8

ΤΙ ΕΙΝΑΙ ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΤΟΥ CANTOR;

KURT GÖDEL

1. Η έννοια του πληθικού αριθμού

Το πρόβλημα του συνεχούς του Cantor δεν είναι παρά το ερώτημα: Πόσα σημεία υπάρχουν πάνω σε μία ευθεία γραμμή του ευκλείδειου χώρου; Μια ισοδύναμη ερώτηση είναι: Πόσα είναι τα διαφορετικά σύνολα ακέραιων αριθμών;

Το ερώτημα αυτό μπορεί, φυσικά, να τεθεί μόνο αφού πρώτα επεκταθεί η έννοια του «αριθμού» σε άπειρα σύνολα. Γι' αυτόν το λόγο θα μπορούσε κανείς να αμφιβάλει αν αυτή η επέκταση μπορεί να γίνει με μονοσήμαντο τρόπο και, επομένως, αν δικαιολογείται η διατύπωση του προβλήματος με τους απλούς όρους που χρησιμοποιήθηκαν πιο πάνω. Ωστόσο, μία βαθύτερη ανάλυση δείχνει ότι ο ορισμός των άπειρων αριθμών από τον Cantor έχει πράγματι αυτόν τον μονοσήμαντο χαρακτήρα. Πράγματι, ό,τι και αν σημαίνει ο όρος «αριθμός» όταν εφαρμόζεται σε άπειρα σύνολα, ασφαλώς πρέπει να έχει την ιδιότητα: ο αριθμός των ατόμων που ανήκουν σε μία τάξη (class) δεν αλλάζει αν, εφόσον δεν μεταβληθούν τα αντικείμενα, αλλάξει κανείς με οποιονδήποτε τρόπο τις ιδιότητες ή τις αμοιβαίες σχέσεις τους (λ. χ. το χρώμα τους ή την κατανομή τους στο χώρο). Από αυτό, όμως, συνάγεται αμέσως ότι δύο σύνολα (τουλάχιστον δύο σύνολα αντικειμένων του χωρο-χρονικού κόσμου, που οι ιδιότητες και οι σχέσεις τους μπορούν να μεταβληθούν) θα έχουν τον ίδιο πληθικό αριθμό, αν τα στοιχεία τους μπορούν να τεθούν σε αμφι-μονοσήμαντη αντιστοιχία· κι αυτό δεν είναι παρά ο ορισμός του Cantor για την ισότητα των αριθμών. Γιατί αν υπάρχει μία τέτοια αντιστοιχία ανάμεσα σε δύο σύνολα *A* και *B*, είναι δυνατόν (τουλάχιστον θεωρητικά) να αντικαταστήσουμε τις ιδιότητες και τις σχέσεις κάθε στοιχείου *A* με εκείνες του αντίστοιχου στοιχείου του *B*· έτσι το *A* μετασχηματίζεται σε ένα σύνολο που δεν είναι δυνατόν να διακριθεί από το *B*, επομένως έχει τον ίδιο πληθικό αριθμό. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι ένα τετράγωνο και ένα τμήμα ευθείας είναι εντελώς καλυμμένα με υλικά σημεία (έτσι ώστε σε κάθε σημείο τους να βρίσκεται ακριβώς ένα υλικό σημείο)· δεδομένου ότι μπορεί να αποδειχθεί ότι υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ανάμεσα στα σημεία ενός τετραγώνου και στα σημεία ενός τμήματος ευθείας και, επομένως, ανάμεσα στα αντίστοιχα υλικά σημεία, συνάγεται ότι τα υλικά σημεία του τετραγώνου μπορούν να αναδιαταχθούν ώστε να καλύπτουν ακριβώς το τμήμα της ευθείας, και αντίστροφα. Είναι αλήθεια πως τέτοιες σκέψεις έχουν άμεση εφαρμογή μόνο στα φυσικά αντικείμενα, αλλά δύσκολα θα μπορούσε να θεωρηθεί ικανοποιητικός ένας ορισμός της έννοιας του «αριθμού» που θα εξαρτιόταν από τη φύση των αντικειμένων που απαριθμούνται.

Ώστε δεν έχουμε άλλη επιλογή, και πρέπει να δεχθούμε τον ορισμό του Cantor για την ισότητα των αριθμών, από τον οποίο εύκολα αντλούμε τους ορισμούς του «μεγαλύτερος» και «μικρότερος» για τους άπειρους αριθμούς, εφόσον συμφωνήσουμε να λέμε ότι ο πληθικός αριθμός M ενός συνόλου A είναι μικρότερος του πληθικού αριθμού N ενός συνόλου B, αν το M διαφέρει από το N αλλά είναι ίσο προς τον πληθικό αριθμό κάποιου υποσυνόλου του B. Το να υπάρχει ένας πληθικός αριθμός με μία ορισμένη ιδιότητα σημαίνει εξ ορισμού ότι υπάρχει ένα σύνολο που έχει τέτοιο πληθικό αριθμό. Με βάση αυτούς τους ορισμούς είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι υπάρχει ένας άπειρος αριθμός από διαφορετικούς πληθικούς αριθμούς ή «δυνάμεις», και ιδιαίτερα ότι ο αριθμός των υποσυνόλων ενός συνόλου είναι πάντοτε μεγαλύτερος από τον αριθμό των στοιχείων του. Επιπλέον, οι αριθμητικές πράξεις μπορούν να επεκταθούν (και πάλι όχι αυθαίρετα) στους άπειρους αριθμούς (σ' αυτές περιλαμβάνονται το άθροισμα και το γινόμενο ενός άπειρου αριθμού όρων ή παραγόντων) και μπορούν να αποδειχθούν όλοι σχεδόν οι συνήθεις κανόνες του αριθμητικού λογισμού.

Αλλά και μ' αυτά ακόμα, το πρόβλημα του προσδιορισμού του πληθικού αριθμού ενός μεμονωμένου συνόλου, όπως είναι το γραμμικό συνεχές, δεν θα ήταν καλά καθορισμένο, αν δεν υπήρχε κάποια συστηματική παράσταση των άπειρων πληθικών αριθμών, ανάλογη με τη δεκαδική σημειογραφία για τους ακεραίους. Ωστόσο, υπάρχει μια τέτοια συστηματική παράσταση δυνάμει του θεωρήματος, σύμφωνα με το οποίο για κάθε πληθικό αριθμό και κάθε σύνολο πληθικών αριθμών[1] υπάρχει ακριβώς ένας πληθικός αριθμός αμέσως μεγαλύτερος στην τάξη του μεγέθους, και ότι στη σειρά που λαβαίνουμε μ' αυτόν τον τρόπο παρουσιάζονται όλοι οι πληθικοί αριθμοί όλων των συνόλων[2]. Το θεώρημα αυτό επιτρέπει να συμβολίσουμε με $\aleph_0$ (που είναι ο πληθικός αριθμός των άπειρων «αριθμήσιμων» συνόλων) τον πληθικό αριθμό που διαδέχεται αμέσως το σύνολο των πεπερασμένων αριθμών, με $\aleph_\omega$ σημειώνουμε τον πληθικό αριθμό που διαδέχεται όλα τα $\aleph_i$, όπου το i είναι ακέραιος αριθμός, με $\aleph_{\omega+1}$ τον επόμενο κτλ. Η θεωρία των διατακτικών αριθμών επιτρέπει την απεριόριστη επέκταση αυτής της σειράς.

2. Το πρόβλημα του συνεχούς, η υπόθεση του συνεχούς και τα σημερινά αποτελέσματα σχετικά με την αλήθειά της.

Ώστε η ανάλυση της φράσης «πόσα» προσδιορίζει μονοσήμαντα το νόημα του ερωτήματος που διατυπώθηκε στη δεύτερη αράδα τούτου του άρθρου: το πρόβλημα είναι ποιο από τα $\aleph$ είναι ο αριθμός των σημείων μιας ευθείας γραμμής ή –και τούτο είναι ισοδύναμο– οποιουδήποτε άλλου συνεχούς (οσωνδήποτε διαστάσεων) του ευκλείδειου χώρου. Ο Cantor, αφού απέδειξε ότι αυτός ο αριθμός είναι μεγαλύτερος από τον $\aleph_0$, διατύπωσε την εικασία ότι είναι ο $\aleph_1$. Μία ισοδύναμη πρόταση είναι τούτη: Κάθε υποσύνολο του συνεχούς έχει τη δύναμη του συνόλου των ακεραίων ή τη δύναμη ολόκληρου του συνεχούς. Αυτή είναι η υπόθεση του Cantor για το συνεχές.

Αλλά μολονότι η θεωρία των συνόλων του Cantor αναπτύχθηκε εδώ και εβδομήντα χρόνια, και το πρόβλημα αυτό έχει μεγάλη σημασία γι' αυτήν, μέχρι σήμερα τίποτε δεν έχει αποδειχθεί σχετικά με το ποιος είναι ο πληθάριθμος του συνεχούς ή με το αν τα υποσύνολά του ικανοποιούν τη συνθήκη που μόλις αναφέραμε· γνωρίζουμε μόνο ότι: (1) ο πληθάριθμος του συνεχούς δεν είναι πληθικός αριθμός ενός ορισμένου τύπου, δηλ. δεν είναι το όριο ενός αριθμήσιμου αριθμού μικρότερων πληθικών αριθμών[3], και (2) ότι η πρόταση που μόλις αναφέραμε σχετικά με τα υποσύνολα του συνεχούς αληθεύει για ένα απειροστό κλάσμα αυτών των υποσυνόλων, τα αναλυτικά[4] σύνολα[5]. Για τον πληθάριθμο του συνεχούς δεν μπορεί να προσδιορισθεί ούτε ένα ανώτερο όριο, όσο μεγάλο, ούτε το ποιόν του μας είναι περισσότερο γνωστό απ' ό,τι το ποσόν του. Είναι άγνωστο αν πρόκειται για έναν κανονικό ή μεμονωμένο αριθμό, προσιτό ή απρόσιτο, και (εκτός από το αρνητικό αποτέλεσμα του König) ποιος είναι ο συνοριακός χαρακτήρας του (βλ. σημ. 4). Πέρα από τα αποτελέσματα που μόλις αναφέραμε, μας είναι γνωστός μόνο ένας μεγάλος αριθμός συνεπειών της εικασίας του Cantor και μερικές προτάσεις που είναι ισοδύναμες με αυτήν (Sierpinski, 1934α).

