις VCG πληρωμές αναλυτικά και να τις συγκρίνετε με τις ελάχιστες τιμές που οδηγούν σε Walrasian ισορροπία.

Πρόβλημα 5. (18 μονάδες) Θεωρούμε n παίκτες τοποθετημένους στην ευθεία $\mathbb{R}$ των πραγματικών. Κάθε παίκτης i έχει ως ιδιωτική πληροφορία την πραγματική του τοποθεσία $x_i \in \mathbb{R}$. Θέλουμε να σχεδιάσουμε έναν μηχανισμό που θα συλλέγει τις δηλώσεις των παικτών $(z_1, \dots, z_n)$ σχετικά με την τοποθεσία τους και θα υπολογίζει τη θέση $y \in \mathbb{R}$ μίας δημόσιας εγκατάστασης ώστε να ελαχιστοποιηθεί το κοινωνικό κόστος $\sum_{i=1}^{n} |z_i - y|$ που προκύπτει με βάση τις δηλώσεις των παικτών. Θεωρούμε πως το ατομικό κόστος κάθε παίκτη δίνεται από την απόσταση της πραγματικής του τοποθεσίας από την θέση y και είναι ίσο με $|x_i - y|$ (επαυξημένο με ενδεχόμενες πληρωμές, αν υπάρχουν).

1. (8 μον.) Πως επιλέγουμε τη θέση y ώστε να ελαχιστοποιηθεί το κοινωνικό κόστος; Να εξηγήσετε πως μπορεί να εφαρμοστεί ο VCG μηχανισμός σε αυτό το πρόβλημα. Ποια είναι η μορφή των VCG πληρωμών για αυτό το πρόβλημα;

2. (5 μον.) Να διερευνήσετε αν υπάρχει τρόπος να επιλέξουμε τη θέση y ώστε ο μηχανισμός που προκύπτει να ελαχιστοποιεί το κοινωνικό κόστος και ταυτόχρονα να εγγυάται φιλαλήθεια (μόνο λόγω του τρόπου με τον οποίο επιλέγουμε τη θέση y, χωρίς την ανάγκη επιβολής επιπλέον "οικονομικών" κινήτρων ή αντικινήτρων).

3. (5 μον.) Να διερευνήσετε αν υπάρχει τρόπος να επιλέξουμε τη θέση y ώστε ο μηχανισμός που προκύπτει να ελαχιστοποιεί το μέγιστο ατομικό κόστος κάθε παίκτη $\max_{i=1,\ldots,n}\{|y-z_i|\}$ και ταυτόχρονα να εγγυάται φιλαλήθεια (μόνο λόγω του τρόπου με τον οποίο επιλέγουμε τη θέση y, χωρίς την ανάγκη επιβολής επιπλέον "οικονομικών" κινήτρων ή αντικινήτρων).

Πρόβλημα 6. (22 μονάδες) Θεωρούμε δημοπρασία με ένα αγαθό και δύο παίκτες. Η αξία x του πρώτου παίκτη προέρχεται από την ομοιόμορφη κατανομή στο $[0,4]$ και η αξία y του δεύτερου παίκτη προέρχεται από την ομοιόμορφη κατανομή στο $[1,3]$ (τα x και y είναι ανεξάρτητα).

1. (4 μον.) Να προσδιορίσετε τα virtual valuations και τα reserve prices των δύο παικτών.

2. (8 μον.) Να περιγράψετε τη *βέλτιστη δημοπρασία*, η οποία μεγιστοποιεί τα αναμενόμενα έσοδα του δημοπράτη, και να βρείτε σε ποιες περιοχές του ορθογωνίου $[0,4]\times[1,3]$ κερδίζει το αντικείμενο ο πρώτος παίκτης, σε ποιες ο δεύτερος και σε ποιες κανένας από τους δύο, καθώς και την τιμή του αγαθού για κάθε περιοχή. Να κάνετε το ίδιο για τη δημοπρασία 2ης τιμής με κοινό reserve price 2 για τους δύο παίκτες και για την συνήθη δημοπρασία 2ης τιμής χωρίς reserve prices.

3. (10 μον.) Να υπολογίσετε τα αναμενόμενα έσοδα του δημοπράτη ως συνάρτηση της αξίας x του πρώτου παίκτη, (ι) για $x \in [2,3]$, και (ιι) για $x \in [3,4]$, τόσο για τη βέλτιστη δημοπρασία, η οποία μεγιστοποιεί τα αναμενόμενα έσοδα του δημοπράτη, όσο και για τη δημοπρασία 2ης τιμής με reserve price 2 για τον πρώτο παίκτη (μπορούμε να θεωρήσουμε reserve price 2 και για τον 2ο παίκτη). Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις για τα αναμενόμενα έσοδα από τη βέλτιστη δημοπρασία και από τη δημοπρασία 2ης τιμής για $x \in [2,4]$. Τι παρατηρείτε για τα αναμενόμενα έσοδα του δημοπράτη στις δύο δημοπρασίες στις περιπτώσεις όπου $x \in [2,3]$ και όπου $x \in [3,4]$. Πως η διαφορετική αντιμετώπιση των δύο παικτών στη βέλτιστη δημοπρασία συμβάλει στην μεγιστοποίηση των εσόδων του δημοπράτη;