13

ΟΙ ΙΝΤΟΥΙΣΙΟΝΙΣΤΙΚΕΣ ΑΠΟΨΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΦΥΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

AREND HEYTING

Ο Arend Heyting ήταν μαθητής του Brouwer. Εκτός από πλειάδα άρθρων, έγραψε τα βιβλία *Fondements des Mathématiqes* (1955) και *Intuitionism: An Introduction* (1956). Ειδική σημασία έχει η προσπάθεια που έκανε, στις αρχές της δεκαετίας του '30, να τυποποιήσει τις ιδέες του ιντουισιονισμού. Αυτή η τυποποίηση μαζί με τις τυποποιήσεις που ακολούθησαν και οφείλονται σε άλλους συγγραφείς, έκαναν τις ιδέες του ιντουισιονισμού προσιτές σε περισσότερους μελετητές, και διευκόλυναν στη σύγκρισή του με τις άλλες απόψεις.

Π. Χ.

1. Εισαγωγή

Ένα από τα ερωτήματα που θέτουν οι φιλόσοφοι είναι: Γιατί τα μαθηματικά θεωρήματα είναι τόσο βέβαια; Από πού πηγάζει η ιδιότητα των μαθηματικών να είναι προφανή και η αλήθειά τους αναμφίβολη; Σ' αυτά τα ερωτήματα οι ιντουισιονιστές απαντούν: Οι βασικές έννοιες των μαθηματικών είναι τόσο υπερβολικά απλές, σχεδόν κοινότοπες, που δεν γεννιέται καμία αμφιβολία για τις ιδιότητές τους. Ο ιντουισιονισμός δεν είναι ένα φιλοσοφικό σύστημα στο ίδιο επίπεδο όπως ο ρεαλισμός, ο ιδεαλισμός ή ο υπαρξισμός. Η μόνη φιλοσοφική θέση του μαθηματικού ιντουισιονισμού είναι πως για την κατανόηση των μαθηματικών δεν χρειάζεται καμία φιλοσοφία. Αντίθετα, κάθε φιλοσοφία είναι εννοιολογικά πολύ πιο πολύπλοκη από τα μαθηματικά.

Η λογική, με τη συνηθισμένη σημασία, εξαρτάται από φιλοσοφικά ζητήματα. Μία από τις βασικές έννοιές της είναι η αλήθεια των προτάσεων. Αλλά τι είναι μία πρόταση; Συμπίπτει με την απόφανση μέσω της οποίας εκφράζεται ή είναι κάτι που βρίσκεται πίσω από την απόφανση, κάποιο νόημα; Αν είναι το τελευταίο, τότε ποια σχέση υπάρχει ανάμεσα στην πρόταση και στην απόφανση; Και τι σημαίνει: η πρόταση είναι αληθής; Μήπως αυτή η έννοια προϋποθέτει την ύπαρξη ενός εξωτερικού κόσμου στον οποίο αυτή αληθεύει; Αν η πρόταση συμπίπτει με την απόφανση, μπορούμε να θέσουμε ανάλογα ερωτήματα. Δεν θα επιχειρήσω να απαντήσω· δόθηκαν πολλές και διάφορες απαντήσεις και καμία δεν είναι εντελώς πειστική· όλες τους δείχνουν ότι η λογική είναι πολύπλοκη και, επομένως, ακατάλληλη ως βάση των μαθηματικών. Θα επανέλθω στις σχέσεις της λογικής με τα μαθηματικά σε άλλο σημείο τούτης της ομιλίας.

Αναζητούμε μία βάση των μαθηματικών, η οποία να δίνεται άμεσα και να είναι άμεσα κατανοητή χωρίς φιλοσοφικές λεπτολογίες. Πρώτη παρουσιάζεται η διαδικασία της αρίθμησης. Ωστόσο, η αρίθμηση καθιερώνει μία αντιστοιχία ανάμεσα σε υλικά, ή μη υλικά, αντικείμενα και στους φυσικούς αριθμούς, επομένως μπορεί να γίνει κατανοητή μόνο αν είναι δεδομένοι ένας εξωτερικός κόσμος (ή τουλάχιστον κάποιο είδος αντικειμένων) και οι φυσικοί αριθμοί. Ωστόσο, είναι ακόμη αρκετά πολύπλοκη ώστε να αποτελέσει τη βάση των μαθηματικών. Μία ανάλυση της διεργασίας της αρίθμησης θα μας οδηγήσει σε απλούστερες, αμεσότερες έννοιες. Μπορούμε να απαριθμήσουμε πράγματα κάθε λογής, αλλά αυτά μεταξύ τους έχουν μία κοινή ιδιότητα: μπορούν να απομονωθούν. Το να απομονώνουμε ένα αντικείμενο, να συγκεντρώνουμε την προσοχή μας σ' αυτό, συνιστά θεμελιώδη πνευματική λειτουργία. Χωρίς αυτήν, δεν είναι δυνατή η σκέψη. Με το να απομονώνει αντικείμενα, ο νους ενεργεί. Η αισθητηριακή αντίληψή μας σε μία δεδομένη στιγμή δεν δίδεται ως σύλλεγμα οντοτήτων· είναι ένα όλον στο οποίο απομονώνουμε οντότητες μέσω μιας λιγότερο ή περισσότερο συνειδητής νοητικής ενέργειας.