Αυτή η φανερή αδυναμία είναι ακόμα πιο εντυπωσιακή, αν το πρόβλημα εξετασθεί στο πλαίσιο γενικών ζητημάτων της αριθμητικής των πληθικών αριθμών. Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι ο πληθάριθμος του συνεχούς είναι ίσος με $2^{\aleph_0}$. Έτσι το πρόβλημα του συνεχούς παρουσιάζεται ως ερώτημα σχετικό με τον «πίνακα πολλαπλασιασμού» των πληθικών αριθμών, δηλ. ως το πρόβλημα του προσδιορισμού της τιμής ενός ορισμένου άπειρου γινόμενου (στην πραγματικότητα πρόκειται για το απλούστερο μη κοινότοπο γινόμενο). Ωστόσο, δεν υπάρχει ούτε ένα άπειρο γινόμενο (με παράγοντες > 1) για το οποίο να μπορεί να προσδιορισθεί ένα ανώτερο όριο. Αυτά που γνωρίζουμε σχετικά με τον προσδιορισμό άπειρων γινομένων περιορίζονται σε δύο κατώτατα όρια που οφείλονται στον Cantor και στον König (το δεύτερο συνεπάγεται το αρνητικό θεώρημα που αναφέρθηκε προηγουμένως σχετικά με τον πληθάριθμο του συνεχούς), και σε μερικά θεωρήματα σχετικά με την αναγωγή γινομένων διαφορετικών παραγόντων σε εκθετικούς, και την αναγωγή εκθετικών σε εκθετικούς με μικρότερες βάσεις ή εκθέτες. Τα θεωρήματα αυτά ανάγουν[6] όλο το πρόβλημα του υπολογισμού άπειρων γινομένων στον προσδιορισμό του $\aleph_\alpha^{cf(\aleph_\alpha)}$ και την εκτέλεση ορισμένων θεμελιωδών πράξεων με διατακτικούς αριθμούς, όπως ο καθορισμός του ορίου μιας σειράς διατακτικών αριθμών. Όλα τα γινόμενα και οι πληθάριθμοι μπορούν να υπολογισθούν[7] με ευκολία, αν δεχθούμε τη «γενικευμένη υπόθεση του συνεχούς», δηλ. αν υποθέσουμε ότι $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ για κάθε α, ή, με άλλα λόγια, ότι ο αριθμός των υποσυνόλων ενός συνόλου με πληθάριθμο $\aleph_\alpha$ είναι $\aleph_{\alpha+1}$. Αλλά αν δεν χρησιμοποιήσουμε αναπόδεικτες υποθέσεις, τότε δεν γνωρίζουμε ούτε αν το $\mu < \nu$ συνεπάγεται το $2^\mu < 2^\nu$ (μολονότι είναι κοινοτοπία το ότι συνεπάγεται το $2^\mu \leqslant 2^\nu$) ούτε αν $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$.

3. *Άλλη διατύπωση του προβλήματος με βάση μία ανάλυση των θεμελίων της θεωρίας των συνόλων και αποτελέσματα που έχουν βρεθεί μ' αυτόν τον τρόπο.*

Αυτή η πενιχρότητα των αποτελεσμάτων, ακόμα και για τα πιο βασικά ερωτήματα αυτού του πεδίου, μπορεί να οφείλεται, ώς ένα σημείο, σε καθαρά μαθηματικές δυσκολίες· ωστόσο φαίνεται (βλ. Κεφ. 4) ότι υπάρχουν και βαθύτεροι λόγοι γι' αυτό, και ότι θα πλησιάσουμε στην πλήρη λύση αυτών των προβλημάτων μόνο με μια βαθύτερη ανάλυση (από ό,τι συνηθίζουν να δίνουν τα μαθηματικά) του νοήματος των όρων που υπεισέρχονται σ' αυτά (όπως «σύνολο», «αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία» κτλ.) και των αξιωμάτων που στηρίζουν τη χρήση τους. Έχουν ήδη προταθεί αρκετές αναλύσεις. Ας δούμε λοιπόν τι προσφέρουν για τη λύση του προβλήματός μας.

Πρώτ' απ' όλα υπάρχει ο ιντουισιονισμός του Brouwer· τα αποτελέσματά του είναι εντελώς καταστρεπτικά. Όλη η θεωρία των $\aleph$ που είναι μεγαλύτερα από το $\aleph_1$ απορρίπτεται ως στερούμενη νοήματος (Brouwer, 1909: 569). Η εικασία του Cantor αποκτά διάφορα νοήματα που, όλα τους, αν και πολύ ενδιαφέροντα αυτά καθ' εαυτά, είναι πολύ διαφορετικά από το αρχικό μας πρόβλημα. Αυτά οδηγούν εν μέρει σε καταφατικές απαντήσεις και εν μέρει σε αρνητικές απαντήσεις (Brouwer, 1907, I:9· II:2). Ωστόσο, σ' αυτό το πεδίο, υπάρχουν πράγματα που δεν έχουν διασαφηνιστεί αρκετά. Η ημι-ιντουισιονιστική άποψη των H. Poincaré και H. Weyl[8] δύσκολα θα διέσωζε ένα ουσιαστικά μεγαλύτερο τμήμα της θεωρίας των συνόλων.

Αυτή η αρνητική στάση απέναντι στη συνολοθεωρία του Cantor και απέναντι στα κλασικά μαθηματικά, των οποίων αυτή αποτελεί τη φυσική γενίκευση, δεν είναι ωστόσο η αναγκαία συνέπεια μιας διεξοδικής εξέτασης των θεμελίων τους, αλλά μονάχα το αποτέλεσμα μιας ορισμένης φιλοσοφικής αντίληψης για τη φύση των μαθηματικών, αντίληψης που δέχεται μαθηματικά αντικείμενα μόνο στο βαθμό που αυτά μπορούν να ερμηνευθούν ως δικές μας κατασκευές ή, τουλάχιστον, μπορούν να δοθούν εντελώς στη μαθηματική εποπτεία. Αν κάποιος θεωρεί ότι τα μαθηματικά αντικείμενα υπάρχουν ανεξάρτητα από τις κατασκευές μας και από το αν έχουμε μία εποπτεία του καθενός τους χωριστά, και δεν απαιτεί παρά μόνο το να μας είναι αρκετά σαφείς οι γενικές μαθηματικές έννοιες, ώστε να είμαστε σε θέση να αναγνωρίσουμε την ορθότητά τους και την αλήθεια των αξιωμάτων που τις αφορούν, τότε γι' αυτόν υπάρχει, νομίζω, μία ικανοποιητική θεμελίωση της συνολοθεωρίας του Cantor που να διατηρεί ολόκληρη την αρχική της ευρύτητα και σημασία· εννοώ την αξιωματική διατύπωση της θεωρίας των συνόλων με την ερμηνεία που σκιαγραφώ παρακάτω.

Εκ πρώτης όψεως μπορεί να έχει κανείς την εντύπωση ότι, εξαιτίας των παραδόξων της θεωρίας των συνόλων, ένα τέτοιο εγχείρημα είναι καταδικασμένο σε αποτυχία, αλλά μια διεξοδικότερη εξέταση του θέματος δείχνει ότι αυτά δεν προκαλούν καμία δυσκολία. Αυτά είναι βέβαια ένα πολύ σοβαρό πρόβλημα, όχι όμως για τα μαθηματικά, αλλά για τη λογική και την επιστημολογία. Όλα τα σύνολα με τα οποία ασχολούνται τα μαθηματικά (τουλάχιστον τα σημερινά μαθηματικά, στα οποία περιλαμβάνεται και η συνολοθεωρία του Cantor), είναι σύνολα ακεραίων αριθμών ή ρητών αριθμών (δηλ. ζευγών ακεραίων) ή πραγματικών αριθμών (δηλ. συνόλων από ρητούς αριθμούς) ή συναρτήσεων πραγματικών αριθμών (δηλ. συνόλων από ζεύγη πραγματικών αριθμών) κτλ. Όταν διατυπώνονται θεωρήματα πάνω σε όλα τα σύνολα (ή πάνω στην ύπαρξη συνόλων γενικά), αυτά μπορούν πάντοτε να ερμηνευθούν, χωρίς δυσκολία, ως προτάσεις που ισχύουν για σύνολα ακεραίων ή για σύνολα συνόλων ακεραίων κτλ. (αντίστοιχα: ότι υπάρχουν σύνολα ακεραίων ή σύνολα συνόλων ακεραίων ή... κτλ. που έχουν την ιδιότητα την οποία βεβαιώνει το θεώρημα). Ωστόσο αυτή η έννοια του συνόλου[9], σύμφωνα με την οποία σύνολο είναι κάτι που μπορούμε να το παραγάγουμε από τους ακεραίους (ή κάποια άλλα καθορισμένα αντικείμενα) με επανειλημμένη εφαρμογή[10] της πράξης «σύνολο των»[11] και όχι κάτι που πήραμε χωρίζοντας την ολότητα των υπαρχόντων πραγμάτων σε δύο κατηγορίες, ποτέ δεν οδήγησε σε αντινομίες· με άλλα λόγια, η εντελώς «αφελής» και μη κριτική χρήση αυτής της έννοιας του συνόλου αποκαλύφθηκε ώς τώρα εντελώς ελεύθερη από αντιφάσεις[12].

Επιπλέον, τα αξιώματα στα οποία βασίζεται η απεριόριστη χρήση αυτής της έννοιας του συνόλου ή, τουλάχιστον, ένα υποσύνολό τους που επαρκεί για όλες τις μαθηματικές αποδείξεις που έχουν επινοηθεί ώς τώρα (εκτός από τις αποδείξεις θεωρημάτων που βεβαιώνουν την ύπαρξη πολύ μεγάλων πληθικών αριθμών (βλ. σημ. 16), έχουν διατυπωθεί στη θεωρία των συνόλων[13] με τόση ακρίβεια, ώστε το ερώτημα αν από αυτά συνάγεται μία ορισμένη πρόταση μπορεί να μετασχηματισθεί, με τα μέσα της μαθηματικής λογικής, σε καθαρά συνδυαστικό πρόβλημα σχετικό με το χειρισμό συμβόλων – και ο πιο ριζοσπάστης από τους ιντουισιονιστές πρέπει να αναγνωρίσει ότι αυτό το πρόβλημα έχει νόημα. Ώστε το πρόβλημα του συνεχούς του Cantor, ανεξάρτητα από τη φιλοσοφική στάση που υιοθετεί κανείς, διατηρεί αναμφίβολα τουλάχιστον τούτο το νόημα: να προσδιορισθεί αν από τα αξιώματα της θεωρίας των συνόλων, όπως αυτά διατυπώνονται στα συστήματα που αναφέραμε, μπορεί να βρεθεί μία απάντηση και, στην περίπτωση καταφατικής απάντησης, ποια απάντηση.

