ΑΛΓΟΡΙΘΜΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ **ΑΛΜΑ/ΕΔΕΜΜ**

Διδάσκοντες: Θ. Λιανέας, Ε. Μαρκάκης, Δ. Φωτάκης

Εαρινό εξάμηνο 2026

1η σειρά ασκήσεων **Προθεσμία παράδοσης: 3 Απριλίου 2026**

Πρόβλημα 1. (13 μονάδες) Η άσκηση αυτή αφορά την αφαίρεση κυριαρχούμενων στρατηγικών.

(i) (5 μονάδες)

Έστω το εξής παίγνιο:

	W	X	Y	Z
A	10, 10	5, 12	0, 15	0, 10
B	12, 5	8, 8	4, 10	2, 5
C	15, 0	10, 4	6, 6	3, 4
D	10, 0	5, 2	4, 3	1, 1

Να εκτελέσετε επαναλαμβανόμενη αφαίρεση ισχυρά κυριαρχούμενων στρατηγικών και να δείξετε ποιες στρατηγικές επιβιώνουν όταν ολοκληρωθεί ο αλγόριθμος.

(ii) (8 μονάδες) Έστω το εξής παίγνιο:

	W	X	Y
A	1, 1	1, 1	0, 0
B	1, 1	2, 2	2, 2
C	0, 0	2, 2	2, 2

Να επιδείξετε 2 διαφορετικές εκτελέσεις της επαναλαμβανόμενης αφαίρεσης ασθενώς κυριαρχούμενων στρατηγικών από όπου να φαίνεται ότι μπορούμε να καταλήξουμε σε διαφορετικό τελικό παίγνιο. Υπάρχουν στρατηγικές που επιβιώνουν ανεξαρτήτως της σειράς με την οποία κάνουμε τις αφαιρέσεις;

Πρόβλημα 2. (13 μονάδες) Θεωρήστε το εξής παίγνιο που μοντελοποιεί το δίλημμα του φυλακισμένου με τις επιλογές $\{C, D\}$ για κάθε παίκτη.

	C	D
C	2,2	0, 3
D	3, 0	1, 1

Ορίζουμε ένα νέο παίγνιο με βάση το παραπάνω, όπου τώρα η τελική ωφέλεια του κάθε παίκτη εξαρτάται και από την ωφέλεια που έχει ο άλλος παίκτης στο αρχικό παίγνιο (επιτρέπουμε δηλαδή να νοιάζεται σε κάποιο βαθμό ο ένας παίκτης για τον άλλο). Αν π.χ. (s, t) είναι το ζεύγος στρατηγικών που επιλέγουν οι 2 παίκτες τότε η τελική χρησιμότητα του παίκτη 1 είναι

$$u_1'(s,t) = u_1(s,t) + \alpha u_2(s,t)$$

όπου α μια παράμετρος με $\alpha \in [0,1]$, και $u_1(s,t), u_2(s,t)$ είναι οι χρησιμότητες στο αρχικό παίγνιο. Ομοίως για τον παίκτη 2 έχουμε $u_2'(s,t) = u_2(s,t) + \alpha u_1(s,t)$

(i) (7 μονάδες) Βρείτε για ποιες τιμές του α, το νέο παίγνιο εξακολουθεί να αποτελεί αναπαράσταση του διλήμματος του φυλακισμένου (όπως το ορίσαμε στο μάθημα)?

(ii) (6 μονάδες) Βρείτε αν υπάρχει εύρος τιμών για το α, έτσι ώστε το προφίλ (C,C) να είναι σημείο ισορροπίας στο νέο παίγνιο.

Πρόβλημα 3. (10 μονάδες)