Φαίνεται σαν να μην έχουμε προχωρήσει, επειδή ακόμη απαριθμούμε υλικά αντικείμενα. Στην πραγματικότητα, αυτά που απομονώνουμε νοητικά δεν είναι αντικείμενα, αλλά αντιλήψεις. Μπορώ να συγκεντρώσω την προσοχή μου σε μία ορισμένη εντύπωση, τις περισσότερες φορές μία οπτική εντύπωση. Πρακτικά αυτή η εντύπωση συνδέεται αμέσως με αναρίθμητες μνήμες, εντυπώσεις και εικόνες, ώστε να σχηματίσει την έννοια του αντικειμένου με τη γενική σημασία του όρου. Αλλά για την αρίθμηση είναι επουσιώδες το τι απομονώνεται· σημασία έχει η νοητική ενέργεια του να απομονώνουμε. Η αφετηρία κάθε σκέψης, και ιδιαίτερα της μαθηματικής, είναι η οντότητα που συλλαμβάνει ο ανθρώπινος νους. Όταν σκεφτόμαστε, σκεφτόμαστε με οντότητες. Αυτό δεν σημαίνει ότι όλος ο νοητικός βίος μας συνίσταται στη σκέψη με οντότητες. Αντίθετα, όσο πιο έντονα ζούμε, τόσο λιγότερο σκεφτόμαστε με μεμονωμένες οντότητες. Όταν δρα μία ισχυρή συγκίνηση, ο κόσμος φαίνεται να είναι ένα όλον φορτισμένο με συγκίνηση. Μόνο αφού κοπάσουν οι συγκινήσεις, καταστρώνουμε το σχέδιο

των σκοπών και των τρόπων για να φτάσουμε ώς αυτές [τις οντότητες].

Αντί να λέω «συγκεντρώνω την προσοχή μου σε μία αντίληψη», θα λέω «δημιουργώ μία οντότητα», αλλά δεν πρέπει να μας διαφεύγει το ότι εδώ το ρήμα «δημιουργώ» δεν έχει την ίδια σημασία όπως στην [έκφραση] «δημιουργώ ένα έργο τέχνης». Η ζωγραφιά που δημιούργησα υπάρχει σε έναν εξωτερικό κόσμο, αλλά αυτό δεν ισχύει για την οντότητα που δημιουργώ νοητικά.

Η νοητική δημιουργία είναι ενέργεια που όλοι εκτελούμε σχεδόν κάθε στιγμή, εφόσον είμαστε ξυπνητοί. Σχετικά μ' αυτήν, μπορούμε να θέσουμε φιλοσοφικά ερωτήματα· λ.χ.: Πώς είναι δυνατόν να σκεφτόμαστε με οντότητες; Αλλά το κάνουμε χωρίς να απαντάμε σε τέτοια ερωτήματα, το ίδιο όπως έχουμε συνείδηση και όπως ζούμε χωρίς να ξέρουμε πώς είναι δυνατόν να υπάρχουν έμβια όντα. Δεν μπορεί κανείς να αρνηθεί ότι το να συλλαμβάνουμε μία οντότητα είναι ενέργεια του ατομικού νου. Για την ώρα αφήνω κατά μέρος το ζήτημα της αντικειμενικότητας· αυτό ανήκει στη φιλοσοφία. Στην απλούστερη μορφή τους τα μαθηματικά μένουν έγκλειστα σε ένα νου· αργότερα πρέπει να εξετάσουμε το πώς μπορούν να ανακοινωθούν.