Φυσικά, αν η εικασία του Cantor ερμηνευθεί μ' αυτόν τον τρόπο, υπάρχουν (εφόσον υποθέσουμε ότι τα αξιώματα δεν οδηγούν σε αντιφάσεις) τρεις a priori δυνατότητες: μπορεί να αποδεικνύεται, να αποδεικνύεται η άρνησή της ή να μην είναι αποκρίσιμη[14]. Η τρίτη δυνατότητα (που είναι μονάχα μία ακριβής διατύπωση της παραπάνω εικασίας, σύμφωνα με την οποία οι δυσκολίες που παρουσιάζει το πρόβλημα πιθανόν να μην είναι καθαρά μαθηματικές) είναι η πιο πιθανή. Σήμερα η προσπάθεια να την αποδείξουμε ίσως να αποτελεί τον τρόπο αντιμετώπισης του προβλήματος που έχει τις καλύτερες προοπτικές επιτυχίας. Σ' αυτή την κατεύθυνση έχουμε ένα τουλάχιστον αποτέλεσμα, δηλ. ότι η εικασία του Cantor δεν μπορεί να ανασκευασθεί με βάση τα αξιώματα της θεωρίας των συνόλων, αν αυτά δεν είναι αντιφατικά (βλ. Κεφ. 4).

Πρέπει, όμως, να επισημάνουμε ότι, σύμφωνα με την άποψη που υιοθετήσαμε εδώ, το να βρεθεί μία απόδειξη του ότι είναι αδύνατο να αποφανθούμε για την εικασία του Cantor (σε αντιπαραβολή, λ.χ., με την απόδειξη της υπερβατικότητας του π) δεν θα αποτελούσε λύση του προβλήματος. Διότι αν δεχθούμε ότι τα νοήματα των αρχικών όρων της θεωρίας των συνόλων είναι ικανοποιητικά, όπως αυτά διασαφηνίστηκαν στη σελίδα 184 και στη σημείωση 11, πρέπει να δεχθούμε ότι οι έννοιες και τα θεωρήματα της θεωρίας των συνόλων περιγράφουν μία πραγματικότητα που είναι καλά προσδιορισμένη, και στην οποία η εικασία του Cantor πρέπει να είναι αληθής ή ψευδής. Επομένως, το ότι είναι αδύνατον να αποφανθούμε γι' αυτήν με βάση τα αξιώματα που χρησιμοποιούμε σήμερα, δεν μπορεί παρά να σημαίνει ότι τα αξιώματα αυτά δεν περιέχουν μία πλήρη περιγραφή αυτής της πραγματικότητας. Μια τέτοια πεποίθηση δεν είναι καθόλου χιμαιρική, γιατί είναι δυνατόν να υποδείξουμε τρόπους για να αποφασίσουμε σχετικά με ένα ζήτημα που δεν είναι αποκρίσιμο με βάση τα συνηθισμένα αξιώματα.

Πρώτον, τα αξιώματα της θεωρίας των συνόλων δεν συνιστούν ένα κλ
στό σύστημα, αλλά, αντίθετα, η ίδια η έννοια του συνόλου[15] στην οποία (
σίζονται, υποδεικνύει την επέκτασή τους με νέα αξιώματα που βεβαιών
την ύπαρξη και άλλων παραπέρα επαναλήψεων της πράξης «σύνολο τω
Τα αξιώματα αυτά μπορούν επίσης να διατυπωθούν ως προτάσεις που
βαιώνουν την ύπαρξη πολύ μεγάλων πληθικών αριθμών (δηλ. συνόλ
που έχουν αυτούς τους πληθικούς αριθμούς). Το απλούστερο από αυτό
«ισχυρά αξιώματα του απείρου» βεβαιώνει την ύπαρξη απρόσιτων αρ
μών (με την ισχυρή ή την ασθενή έννοια) $> \aleph_0$. Ουσιαστικά, το αξίω
αυτό σημαίνει μονάχα ότι η ολότητα των συνόλων που μπορούμε να πι
σθούμε με τη χρήση των διαδικασιών για το σχηματισμό συνόλων που
φράζονται με τα άλλα αξιώματα είναι, και αυτή, ένα σύνολο (και, επο
νως, μία νέα βάση για παραπέρα εφαρμογές αυτών των διαδικασιών)(Z
melo, 1930:29). Πρώτος διατύπωσε άλλα αξιώματα του απείρου ο P. M
lo[16]. Τα αξιώματα αυτά δείχνουν καθαρά όχι μόνο ότι το αξιωματικό
στημα της θεωρίας των συνόλων που χρησιμοποιείται σήμερα δεν εί
πλήρες, αλλά και ότι αυτό μπορεί να συμπληρωθεί με τρόπο όχι αυθαίρ
με την προσθήκη νέων αξιωμάτων που περιορίζονται στο να εκφράσου
περιεχόμενο της έννοιας του συνόλου την οποία εξηγήσαμε πιο πάνω.

Αποδεικνύεται ότι τα αξιώματα αυτά έχουν και συνέπειες πολύ π
από το πεδίο των πολύ μεγάλων υπερπεπερασμένων αριθμών, που είνα
πεδίο στο οποίο αναφέρονται άμεσα: μπορεί κανείς να αποδείξει ότι
θένα τους, αν είναι μη αντιφατικό, αυξάνει τον αριθμό των αποκρίσι
προτάσεων ακόμα και στο πεδίο των διοφαντικών εξισώσεων. Όσο γι
πρόβλημα του συνεχούς, δεν υπάρχουν πολλές ελπίδες ότι θα λυθεί μ
βοήθεια εκείνων των αξιωμάτων για το άπειρο, τα οποία μπορούν να π
ταθούν με βάση τις αρχές του Mahlo (η απόδειξη του μη απορρίψιμου
υπόθεσης του συνεχούς μπορεί να επαναληφθεί χωρίς καμία τροποποί
για καθεμιά τους). Υπάρχουν, όμως, άλλα αξιώματα που βασίζοντα
διαφορετικές αρχές (βλ. σημ. 16)· μπορεί επίσης να υπάρχουν, εκτός
τα συνήθη αξιώματα, τα αξιώματα του απείρου και τα αξιώματα που (
φέραμε στη σημείωση 15, και άλλα (άγνωστα ώς τώρα) αξιώματα γι
θεωρία των συνόλων που θα μπορούσε να μας αποκαλύψει –σαν κρυμ
σ' αυτές τις έννοιες– η βαθύτερη κατανόηση των βασικών εννοιών της λ
κής και των μαθηματικών (βλ., λ.χ., τη σημείωση 19).

Κατά δεύτερο λόγο, κι αν ακόμα αγνοήσουμε την εγγενή ανάγκη
κάποιο νέο αξίωμα, και στην περίπτωση ακόμα στην οποία αυτό δεν
καμιά εσώτερη αναγκαιότητα, ενδέχεται να μπορεί να αποφασισθ
αλήθειά του και με άλλον τρόπο, δηλ. επαγωγικά, εξετάζοντας την «
τυχία» του. Σ' αυτή την περίπτωση, επιτυχία σημαίνει γονιμότητα σε
νέπειες, ιδιαίτερα σε «επαληθεύσιμες» συνέπειες, δηλ. συνέπειες

μπορούν να αποδειχθούν χωρίς τη βοήθεια του νέου αξιώματος· ωστόσο, όμως, το νέο αξίωμα διευκολύνει και απλουστεύει σημαντικά την ανακάλυψη των αποδείξεων των συνεπειών αυτών, και επιτρέπει να συμπτυχθούν περισσότερες αποδείξεις σε μία απόδειξη. Με αυτή την έννοια, τα αξιώματα του συστήματος των πραγματικών αριθμών, που απορρίπτονται από τους ιντουισιονιστές, έχουν ώς ένα βαθμό επαληθευθεί, εξαιτίας του γεγονότος ότι συχνά η αναλυτική θεωρία των αριθμών μας επιτρέπει να αποδεικνύουμε θεωρήματα της θεωρίας των αριθμών τα οποία μπορούν, κατόπιν, να επαληθευθούν με στοιχειώδεις (και πιο δυσκίνητες) μεθόδους. Ωστόσο, μπορούμε να συλλάβουμε έναν πολύ υψηλότερο βαθμό επαλήθευσης. Μπορεί να υπάρχουν αξιώματα που έχουν άφθονες επαληθεύσιμες συνέπειες, ρίχνουν άπλετο φως πάνω σ' ένα ολόκληρο πεδίο και προσφέρουν ισχυρές μεθόδους για τη λύση προβλημάτων (και την κατασκευαστική λύση τους, όσο αυτό είναι δυνατόν), ώστε, ανεξάρτητα από το αν έχουν εγγενή αναγκαιότητα ή όχι, να πρέπει να γίνουν δεκτά τουλάχιστον όπως γίνεται δεκτή μία καλά θεμελιωμένη φυσική θεωρία.

4. *Μερικές παρατηρήσεις πάνω στο ερώτημα: με ποια έννοια και προς ποια κατεύθυνση μπορούμε να περιμένουμε μια λύση στο πρόβλημα του συνεχούς;*

Ταιριάζουν, όμως, αυτές οι σκέψεις στο πρόβλημα του συνεχούς; Υπάρχουν πραγματικά σαφείς ενδείξεις ότι δεν λύνεται με βάση τα συνήθη αξιώματα; Πιστεύω ότι έχουμε τουλάχιστον δύο τέτοιες ενδείξεις.