Όταν σε ένα παίγνιο το πλήθος των αμιγών στρατηγικών είναι άπειρο, δεν μπορούμε πλέον να έχουμε αναπαράσταση με μορφή πινάκων. Ισχύουν όμως οι ίδιοι ορισμοί για τα σημεία ισορροπίας. Έστω το εξής παίγνιο: Ο ιδιοκτήτης μιας εταιρείας (παίκτης 1) προσλαμβάνει έναν υπάλληλο (παίκτης 2) και του αναθέτει κάποια δουλειά. Ο ιδιοκτήτης πρέπει να αποφασίσει για τον μισθό που θα πάρει ο υπάλληλος, έστω $x \in \mathbb{R}^+$. Ο υπάλληλος πρέπει να αποφασίσει για το πόση προσπάθεια θα καταβάλει για τη δουλειά που έχει να κάνει. Έστω y το επίπεδο της προσπάθειας, με $y \in \mathbb{R}^+$. Θεωρούμε ότι οι συναρτήσεις ωφέλειας των 2 παικτών όταν ο ιδιοκτήτης προσφέρει μισθό x και ο υπάλληλος επιλέγει επίπεδο προσπάθειας y, είναι:

$$u_1(x,y) = 2\sqrt{y} - (x+2)^2 + 5xy$$
$$u_2(x,y) = x - \frac{y^2}{2} + \alpha xy$$

Το α παραπάνω είναι μια σταθερά, με $\alpha \geq 1$. Διαισθητικά, ο αρνητικός τετραγωνικός όρος στην u_1 εκφράζει την δυσαρέσκεια του ιδιοκτήτη αν αυξηθεί πολύ ο μισθός, ενώ παράλληλα η εξάρτηση από την προσπάθεια του υπαλλήλου είναι με θετικό πρόσημο. Τα αντίστροφα ισχύουν για τον υπάλληλο.

Βρείτε (αν υπάρχουν) σημεία ισορροπίας με αμιγείς στρατηγικές.

Πρόβλημα 4. (20 μονάδες)

(i) (8 μονάδες) Θεωρήστε το παρακάτω παίγνιο μηδενικού αθροίσματος

$$\begin{bmatrix} a & 10 \\ 8 & d \end{bmatrix}$$

Για τις παραμέτρους a, d, ισχύει ότι $0 \leq a < 10$, και $d > 10$. Αποφανθείτε για το αν υπάρχει πάντα σημείο ισορροπίας με αμιγείς στρατηγικές. Αν δεν υπάρχει, βρείτε ένα τέτοιο παράδειγμα με συγκεκριμένες τιμές για τα a, d. Διαφορετικά, δείξτε ότι για κάθε $a \in [0,10)$ και $d \in (10,\infty)$, θα πρέπει να υπάρχει σημείο ισορροπίας με αμιγείς στρατηγικές.

(ii) (12 μονάδες) Βρείτε όλα τα σημεία ισορροπίας με αμιγείς και με μεικτές στρατηγικές στο παρακάτω παίγνιο:

$$\begin{bmatrix} 0,0 & 5,2 & 3,4 & 6{,}5 \\ 2,6 & 3,5 & 5,3 & 1{,}0 \end{bmatrix}$$

Πρόβλημα 5. (12 μονάδες) Θεωρήστε το παίγνιο συμφόρησης σε οδικά δίκτυα που είδαμε στο μάθημα και περιγράφεται στις διαφάνειες 35-37 της Ενότητας 2. Έστω επίσης ότι έχουμε 17 παίκτες. Κάθε παίκτης έχει να διαλέξει ανάμεσα σε 3 διαδρομές, για να πάει από ένα αρχικό σημείο σε έναν προορισμό και η χρονική καθυστέρηση εξαρτάται από το πόσοι άλλοι χρήστες επιλέγουν την ίδια διαδρομή. Βρείτε όλα τα σημεία ισορροπίας με αμιγείς στρατηγικές, αν υπάρχουν. Εξηγήστε τον τρόπο σκέψης σας για την ανάλυση του παιγνίου.

Πρόβλημα 6. (12 μονάδες)

(i) (6 μονάδες) Θεωρήστε ένα $n \times n$ παίγνιο όπου όλες οι ωφέλειες είναι στο διάστημα $[0, 1]$. Ας κατασκευάσουμε το εξής προφίλ μεικτών στρατηγικών για τους 2 παίκτες: Ο π. 1 επιλέγει 2 γραμμές, την i και j, ισοπίθανα. Ο π. 2 επιλέγει και αυτός 2 στήλες, την k και ℓ ισοπίθανα. Επιπλέον, έχουμε επιλέξει τις γραμμές και τις στήλες έτσι ώστε, η i να είναι βέλτιστη απόκριση στην στήλη k, και η ℓ να είνα βέλτιστη απόκριση στην γραμμή j.