2. *Η αριθμητική*

Τα μαθηματικά δεν θα ήταν πολύ χρήσιμα, αν σταματούσαν μετά από τη δημιουργία μίας οντότητας· αυτή η ενέργεια μπορεί να επαναληφθεί. Και πάλι θέτουμε φιλοσοφικά ερωτήματα: Πώς είναι δυνατόν μία οντότητα που έχει δημιουργηθεί να διατηρεί την ταυτότητά της, και πώς είναι δυνατή η διάκρισή της από μία άλλη οντότητα;

Αλλά πάλι αυτή η συλλογιστική έρχεται μετά από το γεγονός: όλοι μπορούν να διαπιστώσουν μόνοι τους ότι είναι ικανοί να συγκεντρώσουν την προσοχή τους σε μία αντίληψη και κατόπιν σε άλλη αντίληψη, ενώ διατηρούν την πρώτη στη μνήμη τους. Αυτή είναι η βάση της αρίθμησης. Δεν έχει σημασία αυτό που απαριθμείται, σημασία έχει η ίδια η διεργασία της αρίθμησης, η νοητική δραστηριότητα. Κατασκευάζουμε νοητικά τους φυσικούς αριθμούς, δημιουργώντας μία οντότητα, μία άλλη, ακόμη μία κτλ. Είναι φανερό ότι στην κατασκευή, λ.χ., του αριθμού πέντε, δεν έχει απολύτως καμία σημασία η φύση των οντοτήτων που τον συνιστούν. Μόλις εισήχθησαν τα αριθμητικά, οι άνθρωποι έμαθαν να παραμερίζουν το περιεχόμενο των αισθητηριακών αντιλήψεων που απομονώνονται και να τις θεωρούν ως καθαρές οντότητες.

Τώρα έχουμε κατασκευάσει κάθε αριθμό ατομικά. Δεν είμαστε ακόμη σε θέση να κάνουμε δηλώσεις για κάθε φυσικό αριθμό. Τέτοιες δηλώσεις διατυπώνονται συνήθως με τη βοήθεια ενός γενικευτικού ποσοδείκτη: Για κάθε φυσικό αριθμό *n*, ισχύει η *A(n)*. Με πιο ρητό τρόπο: Αν υποθέσουμε ότι κατασκευάσαμε ένα φυσικό αριθμό *n*, τότε μπορούμε να αποδείξουμε ότι *A(n)*. Βλέπουμε ότι αυτό περιέχει την έννοια της υποθετικής κατασκευής. Αυτή η έννοια είναι θεμελιακή για τα μαθηματικά. Όλα σχεδόν τα θεωρήματα μπορούν να πάρουν τη μορφή: Ας υποθέσουμε ότι κάναμε την κατασκευή *A*, τότε μπορούμε να κάνουμε την κατασκευή *B*. Η απόδειξη ενός τέτοιου θεωρήματος συνίσταται σε μία κατασκευή η οποία, όταν συνδεθεί με την κατασκευή *A*, δίνει την κατασκευή *B*.

Δίνω ένα παράδειγμα. Θέλω να αποδείξω το θεώρημα: Αν ο *n* είναι οποιοσδήποτε φυσικός αριθμός, τότε υπάρχει ένας πρώτος αριθμός μεγαλύτερος από τον *n*. Η απόδειξη είναι: υπολογίστε τον $n! + 1$. Βρείτε τους παράγοντες αυτού του αριθμού. Καθένας από τους πρώτους παράγοντές του θα υπερβαίνει τον *n*. Η απόδειξη είναι μία γενική μέθοδος κατασκευής, που πρέπει να εφαρμοσθεί σε μία υποθετική κατασκευή.

Ώς εδώ χρειαστήκαμε τις έννοιες του *φυσικού αριθμού*, της *υποθετικής κατασκευής* ενός φυσικού αριθμού και της *γενικής μεθόδου* κατασκευής η οποία πρέπει να εφαρμοσθεί σε μία υποθετική κατασκευή.

Αυτές οι έννοιες αρκούν για την αριθμητική. Ειδικά, ας θεωρήσουμε την αρχή της πλήρους επαγωγής:

$$A(1) \,\&\, \bigwedge x(A(x) \to A(x+1)) \to \bigwedge x A(x)\,.$$

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε αποδείξει την $A(1)$, και ότι έχουμε μία γενική μέθοδο *M*, που μας επιτρέπει, για κάθε φυσικό αριθμό *x*, να παραγάγουμε μία απόδειξη της $A(x+1)$ από μία υποθετική απόδειξη της $A(x)$. Έστω ότι *n* τυχών φυσικός αριθμός. Για να αποδείξουμε την $A(n)$ κατασκευάζουμε τον αριθμό *n*, και σε κάθε βήμα από το *x* στο $x + 1$ εφαρμόζουμε την *M*, ώστε να έχουμε την $A(x + 1)$. Το αποτέλεσμα θα είναι μία απόδειξη της $A(n)$.