Η πρώτη ένδειξη βασίζεται στο γεγονός ότι υπάρχουν δύο τάξεις αντικειμένων, οι οποίες ορίζονται με εντελώς διαφορετικό τρόπο· και οι δύο ικανοποιούν όλα τα αξιώματα της θεωρίας των συνόλων, που έχουν διατυπωθεί μέχρι σήμερα. Η μία τάξη αποτελείται από τα σύνολα που μπορούν να ορισθούν με έναν ορισμένο τρόπο, χάρη σε ιδιότητες των αντικειμένων τους[17]· η άλλη αποτελείται από σύνολα με την έννοια των αυθαίρετων πολλαπλοτήτων, ανεξάρτητα από το αν ή το πώς μπορούν να ορισθούν. Τώρα, προτού διευθετηθεί το ζήτημα του ποια αντικείμενα πρέπει να απαριθμήσουμε και με βάση ποια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία, δεν μπορούμε βέβαια να ελπίζουμε ότι θα είμαστε σε θέση να προσδιορίσουμε τον αριθμό τους, αν εξαιρεθούν οι ενδεχόμενες ευτυχείς συμπτώσεις. Αν όμως κανείς πιστεύει ότι δεν έχει νόημα να μιλάμε για σύνολα παρά μόνο με την έννοια της έκτασης οριστών ιδιοτήτων, τότε, και σ' αυτή την περίπτωση, δεν μπορεί βέβαια να ελπίζει ότι θα μπορεί να λυθεί περισσότερο από ένα μικρό κλάσμα των προβλημάτων της συνολοθεωρίας, χωρίς για τη λύση τους να γίνει χρήση αυτού, του ουσιαστικού κατά τη γνώμη μου, χαρακτηριστικού

των συνόλων, δηλ. ότι το σύνολο είναι το πλάτος μιας οριστής ιδιότητας. Αυτό όμως το χαρακτηριστικό των συνόλων ούτε είναι ρητά διατυπωμένο ούτε περιέχεται συγκαλυμμένα στα συνήθη αξιώματα της θεωρίας των συνόλων. Έτσι, και από τις δύο εκδοχές, αν επιπλέον λάβει κανείς υπόψη του όσα ειπώθηκαν στο Κεφάλαιο 2, μπορεί να διατυπώσει την εικασία ότι το πρόβλημα του συνεχούς δεν μπορεί να λυθεί με βάση τα αξιώματα που προτάθηκαν μέχρι σήμερα, αλλά ότι, αντίθετα, μπορεί ίσως να λυθεί με τη βοήθεια κάποιου νέου αξιώματος στο οποίο θα διατυπωνόταν ρητά ή θα περιεχόταν ενδιάθετα κάτι σχετικό με την οριστότητα των συνόλων[18].

Το δεύτερο μισό αυτής της εικασίας έχει ήδη επαληθευθεί· με άλλα λόγια, η έννοια της οριστότητας που αναφέρθηκε στη σημείωση 17 (που, με τη σειρά της, μπορεί να ορισθεί στην αξιωματική θεωρία των συνόλων), επιτρέπει να εξαχθεί, στο πλαίσιο της αξιωματικής θεωρίας των συνόλων, η γενικευμένη υπόθεση του συνεχούς από το αξίωμα, σύμφωνα με το οποίο κάθε σύνολο είναι οριστό με αυτή την έννοια της οριστότητας[19]. Αφού αποδεικνύεται ότι αυτό το αξίωμα (ας το ονομάσουμε «*A*») συμβιβάζεται με τα άλλα αξιώματα, εφόσον υποτεθεί ότι αυτά δεν είναι μεταξύ τους αντιφατικά, αυτό το αποτέλεσμα (ανεξάρτητα από τη φιλοσοφική στάση που υιοθετούμε απέναντι στην οριστότητα) δείχνει ότι η υπόθεση του συνεχούς συμβιβάζεται με τα αξιώματα της θεωρίας των συνόλων, εφόσον τα αξιώματα αυτά δεν παρουσιάζουν αντίφαση[20]. Η απόδειξη έχει την ίδια δομή με την απόδειξη του μη αντιφατικού της μη ευκλείδειας γεωμετρίας με τη βοήθεια ενός μοντέλου της μέσα στην ευκλείδεια γεωμετρία. Για την ακρίβεια, από τα αξιώματα της θεωρίας των συνόλων απορρέει ότι τα οριστά σύνολα, με την έννοια που εξηγήσαμε, αποτελούν ένα μοντέλο της θεωρίας των συνόλων στο οποίο η πρόταση *A* είναι αληθής και, επομένως, αληθεύει και η γενικευμένη υπόθεση του συνεχούς.

Ένα δεύτερο επιχείρημα για το ότι το πρόβλημα του συνεχούς δεν λύνεται με βάση τα συνηθισμένα αξιώματα μπορεί να στηριχθεί πάνω σε ορισμένα γεγονότα (που δεν ήταν γνωστά την εποχή του Cantor)· τα γεγονότα αυτά φαίνονται να δείχνουν ότι η εικασία του Cantor θα αποδειχθεί λαθεμένη[21], ενώ, από την άλλη μεριά, μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι αδύνατη η ανασκευή της με βάση τα αξιώματα που χρησιμοποιούνται σήμερα.

Ένα από τα γεγονότα αυτά είναι ότι υπάρχουν ορισμένες ιδιότητες των σημειοσυνόλων (που βεβαιώνουν ότι τα σύνολα αυτά είναι πολύ σπάνια), ιδιότητες για τις οποίες κατορθώθηκε να αποδειχθεί ότι υπάρχουν μη αριθμήσιμα σύνολα που τις έχουν, αλλά δεν γνωρίζουμε πώς θα μπορούσαμε να βρούμε παραδείγματά τους που να έχουν τον πληθάριθμο του συνεχούς. Ιδιότητες αυτού του τύπου (των υποσυνόλων της ευθείας γραμμής) είναι: (1) το να είναι πρώτης κατηγορίας πάνω σε κάθε τέλειο σύνολο (Sierpinski, 1934 b: 270 και Kuratowski, 1933-50: 1: 269 κ.ε), (2) το να προβάλλεται σε ένα μηδενικό σύνολο από κάθε συνεχή αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση της ευθείας πάνω στον εαυτό της (Lusin και Sierpinski, 1918:35 και Sierpinski, 1934 b: 270).

Μια άλλη ιδιότητα ανάλογου τύπου είναι η δυνατότητα κάλυψης με άπειρο αριθμό διαστημάτων, οποιουδήποτε μήκους. Αλλά στην τελευταία περίπτωση κανείς δεν κατόρθωσε ώς τώρα να αποδείξει ότι υπάρχουν μη αριθμήσιμα παραδείγματα. Ωστόσο, από την υπόθεση του συνεχούς απορρέει ότι και στις τρεις περιπτώσεις υπάρχουν όχι μόνο παραδείγματα με τον πληθάριθμο του συνεχούς[22], αλλά και παραδείγματα συνόλων που απεικονίζονται στον εαυτό τους (με εξαίρεση το πολύ αριθμήσιμο πλήθος σημείων), από *κάθε* μεταφορά της ευθείας γραμμής (Sierpinski, 1935a: 43).

Άλλες συνέπειες, ελάχιστα ευλογοφανείς, της υπόθεσης του συνεχούς είναι ότι υπάρχουν: (1) υποσύνολα της ευθείας γραμμής με πληθάριθμο το συνεχές, τα οποία καλύπτονται (με εξαίρεση το πολύ αριθμήσιμο πλήθος σημείων) από *κάθε* πυκνό σύνολο διαστημάτων (Lusin, 1914: 1259)· (2) υποσύνολα του χώρου του Hilbert με άπειρες διαστάσεις, τα οποία δεν περιέχουν κανένα μη αριθμήσιμο υποσύνολο πεπερασμένης διάστασης (με την έννοια των Menger-Urysohn (Hurewicz, 1932: 8)· (3) μία άπειρη ακολουθία A^i διαμερίσεων ενός τυχόντος συνόλου M, το οποίο έχει τον πληθάριθμο του συνεχούς, σε ένα συνεχές από σύνολα A^i_x ανά δύο ξένα και τέτοια ώστε, όπως κι αν επιλεχθεί το σύνολο $A^i_{x_i}$ για κάθε i, το γινόμενο $\prod_{i=0}^{\infty} (M - A^i_{x_i})$ είναι αριθμήσιμο[23]. Οι (1) και (3) είναι πολύ απίθανες, ακόμα και αν ο «πληθάριθμος του συνεχούς» αντικατασταθεί με τον «$\aleph_1$».

Πολλά αποτελέσματα της θεωρίας των σημειοσυνόλων, που μπορούν να αποδειχθούν χωρίς τη χρήση της υπόθεσης του συνεχούς, είναι επίσης εντελώς απροσδόκητα και διόλου ευλογοφανή (Blumenthal, 1940: 346). Αλλά μολοντούτο, εδώ η κατάσταση είναι εντελώς διαφορετική, γιατί στην πλειονότητα των αποτελεσμάτων αυτών (όπως, λ.χ., οι καμπύλες του Peano), το γεγονός ότι συγκρούονται με το φαινομενικό μπορεί να εξηγηθεί με την έλλειψη συμφωνίας ανάμεσα στις εποπτικές έννοιες της γεωμετρίας μας και στις συνολοθεωρητικές έννοιες που παρουσιάζονται στα θεωρήματα. Είναι επιπλέον εξαιρετικά ύποπτο το ότι δεν είναι γνωστή ούτε μία ευλογοφανής πρόταση που να συνεπάγεται την υπόθεση του συνεχούς, ενώ αντίθετα γνωρίζουμε πολλές ευλογοφανείς προτάσεις που συνεπάγονται την άρνηση της υπόθεσης του συνεχούς. Πιστεύω ότι, αν βάλουμε μαζί όλα όσα είδαμε, υπάρχουν βάσιμοι λόγοι για την υπόνοια ότι ο ρόλος του προβλήματος του συνεχούς στη θεωρία συνόλων θα είναι να οδηγήσει στην ανακάλυψη νέων αξιωμάτων που θα μας επιτρέψουν να ανασκευάσουμε την εικασία του Cantor.

Ορισμοί μερικών τεχνικών όρων

Οι ορισμοί 4-15 αναφέρονται σε υποσύνολα μιας ευθείας γραμμής, αλλά μπορούν να μεταφερθούν κυριολεκτικά σε υποσύνολα ευκλείδειων χώρων οποιουδήποτε αριθμού διαστάσεων, αν ταυτίσουμε «διάστημα» και «εσωτερικό ενός παραλληλεπιπέδου».

1. Ονομάζω *χαρακτήρα συνοριακότητας* (Character of confinality) ενός πληθάριθμου m (και το συμβολίζω για συντομία με «cf(m)») τον ελάχιστο αριθμό n για τον οποίο ισχύει ότι ο m είναι το άθροισμα n αριθμών $< m$.

2. Ένας πληθάριθμος m είναι *κανονικός* αν $\mathrm{cf}(m) = m$, αλλιώς είναι μεμονωμένος.

3. Ένας άπειρος πληθικός αριθμός m είναι *απρόσιτος* αν είναι κανονικός και δεν έχει άμεσο προηγούμενο (δηλ. αν, μολονότι είναι όριο αριθμών $< m$, δεν είναι όριο λιγότερων από m τέτοιων αριθμών)· είναι *ισχυρά απρόσιτος* αν κάθε γινόμενο (και, επομένως, κάθε άθροισμα) λιγότερων από m αριθμών$< m$ είναι $< m$. (Βλ. W. Sierpinski και A. Tarski, 1930: 292 και A. Tarski, 1938: 68.)