Με τις υποθέσεις αυτές, βρείτε την μικρότερη τιμή του ϵ, για την οποία το παραπάνω προφίλ είναι ϵ-σημείο ισορροπίας.

(ii) (6 μονάδες) Έστω ένα $n \times n$ παίγνιο 2 παικτών με πίνακες A, B, όπου όλες οι ωφέλειες είναι στο διάστημα $[0, 1]$. Θεωρήστε επίσης ότι σε κάθε γραμμή και σε κάθε στήλη τόσο του πίνακα A όσο και του B, ο αριθμός των μη μηδενικών ωφελειών είναι το πολύ k (τα παίγνια αυτά ονομάζονται k-sparse). Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon \geq k/n$, το προφίλ μεικτών στρατηγικών (p, p), όπου p είναι η ομοιόμορφη στρατηγική $p = (1/n, 1/n, \ldots, 1/n)$ αποτελεί ε-σημείο ισορροπίας.

Πρόβλημα 7. (20 μονάδες)

1. Υλοποιήστε τον αλγόριθμο Fictitious Play, από την Ενότητα 3 για γενικά παίγνια 2 παικτών, κατά προτίμηση σε Python (ή Java). Η συνθήκη τερματισμού του αλγορίθμου θα είναι ως εξής: Ορίστε στο πρόγραμμά σας μία πολύ μικρή σταθερά ε. Ορίστε επίσης μία παράμετρο T_{max}, η οποία θα υποδηλώνει τον μέγιστο αριθμό επιτρεπτών επαναλήψεων. Ο αλγόριθμος θα τερματίζει είτε όταν ολοκληρωθούν T_{max} γύροι, είτε όταν μετά από καποιον γύρο, θεωρώντας τις εμπειρικές κατανομές μέχρι αυτό το γύρο ως μεικτές στρατηγικές, κανένας παίκτης δεν κερδίζει περισσότερο από ε παίζοντας κάτι άλλο (δηλαδή φτάσαμε σε ϵ-Nash equilibrium). Στη δεύτερη περίπτωση θα λέμε ότι ο αλγόριθμος συγκλίνει σε σημείο ισορροπίας.

2. Χρησιμοποιώντας γεννήτριες τυχαίων αριθμών, να παράξετε τυχαία $n \times n$ 0-sum παίγνια, με εύρος στο $[0, 1]$, δηλαδή κάθε στοιχείο του πίνακα θα είναι ένας τυχαίος αριθμός στο διάστημα [0, 1]. Χρησιμοποιήστε τουλάχιστον 3 διαφορετικές τιμές για το n (με $n \geq 10$, ενδεικτικά: 20, 50, 100 ή αν θέλετε και πιο μεγάλες τιμές) και παράξτε 10 τυχαία παίγνια για κάθε τιμή του n. Για το ϵ, χρησιμοποιήστε τιμές όπως 0.01 ή 0.001 (δηλαδή τιμές κοντά στο 0), ενώ για το T_{max}, χρησιμοποιήστε τάξη μεγέθους 2^n (γενικά αφήστε περιθώριο για τουλάχιστον μερικές χιλιάδες επαναλήψεις). Σχολιάστε την επίδοση του αλγορίθμου, π.χ. πόσο συχνά συγκλίνει σε σημείο ισορροπίας, και μετά από πόσες επαναλήψεις κατά μέσο όρο, καθώς και ό,τι άλλο κρίνετε ενδιαφέρον.

3. Να επαναλάβετε το προηγούμενο ερώτημα αλλά τώρα για γενικά παίγνια μη μηδενικού αθροίσματος. Καθώς η σύγκλιση μπορεί να εξαρτάται και από την παράμετρο ε, για πληρότητα είναι καλό να χρησιμοποιήσετε 2-3 τιμές για το ε και να δείτε αν υπάρχει κάποια σημαντική διαφορά (αυτό αφορά και το προηγούμενο υποερώτημα).

Ως παραδοτέα για την άσκηση αυτή είναι ο κώδικάς σας για το Fictitious Play και ο σχολιασμός σας για την συμπεριφορά του αλγορίθμου. Δεν χρειάζεται να παραδώσετε τα τυχαία παίγνια που θα παράξετε (θα πρέπει όμως να τα διατηρήσετε αποθηκευμένα στον υπολογιστή σας).