Πρέπει να προειδοποιήσω εναντίον της παρανόησης ότι χρειαζόμαστε μία γενική αρχή για την πλήρη επαγωγή· χρειαζόμαστε μόνο την εφαρμογή σε κάθε ειδική περίπτωση. Λόγου χάρη, θέλω να αποδείξω ότι $\sum_1^n k = (n(n+1))/2$. Αυτό αληθεύει για $n = 1$. Ας υποθέσουμε ότι αποδείχθηκε για *x*. (Υποθετική κατασκευή.)

$$\sum_1^{x+1} k = \frac{x(x+1)}{2} + x + 1 = \frac{(x+1)(x+2)}{2} \quad \text{(Γενική μέθοδος).}$$

Έστω *n* τυχών φυσικός αριθμός. Μπορώ να αποδείξω την $A(x)$ διαδοχικά για $x = 1, \ldots n$. Το τελευταίο είναι άμεση εφαρμογή του ορισμού του φυσικού ορισμού.

Μπορεί κανείς να υποστηρίξει ότι για την αριθμητική δεν χρειάζονται περισσότερες έννοιες από όσες ανέφερα. Οι αριθμητικές προτάσεις σχηματίζονται από τις πρωτογενείς σχέσεις $a = b$ και $a < b$ μέσω των συνδετικών &, v, →, ¬ και των ποσοδεικτών $\bigwedge$, $\bigvee$. Μία απόδειξη της $a = b$ συνίσταται στην ταυτόχρονη κατασκευή των *a* και *b* με τέτοιο τρόπο, ώστε όταν στο *a* προσθέτουμε μία οντότητα, το ίδιο να κάνουμε και στο *b*. Ανάλογη είναι και η εξήγηση του $a < b$. Φυσικά, οι λογικές σταθερές πρέπει να ερμηνευθούν με τη βοήθεια κατασκευών. Αυτό θα το εξετάσω αργότερα· εδώ θα είναι χρήσιμες μερικές παρατηρήσεις. Η ερμηνεία της $A \to B$ περιέχεται σ' αυτό που είπα: Μία απόδειξη της $A \to B$ αποτελείται από μία γενική μέθοδο που μετατρέπει κάθε απόδειξη της *A* σε απόδειξη της *B*. Μία απόδειξη της $\neg A$ συνίσταται σε μία μέθοδο που θα μετέτρεπε μία υποτιθέμενη απόδειξη της *A* σε αντίφαση. Νομίζω πως πρέπει να θεωρήσουμε [την άρνηση] ως πρωταρχική έννοια. Βλέπουμε ξεκάθαρα πως είναι αδύνατον να ισχύει $1 = 2$, αλλά η έννοια του αδύνατου δεν μπορεί να αναχθεί στις άλλες έννοιες που ανέφερα. Καλό είναι, όταν μπορούμε, να αποφεύγουμε την άρνηση. Η εργασία του Bishop δείχνει ότι το σημαντικότερο μέρος της ανάλυσης μπορεί να οικοδομηθεί με θετικό τρόπο [Bishop, 1967]. Μία απόδειξη της $\bigwedge x A(x)$ συνίσταται σε μία γενική μέθοδο η οποία μετατρέπει την κατασκευή ενός φυσικού αριθμού *x* σε απόδειξη της $A(x)$. Τέλος, μία απόδειξη της $\bigvee x A(x)$ είναι ο συνδυασμός της κατασκευής ενός φυσικού αριθμού *x* και μιας απόδειξης της $A(x)$.

Η έννοια της *αντίφασης* είναι η μόνη νέα θεμελιώδης έννοια.

3. Το συνεχές

Αυτά για την αριθμητική. Το επόμενο βήμα αφορά την εισαγωγή των πραγματικών αριθμών που, για τον κατασκευαστικό μαθηματικό, γεννά πολλά προβλήματα. Ένας πραγματικός αριθμός ορίζεται με τη βοήθεια μιας άπειρης ακολουθίας φυσικών αριθμών. Εδώ το άπειρο είναι πολύ ουσιαστικότερο από ό,τι στην αριθμητική, όπου παρουσιάζεται μόνο με τη μορφή «μετά από κάθε φυσικό αριθμό υπάρχει ένας διαδοχικός».