Από τη γενικευμένη υπόθεση του συνεχούς συνάγεται ότι αυτές οι δύο έννοιες είναι ισοδύναμες. Ο $\aleph_0$ είναι προφανώς απρόσιτος και, επίσης, ισχυρά απρόσιτος. Όσο για τους πεπερασμένους αριθμούς, οι μόνοι ισχυρά απρόσιτοι είναι ο 0 και ο 2. Ένας ορισμός του απρόσιτου, που να έχει εφαρμογή στους πεπερασμένους αριθμούς, είναι τούτος: ο m είναι απρόσιτος αν (1) κάθε άθροισμα αριθμών $< m$ με λιγότερους από m παράγοντες είναι $<m$ και (2) ο αριθμός των αριθμών που είναι $< m$ είναι m. Ο ορισμός αυτός, για υπερπεπερασμένους αριθμούς, συμφωνεί με αυτόν που δόθηκε πιο πάνω, και για πεπερασμένους αριθμούς δίνει τους 0, 1,2. Επομένως, το απρόσιτο και το ισχυρά απρόσιτο δεν συμβαίνει να ισοδυναμούν για τους πεπερασμένους αριθμούς. Τούτο εγείρει κάποια αμφιβολία σχετικά με την ισοδυναμία τους για τους υπερπεπερασμένους αριθμούς, ισοδυναμία που απορρέει από τη γενικευμένη υπόθεση του συνεχούς.

4. Ένα σύνολο διαστημάτων είναι *πυκνό* αν κάθε διάστημα έχει κοινά σημεία με κάποιο διάστημα του συνόλου. (Τα άκρα του διαστήματος δεν θεωρούνται σημεία του διαστήματος.)

5. *Μηδενικό σύνολο* είναι κάθε σύνολο που μπορεί να καλυφθεί από άπειρα σύνολα διαστημάτων που έχουν άθροισμα μηκών όσο θέλουμε μικρό.

6. *Περιοχή* ενός σημείου P είναι ένα διάστημα που περιέχει το P.

7. Ένα υποσύνολο A του B είναι *πυκνό στο* B αν κάθε περιοχή κάθε σημείου του B περιέχει σημεία του A.

8. Ένα σημείο P βρίσκεται στο *εξωτερικό* του A αν έχει μία περιοχή που δεν περιέχει κανένα σημείο του A.

9. Ένα υποσύνολο A του B είναι *παντού μη πυκνό στο B* αν εκείνα τα σημεία του B που βρίσκονται στο εξωτερικό του A είναι πυκνά στο B· ή ισοδύναμα, αν για κανένα διάστημα I η τομή IA δεν είναι πυκνή στο IB.

10. Ένα υποσύνολο A του B είναι *πρώτης κατηγορίας στο B* αν είναι το άθροισμα ενός αριθμήσιμου αριθμού συνόλων παντού μη πυκνών στο B.

11. Ένα σύνολο A είναι *πρώτης κατηγορίας πάνω στο B* αν η τομή AB είναι πρώτης κατηγορίας στο B.

12. Ένα σημείο P λέγεται *οριακό σημείο* ενός συνόλου A αν κάθε περιοχή του P περιέχει άπειρα σημεία του A.

13. Ένα σύνολο A λέγεται *κλειστό* αν περιέχει όλα τα οριακά σημεία του.

14. Ένα σύνολο είναι *τέλειο* αν είναι κλειστό και δεν έχει μεμονωμένα σημεία (δηλ. σημεία με περιοχή που δεν περιέχει κανένα σημείο του συνόλου).

15. Τα *σύνολα* Borel ορίζονται ως το ελάχιστο σύστημα συνόλων που ικανοποιεί τα ακόλουθα αιτήματα:

(1) Τα κλειστά σύνολα είναι σύνολα Borel.
(2) Το συμπλήρωμα ενός συνόλου Borel είναι σύνολο Borel.
(3) Το άθροισμα ενός αριθμήσιμου πλήθους από σύνολα Borel είναι σύνολο Borel.

16. Ένα σύνολο είναι *αναλυτικό* αν είναι η ορθογωνική προβολή κάποιου συνόλου Borel ενός χώρου ανώτερων διαστάσεων. (Επομένως, κάθε σύνολο Borel είναι και αναλυτικό.)

Συμπλήρωμα για τη δεύτερη έκδοση (1963)

Από τότε που δημοσιεύτηκε το προηγούμενο άρθρο ανακαλύφθηκαν μερικά νέα αποτελέσματα. Θα ήθελα να αναφέρω τα αποτελέσματα εκείνα που έχουν ιδιαίτερη σημασία για τη συζήτηση που προηγήθηκε.

1. Ο A. Hajnal απέδειξε (1956: 131) ότι, αν το $2^{\aleph_0} \neq \aleph_2$ μπορεί να συναχθεί από τα αξιώματα της θεωρίας των συνόλων, τότε μπορεί να συναχθεί και το $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Αυτό το εκπληκτικό αποτέλεσμα θα μπορούσε να διευκολύνει πολύ στη λύση του προβλήματος του συνεχούς, αν η υπόθεση του συνεχούς του Cantor μπορούσε να αποδειχθεί από τα αξιώματα της θεωρίας των συνόλων, κάτι που πιθανό να μην ισχύει.

2. Μερικές νέες συνέπειες και μερικές νέες προτάσεις ισοδύναμες με την υπόθεση του Cantor βρίσκει κανείς στη νέα έκδοση του βιβλίου του W. Sierpinski (1934α, 2η έκδ.). Στην πρώτη έκδοση είχε αποδειχθεί ότι η υπόθεση του συνεχούς ισοδυναμεί με την πρόταση: το ευκλείδειο επίπεδο είναι το άθροισμα ενός αριθμήσιμου αριθμού «γενικευμένων καμπυλών» (όπου

μία γενικευμένη καμπύλη είναι ένα σημειοσύνολο οριστό με τη βοήθεια μιας εξίσωσης $y = f(x)$ σε κάποιο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων). Στη δεύτερη έκδοση επισημαίνεται (σ. 207)[24] ότι, με την πολύ ασθενέστερη παραδοχή ότι ο πληθάριθμος του συνεχούς δεν είναι απρόσιτος αριθμός, μπορεί κανείς να αποδείξει ότι το ευκλείδειο επίπεδο είναι το άθροισμα ενός αριθμού γενικευμένων καμπυλών που είναι μικρότερος από τον πληθάριθμο του συνεχούς. Η απόδειξη του αντίστροφου θεωρήματος θα έκανε ευλογοφανή την υπόθεση $2^{\aleph_0}$ = ο μικρότερος απρόσιτος αριθμός $>\aleph_0$. Ωστόσο, πρέπει να είμαστε πολύ επιφυλακτικοί σχετικά μ' αυτή τη συνεπαγωγή, γιατί η παραδοξολογική εμφάνιση σ' αυτή την περίπτωση (όπως στην περίπτωση των «καμπυλών» του Peano) οφείλεται, τουλάχιστον μερικώς, σε μία μεταφορά της γεωμετρικής εποπτείας των καμπυλών σε κάτι που έχει μόνο τα χαρακτηριστικά των καμπυλών. Ας σημειωθεί ότι κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει στην περίπτωση των συνεπειών της υπόθεσης του συνεχούς, οι οποίες συγκρούονται με την εποπτεία μας και οι οποίες αναφέρθηκαν στις σελίδες 189-90.

3. Ο C. Kuratowski διατύπωσε μία ενίσχυση της υπόθεσης του συνεχούς (1948: 131) της οποίας η μη αντιφατικότητα απορρέει από την απόδειξη της μη αντιφατικότητας που αναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 4. Ο ίδιος απέδειξε διάφορες συνέπειες αυτής της νέας υπόθεσης.

4. Πρόσφατα βρέθηκαν πολύ ενδιαφέροντα νέα αποτελέσματα σχετικά με τα αξιώματα του απείρου (βλ. σημειώσεις 13 και 16).

Αντίθετα προς την άποψη που υποστηρίχθηκε στο Κεφάλαιο 4, προτάθηκε η διαφορετική γνώμη (Errera, 1953: 176-83) σύμφωνα με την οποία, αν αποδειχθεί ότι το πρόβλημα του συνεχούς του Cantor δεν είναι αποκρίσιμο από τα συνηθισμένα αξιώματα της θεωρίας των συνόλων, τότε δεν θα είχε νόημα να τεθεί το ερώτημα σχετικά με την αλήθειά του, ακριβώς όπως έχασε το νόημά του το ζήτημα της αλήθειας του πέμπτου αξιώματος του Ευκλείδη, όταν αποδείχτηκε ότι η μη ευκλείδεια γεωμετρία δεν είναι αντιφατική. Γι' αυτό θα ήθελα να επισημάνω ότι στη θεωρία των συνόλων η κατάσταση είναι εντελώς διαφορετική από ό,τι είναι στη γεωμετρία, και από την άποψη των μαθηματικών και από την άποψη της επιστημολογίας.

Λόγου χάρη, στην περίπτωση του αξιώματος της ύπαρξης απρόσιτων αριθμών (το οποίο έχει αποδειχθεί ότι δεν είναι αποκρίσιμο με βάση τα αξιώματα των von Neumann - Bernays για τη θεωρία των συνόλων, αν συμβιβάζεται με αυτά), από την άποψη των μαθηματικών, υπάρχει μία εντυπωσιακή ασυμμετρία ανάμεσα στο σύστημα που περιλαμβάνει τη βεβαίωση του αξιώματος τούτου και στο σύστημα που περιλαμβάνει την άρνησή του[25]. Για την ακρίβεια, το δεύτερο (αλλά όχι το πρώτο) έχει ένα μοντέλο στο αρχικό σύστημα (χωρίς το πρόσθετο αξίωμα). Αυτό σημαίνει ότι το πρώτο είναι μία επέκταση με μία πολύ ισχυρότερη σημασία. Στενά συνδεδεμένο μ' αυτό είναι το γεγονός ότι η βεβαίωση (αλλά όχι η άρνηση) του αξιώματος συνεπάγεται νέα θεωρήματα για τους ακεραίους (των οποίων τα συγκεκριμένα παραδείγματα μπορούν να εξακριβωθούν με τον αριθμητικό υπολογισμό). Επομένως, το κριτήριο της αλήθειας που διατυπώθηκε στη σελίδα 184 ικανοποιείται ώς ένα σημείο από τη βεβαίωση αλλά όχι από την άρνηση. Με δυο λόγια, μόνο η βεβαίωση δίνει μια 'γόνιμη» επέκταση, ενώ η άρνηση είναι άγονη έξω από το πολύ περιορισμένο πεδίο της. Μπορεί κανείς να αποδείξει ότι και η υπόθεση του Cantor είναι άγονη για τη θεωρία των αριθμών και ότι αληθεύει σε ένα μοντέλο που κατασκευάζεται στο αρχικό σύστημα, ενώ πιθανόν αυτό να μη συμβαίνει με κάποια άλλη υπόθεση σχετική με τον πληθάριθμο του συνεχούς. Από την άλλη μεριά, καμία από αυτές τις ασυμμετρίες δεν ισχύει στην περίπτωση του πέμπτου αξιώματος του Ευκλείδη. Για να είμαστε πιο ακριβείς, αυτό και η άρνησή του είναι επεκτάσεις με την ασθενή σημασία.

Από την επιστημολογική σκοπιά πρέπει να πούμε ότι με το να αποδειχθεί ότι ένα ζήτημα δεν είναι αποκρίσιμο, τούτο χάνει το νόημά του μόνο αν θεωρήσουμε το σύστημα των αξιωμάτων που εξετάζουμε ως ένα υποθετικό -παραγωγικό σύστημα, παναπεί αν τα νοήματα των αρχικών όρων μείνουν απροσδιόριστα. Στη γεωμετρία, λ.χ., το ερώτημα αν το πέμπτο αξίωμα του Ευκλείδη είναι αληθές διατηρεί το νόημά του εφόσον οι αρχικοί όροι ληφθούν με προσδιορισμένη σημασία, δηλ. ως αναφερόμενοι στη συμπεριφορά στερεών σωμάτων, φωτεινών ακτίνων κτλ. Παρόμοια είναι η κατάσταση στη θεωρία των συνόλων, με μόνη διαφορά ότι στη γεωμετρία το νόημα που συνήθως υιοθετείται σήμερα αναφέρεται στη φυσική και όχι στη μαθηματική εποπτεία και ότι, επομένως, η απόφαση υπερβαίνει τα όρια των μαθηματικών. Από την άλλη μεριά, τα αντικείμενα της υπερπεπερασμένης θεωρίας των συνόλων, με τον τρόπο που τα εννοούμε στη σελ. 184 και στη σημείωση 11, ασφαλώς δεν ανήκουν στον φυσικό κόσμο, και ακόμα και ο έμμεσος δεσμός τους με τη φυσική εμπειρία είναι πολύ χαλαρός (κυρίως εξαιτίας του γεγονότος ότι οι συνολοθεωρητικές έννοιες παίζουν έναν πολύ μικρό ρόλο στις σημερινές φυσικές θεωρίες).

Αλλά παρ' όλη την απόστασή τους από την αισθητηριακή εμπειρία, υπάρχει κάτι που μοιάζει με την αντίληψη των αντικειμένων της θεωρίας των συνόλων, όπως δείχνει το γεγονός ότι τα αξιώματα μας επιβάλλονται ως αληθή. Δεν βλέπω το λόγο για τον οποίο θα έπρεπε να έχουμε λιγότερη εμπιστοσύνη σε τούτο το είδος αντίληψης, δηλ. στη μαθηματική εποπτεία, απ' ό,τι στην αισθητηριακή αντίληψη η οποία μας ωθεί να κατασκευάζουμε φυσικές θεωρίες και να περιμένουμε ότι οι μελλοντικές αισθητηριακές αντιλήψεις μας θα συμφωνούν μ' αυτές και, επιπλέον, να πιστεύουμε ότι ένα ερώτημα που τώρα δεν μπορεί να απαντηθεί έχει νόημα και ότι μπορεί να απαντηθεί στο μέλλον. Δύσκολα μπορεί κανείς να θεωρήσει ότι

τα παράδοξα της θεωρίας των συνόλων συνιστούν μεγαλύτερο εμπόδιο για τα μαθηματικά απ' ό,τι οι πλάνες των αισθήσεων για τη φυσική. Όπως ήδη σημειώσαμε (σσ. 187-8), είναι ασφαλώς δυνατόν να υπάρχουν μαθηματικές εποπτείες που να επιτρέπουν να αποφανθούμε για προβλήματα όπως η υπόθεση του συνεχούς του Cantor.

Πρέπει να σημειωθεί πως δεν είναι ανάγκη να αντιληφθούμε τη μαθηματική εποπτεία ως ικανότητα που μας δίνει *άμεση* γνώση των αντικειμένων της. Αντίθετα, φαίνεται ότι, όπως στην περίπτωση της φυσικής εμπειρίας, *σχηματίζουμε* τις ιδέες και αυτών των αντικειμένων με βάση κάτι άλλο που είναι άμεσα δεδομένο. Μόνο που εδώ, αυτό το κάτι άλλο *δεν* συνίσταται, ή τουλάχιστον δεν συνίσταται πρωταρχικά, από αισθητηριακές αντιλήψεις. Το ότι, εκτός από τις αισθητηριακές αντιλήψεις, είναι άμεσα δεδομένο κάτι διαφορετικό από αυτές, απορρέει (ανεξάρτητα από τα μαθηματικά) από το γεγονός ότι ακόμη και οι ιδέες μας, που αναφέρονται σε φυσικά αντικείμενα περιέχουν συστατικά που διαφέρουν ποιοτικά από τις αισθητηριακές αντιλήψεις ή τους συνδυασμούς τους, λ.χ. την ίδια την ιδέα του αντικειμένου, ενώ, εξάλλου, με τη σκέψη δεν μπορούμε να δημιουργήσουμε αντικείμενα ποιοτικά νέα, αλλά μόνο να αναπαραγάγουμε και να συνδυάσουμε εκείνα που είναι ήδη δοσμένα. Είναι προφανές ότι το μαθηματικό «δεδομένο» σχετίζεται στενά με τα αφηρημένα στοιχεία που περιέχονται στις εμπειρικές ιδέες μας[26]. Ωστόσο, αυτό καθόλου δεν σημαίνει ότι τα δεδομένα αυτού του δεύτερου είδους, επειδή δεν μπορούν να συσχετισθούν με τη δράση ορισμένων πραγμάτων πάνω στα όργανα των αισθήσεων, είναι κάτι το καθαρά υποκειμενικό, όπως υποστήριξε ο Kant. Αντίθετα, μπορεί να αναπαριστούν μία όψη της αντικειμενικής πραγματικότητας, αλλά να διαφέρουν από τις αισθητηριακές αντιλήψεις κατά το ότι η παρουσία τους μέσα μας μπορεί να οφείλεται σε ένα άλλο είδος σχέσης ανάμεσα στην πραγματικότητα και σε εμάς.

Πάντως, εδώ το ζήτημα της αντικειμενικής ύπαρξης των αντικειμένων της μαθηματικής εποπτείας (που, παρεμπιπτόντως, είναι ο σωσίας του ζητήματος της αντικειμενικής ύπαρξης του εξωτερικού κόσμου) δεν έχει αποφασιστική σημασία. Αρκεί το απλό ψυχολογικό γεγονός της ύπαρξης μιας εποπτείας που είναι αρκετά σαφής, ώστε να οδηγήσει στα αξιώματα της θεωρίας των συνόλων και σε μια ανοικτή σειρά επεκτάσεών τους για να νοηματοδοτήσει το ερώτημα σχετικά με την αλήθεια ή το ψεύδος προτάσεων, όπως είναι η υπόθεση του συνεχούς του Cantor. Αλλά εκείνο που ίσως αιτιολογεί περισσότερο από κάθε άλλο πράγμα την αποδοχή αυτού του κριτηρίου για την αλήθεια στην περίπτωση της θεωρίας των συνόλων είναι το γεγονός ότι πρέπει συνεχώς να επικαλούμαστε τη μαθηματική εποπτεία όχι μόνο όταν θέλουμε να έχουμε μονοσήμαντες απαντήσεις στα ερωτήματα της θεωρίας των υπερπεπερασμένων συνόλων, αλλά και για τη λύση προβλημάτων της περατοκρατικής θεωρίας των αριθμών[27] (του τύπου της εικασίας του Goldbach)[28], και δύσκολα θα μπορούσε κανείς να αμφισβητήσει την ύπαρξη νοήματος και το μονοσήμαντο των εννοιών που χρησιμοποιούνται σ' αυτήν. Αυτό είναι συνέπεια του γεγονότος ότι για κάθε αξιωματικό σύστημα υπάρχει ένας άπειρος αριθμός προτάσεων αυτού του τύπου, για τις οποίες δεν μπορούμε να αποφανθούμε αν είναι αληθείς ή ψευδείς.

Πιο πάνω (σ. 188) επισημάναμε ότι, εκτός από τη μαθηματική εποπτεία, υπάρχει και άλλο (αν και μόνο πιθανό) κριτήριο για την αλήθεια των μαθηματικών αξιωμάτων, δηλ. η γονιμότητά τους για τα μαθηματικά και, θα μπορούσε κανείς να προσθέσει, για τη φυσική. Το κριτήριο αυτό, μολονότι μπορεί να γίνει αποφασιστικό στο μέλλον, δεν μπορεί ακόμα να εφαρμοσθεί στην περίπτωση των χαρακτηριστικών αξιωμάτων της θεωρίας των συνόλων (όπως τα αξιώματα που αναφέρονται σε μεγάλους πληθικούς αριθμούς), γιατί πολύ λίγα γνωρίζουμε για τις συνέπειές τους σε άλλους τομείς. Το απλούστερο παράδειγμα εφαρμογής του κριτηρίου αυτού παρουσιάζεται όταν κάποιο συνολοθεωρητικό αξίωμα έχει αριθμοθεωρητικές συνέπειες, που μπορούν να επαληθευτούν υπολογιστικά έως οποιονδήποτε δεδομένο αριθμό. Αλλά από όσα γνωρίζουμε σήμερα δεν είναι δυνατόν μ' αυτόν τον τρόπο να κάνουμε αρκετά πιθανή την αλήθεια οποιουδήποτε αξιώματος της συνολοθεωρίας.

Υστερόγραφο

Λίγο καιρό αφότου είχα τελειώσει το γράψιμο του παρόντος, ο Paul J. Cohen έδωσε μία αρνητική απάντηση (1963α, 1964) στο ερώτημα αν η υπόθεση του συνεχούς του Cantor μπορεί να αποδειχθεί με βάση τα αξιώματα των von Neumann - Bernays για τη θεωρία των συνόλων (στα οποία περιλαμβάνεται το αξίωμα της επιλογής). Για ένα ευρύ φάσμα από $\aleph_\tau$, η ισότητα $2^{\aleph_0} = \aleph_\tau$ είναι μη αντιφατική και αποτελεί ασθενή επέκταση (δηλ. δεν συνεπάγεται νεά θεωρήματα της θεωρίας των αριθμών). Είναι ακόμα ανοικτό το πρόβλημα του αν για μία κατάλληλη έννοια «σταθεροτυπικού» ορισμού [standard definition] υπάρχουν οριστά $\aleph$ που δεν αποκλείονται από το θεώρημα του König (βλ. πιο πάνω, σ. 183). Φυσικά πρέπει να κάνουμε την παραδοχή ότι η ύπαρξη τέτοιων $\aleph_\tau$ μπορεί να αποδειχθεί ή ότι είναι ένα αίτημα.

Σημειώσεις

1. Σχετικά με το λόγο για τον οποίο υπάρχει το σύνολο όλων των πληθικών αριθμών, βλ. σημ. 15.

2. Για την απόδειξη τούτου του θεωρήματος απαιτείται το αξίωμα της επιλογής (βλ. A. A. Freankel και Y. Bar-Hillel, 1958). Αλλά μπορούμε να πούμε ότι το αξίωμα τούτο είναι σήμερα, από όλες σχεδόν τις δυνατές απόψεις, εξίσου καλά θεμελιωμένο όσο τα άλλα αξιώματα της θεωρίας των συνόλων. Έχει αποδειχθεί ότι συμβιβάζεται με τα άλλα αξιώματα της θεωρίας των συνόλων, που χρησιμοποιούνται συνήθως, εφόσον αυτά δεν είναι αντιφατικά (Gödel, 1940). Επιπλέον, αν μας δοθεί οποιοδήποτε σύστημα αντικειμένων το οποίο ικανοποιεί τα άλλα αξιώματα, είναι δυνατόν να ορίσουμε ένα σύστημα αντικειμένων που να ικανοποιεί αυτά τα αξιώματα *και* το αξίωμα της επιλογής. Τέλος, το αξίωμα της επιλογής είναι εξίσου προφανές όσο τα άλλα αξιώματα της θεωρίας των συνόλων για την «καθαρή» έννοια του συνόλου, που εξηγείται στη σημείωση 14.

3. Βλ. F. Hausdorff, 1914: 68, ή H. Bachmann, 1955: 167. Ο ισχυρισμός του J. König, στον οποίο οφείλεται το θεώρημα, πάει πολύ πέρα από όσα όντως αποδεικνύει (1904: 177).

4. Βλ. τον κατάλογο των ορισμών στις σελίδες 191-92.

5. Βλ. F. Hausdorff, 1914, και 3η έκδ. 1935: 32. Το ζήτημα δεν έχει αποφασισθεί ούτε για τα συμπληρώματα των αναλυτικών συνόλων· μπορεί μόνο να αποδειχθεί ότι αυτά έχουν πληθάριθμο $\aleph_0$ ή $\aleph_1$ ή τον πληθάριθμο του συνεχούς ή είναι πεπερασμένα (βλ. C. Kuratowski, 1933, I: 246).

6. Αυτή η αναγωγή μπορεί να γίνει χάρη στα αποτελέσματα και τις μεθόδους μιας εργασίας του A. Tarski (1925: 1).

7. Για κανονικούς αριθμούς $\aleph_\alpha$ έχουμε αμέσως:

$$\aleph_\alpha^{\mathrm{cf}(\aleph_\alpha)} = \aleph_\alpha^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$$

8. Βλ. H. Weyl 1918, 2η έκδ. 1932. Αν η διαδικασία κατασκευής συνόλων που περιγράφεται σ' αυτό (σ. 20) επαναληφθεί κάμποσες φορές (υπερπεπερασμένος αριμός), τότε έχουμε ακριβώς τους πραγματικούς αριθμούς του μοντέλου της θεωρίας των συνόλων που αναφέρεται στο Κεφάλαιο 4, μοντέλο στο οποίο αληθεύει η υπόθεση του συνεχούς. Αλλά αυτή η επανάληψη δεν είναι δυνατή μέσα στα όρια της ημι-ιντουισιονιστικής άποψης.

9. Πρέπει να παραδεχθούμε ότι το πνεύμα των σύγχρονων αφηρημένων κλάδων των μαθηματικών, ιδιαίτερα της θεωρίας των κατηγοριών, υπερβαίνει αυτή την έννοια του συνόλου, όπως γίνεται φανερό, λ.χ., από την εφαρμογή των κατηγοριών στον εαυτό τους (βλέπε J. Mac Lane, 1961). Δεν φαίνεται όμως να χάνει τίποτε το μαθηματικό περιεχόμενο της θεωρίας, αν διακρίνουμε κατηγορίες διαφόρων βαθμίδων. Αν υπήρχαν μαθηματικά ενδιαφέρουσες αποδείξεις οι οποίες δεν θα ήσαν έγκυρες σ' αυτή την ερμηνεία, τότε τα παράδοξα της θεωρίας των συνόλων θα γίνονταν ένα σοβαρό πρόβλημα για τα μαθηματικά.

10. Τούτη η έκφραση περιλαμβάνει και την υπερπεπερασμένη επανάληψη· δηλ. η ολότητα των συνόλων που παράγονται με πεπερασμένη επανάληψη θεωρείται, με τη σειρά της, ως ένα πεπερασμένο σύνολο και αποτελεί την αφετηρία για παραπέρα εφαρμογές της πράξης «σύνολο των».

11. Η πράξη «σύνολο των *x*» (όπου η μεταβλητή «*x*» έχει ως πεδίο ορισμού της ένα δεδομένο είδος αντικειμένων) δεν μπορεί να ορισθεί ικανοποιητικά (τουλάχιστον όχι με τις

σημερινές γνώσεις μας), αλλά μπορεί μόνο να παραφρασθεί με άλλες εκφράσεις οι οποίες, με τη σειρά τους, εμπεριέχουν την έννοια του συνόλου, όπως οι: «πλήθος των x», «συνδυασμός οσωνδήποτε x_P», «μέρος της ολότητας των x», όπου ως «πλήθος» («συνδυασμός», «μέρος») θεωρείται κάτι που υπάρχει από μόνο του, ανεξάρτητα από το αν μπορούμε να το ορίσουμε με έναν πεπερασμένο αριθμό λέξεων (δεν αποκλείονται, λοιπόν, τα σύνολα που έχουν τυχαία στοιχεία).

12. Από αυτή τη διασάφηση του όρου *σύνολο* συνάγεται αμέσως ότι δεν μπορεί να υπάρχει το σύνολο όλων των συνόλων ή ένα σύνολο με ανάλογο πλάτος, αφού σε κάθε σύνολο, που έχει παραχθεί μ' αυτόν τον τρόπο, επιτρέπει αμέσως παραπέρα εφαρμογές της πράξης «σύνολο των» και, επομένως, την ύπαρξη μεγαλύτερων συνόλων.

13. Βλ., λ.χ., P. Bernays, 1937-54, 2: 65· 6: 1· 7: 65 133· 8: 89, J. von Naumann, 1925: 219, 1929: 227 και 1928: 669. K. Gödel, 1940. P. Bernays και A. A. Fraenkel, 1958. Η εισαγωγή πολύ ισχυρών αξιωμάτων για το άπειρο επέτρεψε να επιτευχθούν πρόσφατα πολύ κομψότερες αξιωματοποιήσεις (βλ. Bernays, 1961).

14. Αν τα αξιώματα παρουσίαζαν αντιφάσεις, θα είχαμε την τελευταία από τις τέσσερις a priori εναλλακτικές δυνατότητες για την εικασία του Cantor, δηλ. από τα αξιώματα της θεωρίας των συνόλων θα μπορούσαν να αποδειχθούν ταυτόχρονα και η πρόταση και η άρνησή της.

15. Ομοίως η έννοια «ιδιότητα συνόλου» (ο δεύτερος από τους αρχικούς όρους της θεωρίας των συνόλων) υποβάλλει την ιδέα διαδοχικών επεκτάσεων των αξιωμάτων που αναφέρονται σ' αυτήν. Επιπλέον, μπορεί κανείς να εισαγάγει την έννοια της «ιδιότητας μιας ιδιότητας ενός συνόλου» κτλ. Ωστόσο, τα νέα αξιώματα που πορίζόμαστε μ' αυτόν τον τρόπο, αν περιοριστούμε στις συνέπειές τους που αναφέρονται σε προτάσεις οι οποίες αφορούν περιορισμένα πεδία συνόλων (όπως η υπόθεση του συνεχούς), περιέχονται (απ' ό,τι γνωρίζουμε σήμερα) στα αξιώματα των συνόλων.

16. Βλ. Mahlo, 1911: 190-200· 1913: 269-76. Ωστόσο, από τον τρόπο με τον οποίο ο Mahlo παρουσιάζει το θέμα δεν φαίνεται να προκύπτει ότι οι αριθμοί που ορίζει υπάρχουν πραγματικά. Πρόσφατα πραγματοποιήθηκε μεγάλη πρόοδος σχετικά με τα αξιώματα του απείρου. Ιδιαίτερα, μερικά τέτοια αξιώματα διατυπώθηκαν με βάση αρχές εντελώς διαφορετικές από τις αρχές του Mahlo, και ο Dana Scott απέδειξε ότι ένα τους συνεπάγεται την άρνηση της πρότασης *A* (που αναφέρεται στη σελίδα 189 πιο κάτω, Κεφ. 4). Γι' αυτό η απόδειξη της μη αντιφατικότητας της υπόθεσης του συνεχούς, που επεξηγώ στη σελίδα 189, *δεν* ισχύει αν προστεθεί τούτο το αξίωμα. Όμως δεν είναι ακόμη σαφές, αν τα αξιώματα αυτά απορρέουν από τη γενική έννοια του συνόλου με την έννοια που απορρέουν τα αξιώματα του Mahlo. Βλ. A. Tarski, 1962: 134, D. Scott, 1961· W. P. Hanf και Scott, 1961: 445. Ο Azriel Lévy παρήγαγε τα αξιώματα του Mahlo από μία γενική αρχή σχετική με το σύστημα όλων των συνόλων (1960: 233). Βλ. και P. Bernays, 1961: 11, όπου όλα σχεδόν τα αξιώματα της θεωρίας των συνόλων παράγονται από την αρχή του Lévy.

17. Δηλ. που είναι δυνατόν να οριστούν με ορισμένες διαδικασίες, «*με τη γλώσσα* των διατακτικών αριθμών» (παναπεί, περίπου, με την υπόθεση ότι για κάθε διατακτικό αριθμό δίδεται ένα σύμβολο που αναφέρεται σ' αυτόν). Βλ. Gödel, 1940 και 1939. Φυσικά, η αντινομία του Richard δεν έχει εφαρμογή σ' αυτό το είδος οριστότητας, αφού η ολότητα των διατακτικών αριθμών ασφαλώς δεν είναι αριθμήσιμη.

18. Και το πρόγραμμα του D. Hilbert για τη λύση του προβλήματος του συνεχούς (βλ. Hilbert, 1926: 161), που, ωστόσο, δεν πραγματοποιήθηκε ποτέ, βασιζόταν στην εξέταση όλων των δυνατών ορισμών των πραγματικών αριθμών.

19. Από την άλλη μεριά, θα μπορούσε ίσως να εξαχθεί η άρνηση της εικασίας του Cantor από ένα αξίωμα που κατά κάποιο τρόπο είναι αντίθετο με αυτό. Εννοώ ένα αξίωμα (παρόμοιο με το αξίωμα του Hilbert για τη γεωμετρική πληρότητα) με το οποίο θα διατυπωνόταν κάποια μέγιστη ιδιότητα του συστήματος όλων των συνόλων, ενώ στο αξίωμα *A* διατυπώνεται μία ελάχιστη ιδιότητα. Ας σημειωθεί ότι μόνο μία μέγιστη ιδιότητα φαίνεται να μπορεί να εναρμονιστεί με την έννοια του συνόλου που επεξηγήθηκε στη σημείωση 11.

20. Με την ευκαιρία τούτη θέλω να διορθώσω ένα λάθος στο συμβολισμό και ένα τυπογραφικό λάθος που βρίσκονται στη δεύτερη εργασία μου: στις αράδες 25-29, σ. 242· 4-6 και 10, σ. 222· 11-29, σ. 223, το γράμμα *α* πρέπει να αντικατασταθεί παντού από το *μ*. Επίσης, στο θεώρημα 6, σ. 222, ανάμεσα στα $\varphi_\alpha(x)$ και $\varphi_{\bar{\alpha}}(x')$ πρέπει να μπει το σημείο «$\equiv$». Για μία πλήρη έκθεση της απόδειξης σε όλες της τις λεπτομέρειες πρέπει να δει κανείς το άρθρο που αναφέρω στη σημείωση 11.

21. Γνώμες που τείνουν σ' αυτή την κατεύθυνση εξέφρασε και ο N. Lusin, 1935: 129 κ.ε. Βλ. και W. Sierpinski, 1934: 132· 1934 (1η έκδοση): 39, θεώρημα 1.

22. Για την τρίτη περίπτωση βλ. Sierpinski, 1934α (1η έκδοση): 39, θεώρημα 1.

23. Βλ. S. Braun και W. Sierpinski, 1932: 1 πρόταση (Q). Η πρόταση αυτή ισοδυναμεί με την υπόθεση του συνεχούς.

24. Βλ. σ. 207 της δεύτερης έκδοσης ή Sierpinski, 1951: 9. Ανάλογα αποτελέσματα στους Kuratowski (1951: 15) και Sikorski, 1951: 18.

25. Η ίδια ασυμμετρία παρουσιάζεται και στις κατώτερες βαθμίδες της θεωρίας των συνόλων. Ο σκεπτικιστής έχει λιγότερους λόγους να θεωρεί ύποπτα αυτά τα αξιώματα.

26. Ας σημειωθεί ότι υπάρχει στενή σχέση ανάμεσα στην έννοια του συνόλου, που εξηγήθηκε στη σημείωση 14, και στις κατηγορίες της καθαρής νόησης με τη σημασία που δίνει ο Kant. Πράγματι, λειτουργία και των δύο είναι η «σύνθεση», δηλ. η γένεση ενοτήτων από πολλαπλότητες (λ.χ., στον Kant, της ιδέας *ενός* αντικειμένου από τις διάφορες φαινομενικές μορφές του).

27. Εκτός αν ικανοποιείται κανείς με επαγωγικές (πιθανές) αποφάσεις, όπως η επαλήθευση του θεωρήματος έως πολύ μεγάλους αριθμούς ή πιο έμμεσες επαγωγικές διαδικασίες (βλ. σ. 188-89 και 196).

28. Δηλ. καθολικές προτάσεις σχετικές με ακεραίους, για τις οποίες μπορούμε να αποφανθούμε σε κάθε μεμονωμένη περίπτωση.

Βιβλιογραφία

Bachmann, H. 1955. «Transfinite Zahlen». *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, n.s. vol. 1.

Bernays, P. 1937-54. «A System of Axiomatic Set Theory», parts 1-7. *Journal of Symbolic Logic*, vols. 2, 6, 7, 8, 13 and 19.

1958. *Axiomatic Set Theory*. With a historical introduction by Abraham A. Fraenkel, Amsterdam: North-Holland.

1961. «Zur Frage der Unendlichkeitsschemata in der axiomatischen Mengenlehre». In *Essays on the Foundations of Mathematics, Dedicated to A. A. Fraenkel on His Seventieth Anniversary*. Edited by Y. Bar-Hillel, E. I. J. Poznanski, M. O. Rabin, and A. Robinson. Jerusalem: Magness Press, Hebrew University.

Blumenthal, L. 1940. «A Paradox, a Paradox, a Most Ingenius Paradox». *American Mathematical Monthly*, vol. 47.

Braun, S., and Sierpinski, W. 1932. «Sur quelques propositions équivalentes à l'hypothèse du continu», *Fundamenta Mathematicae*, vol. 19.

Brouwer, L. E. J. 1907, *Over de grondslagen der wiskunde*. Διδακτορική διατριβή, Municipal University of Amsterdam, 1907. Amsterdam και Λιψία: Mass και Suchtelen.

1909. «Die möglichen Machtigkeiten». *Atti* del IV Congresso Internazionale dei Matematici (Ρώμη, 1908), 3 τόμοι. Επιμέλεια: G. Castelnuovo. Ρώμη: Salviucci.

Cohen, P. J. 1963. «The Independence of the Continuum Hypothesis», part 1. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 50.

1964. «The Independence of the Continuum Hypothesis», part 2. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 51.

Errera, A. 1953. «Le Problème du continu». *Atti della Accademia Ligure di Scienze e Lettere* (Genova), vol. 9.

Fraenkel, A. A., and Bar-Hillel, Y. 1958. *Foundations of Set Theory*. Amsterdam: North-Holland; 2nd rev. ed. by A. A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel, and A. Lévy, *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, vol. 67. Amsterdam: North-Holland, 1973.

Gödel, K. 1939. «Consistency-Proof for the Generalized Continuum-Hypothesis». *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 25.

1940. *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum-hypothesis with the Axioms of Set Theory*. *Annals of Mathematics Studies*, no. 3. Princeton: Princeton University Press.

Hajnal, A. 1956. «On a Consistency Theorem Connected with the Generalized Continuum Problem». *Zeitschrift für mathematische Logic und Grundlagen der Mathematik*, vol. 2.

Hanf, W. P. and Scott, D. 1961. «Classifying Inaccessible Cardinals». *Notices of the American Mathematical Society*, vol. 8.

Hausdorff, F. 1914. *Grundzüge der Mengenlehre*. Leipzig: Veit; 2nd rev. ed., Berlin and Leipzig: de Gruyter, 1927; 3rd ed., 1935.

Hilbert, D. 1926. «Über das Unendliche». *Mathematische Annalen*, vol. 95.

Hurewicz, W. 1932. «Une remarque sur l'hypothèse du continu». *Fundamenta Mathematicae*, vol. 19.

König, J. 1905. «Zum Kontinuum-Problem». *Mathematische Annalen*, vol. 60.

Kuratowski, C. 1933-50. *Topologie*, 2 vols. *Monografie Mathematyczne*, vols. 3 and 21; 2nd ed., Warsaw: Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, 1948-52. Αγγλική μετάφραση, 1966-8.

1948. «Ensembles projectifs et ensembles singuliers». *Fundamenta Mathematicae*, vol. 35.

1951. «Sur une charactérisation des alephs». *Fundamenta Mathematicae*, vol. 38.

Lévy, A. 1960. «Axiom Schemata of Strong Infinity in Axiomatic Set Theory». *Pacific Journal of Mathematics*, vol. 10.

Lusin, N. 1914. «Sur un problème de M. Baire». *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences* (Paris), vol. 158.

1935. «Sur les ensembles analytiques nuls». *Fundamenta Mathematicae*, vol. 25.

Lusin, N., and Sierpinski, W. 1918. «Sur quelques propriétés des ensembles». *Bulletin International de l'Académie des Sciences de Cracovie. Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles, ser. A: Sciences Mathématiques*.

Mac Lane, S. 1961. «Localy Small Categories and the Foundations of Set Theory». In *Infinitistic Methods. Proceedings of the Symposium on Foundations of Mathematics* (Warsaw, 1959). London and New York: Pergamon Press.

Mahlo, P. 1911. «Über lineare transfinite Mengen». *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften*, vol. 63. Leipzig: Teubner.

Scott, D. 1961. «Measurable Cardinals and Constructible Sets». *Bulletin de L'Académie Polonaise des Sciensces, Série des Sciences Mathématiques, Astronomiques et Physiques*, vol. 9.

Sierpinski, W. 1934a. *Hypothèse du Continu*. *Monografie Matematyczne*, vol. 4. Warsaw: Z Subwencji Funduszu Kultury Narodowej: 2nd ed., New York: Chelsea, 1956.

1934b. «Sur une extension de la notion de l'homéomorphie». *Fundamenta Mathematicae*, vol. 22.

1935. «Sur deux ensembles linéaires singuliers». *Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa: Scienze Fisiche e Mathematiche*, 2nd ser. vol. 4.

1951. «Sur quelques propositions concernant la puissance de continu.» *Fundamenta Mathematicae*, vol. 38.

Sierpinski, W., and Tarski, A. 1930. «Sur une propriété caractéristique des nombres inaccessibles». *Fundamenta Mathematicae*, vol. 15.

Sikorski, R. 1951. «A Characterization of Alephs». *Fundamenta Mathematicae*, vol. 38.

Tarski, A. 1925. «Quelques théorèmes sur les alephs». *Fundamenta Mathematicae*, vol. 7.

1938. «Über unerreichbare Kardinalzahlen». *Fundamenta Mathematicae*, vol. 30.

1962. «Some Problems and Results Relevant to the Foundations of Set Theory». In *Logic, Methodology and Philosophy of Sciense. Proceedinds of the 1960 International Congress* (Standford, Calif.). Edited by E. Nagel. P. Suppes, and A. Tarski. Standford, Calif.: Standford University Press.

von Neumann, J. 1925. «Eine Axiomatisierung der Mengenlehre». *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 154.

Weyl, H. 1918. *Das Kontinuum: Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis*. Leipzig: Veit; αναδημοσίευση Berlin και Leipzing: Gruyter, 1932.

Zermelo, E. 1930. «Über Grenzzahlen und Mengenbereiche». *Fundamenta Mathematicae*, vol. 16.