Στην ανάλυση κάνουμε δηλώσεις για κάθε πραγματικό αριθμό, δηλ. σχετικές με κάθε άπειρη ακολουθία φυσικών αριθμών. Η δυσκολία έγκειται στο ότι δεν έχουμε σαφή έννοια της υποθετικής ακολουθίας· δεν υπάρχει γενική μέθοδος για την κατασκευή ακολουθιών, όπως υπάρχει για την κατασκευή φυσικών αριθμών. Η θεωρία των αναδρομικών συναρτήσεων επέτρεψε να δοθεί μία λύση και η αναδρομική ανάλυση έγινε σημαντικό πεδίο έρευνας. Αλλά η έννοια της αναδρομικής συνάρτησης εισήχθη κατά τη δεκαετία του '30, ενώ οι εργασίες του Brouwer πάνω στους πραγματικούς αριθμούς έγιναν ανάμεσα στο 1907 και το 1927. Επιπλέον, όπως είναι γνωστό, οι αναδρομικοί πραγματικοί αριθμοί δεν εξαντλούν το συνεχές· το σύνολο των αναδρομικών πραγματικών αριθμών είναι αριθμήσιμο, ενώ το συνεχές δεν είναι αριθμήσιμο. Ο Brouwer επιχείρησε να βρει μία κατασκευαστική έννοια που να πλησιάζει όσο γίνεται περισσότερο στην έννοια του συνηθισμένου συνεχούς. Όλη τη ζωή του κατέβαλε προσπάθειες για να το λύσει. Στη διατριβή του 1907 εισήγαγε το συνεχές ως πρωτογενή έννοια. Ο άνθρωπος έχει μία εποπτεία ενός συνεχούς (του χρονικού συνεχούς) από την οποία μπορεί να κατασκευάσει μία πυκνή, άπειρα αριθμήσιμη κλίμακα. Ένα σημείο του συνεχούς ορίζεται από μία συγκλίνουσα ακολουθία σημείων της κλίμακας. Αν αρκεσθούμε σε ακολουθίες που καθορίζονται από έναν κανόνα (προκαθορισμένες ακολουθίες), τότε δεν έχουμε κάθε σημείο του συνεχούς. Αυτό δεν αποτελεί δυσκολία για τα μη κατασκευαστικά μαθηματικά. Εκεί ορίζουμε το σύνολο όλων των ακολουθιών που συγκλίνουν, είτε αυτές ορίζονται από νόμο είτε όχι. Αλλά για τον κατασκευαστικό μαθηματικό λογίζονται ως άτομα μόνο οι προκαθορισμένες ακολουθίες. Ο Brouwer βρήκε τη λύση με το να εισαγάγει την έννοια μιας ακολουθίας επιλογών. Μία συγκλίνουσα ακολουθία ρητών αριθμών μπορεί να παραχθεί με το να επιλέξουμε τα μέλη της το ένα μετά από το άλλο: $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$, και η σύγκλιση εξασφαλίζεται, λ.χ., με τον περιορισμό ότι $|\varrho_{\nu+1} - \varrho_\nu| < 2^{-\nu}$ για κάθε ν. Εδώ έχουμε ένα απλό παράδειγμα *αναπτύγματος* (spread). Ένα ανάπτυγμα ορίζεται από έναν κανόνα ο οποίος καθορίζει τους περιορισμούς πάνω στις επιλογές.

Από το 1918 ο Brouwer δεν μνημονεύει το συνεχές ως πρωτογενή έννοια. Είναι σε θέση να το παραλείψει, γιατί η έννοια του αναπτύγματος που ορίσαμε πιο πάνω το παριστά πλήρως, στο βαθμό που πρόκειται για μαθηματικές ιδιότητες.

Η έννοια του αναπτύγματος δεν παρουσιάζει δυσκολίες. Ορίζεται με τη βοήθεια ενός περιορισμού των πεπερασμένων ακολουθιών. Αλλά η ακολουθία επιλογών ως στοιχείο του αναπτύγματος είναι μία σημαντική νέα θεμελιώδης έννοια που γεννά διάφορα ζητήματα. Το πρώτο ζήτημα είναι: πόσο ελεύθερη πρέπει να είναι μία ακολουθία επιλογών; Επιχείρησαν να ορίσουν την ακολουθία επιλογών ως ά-νομη ακολουθία στην οποία κάθε επιλογή πρέπει να είναι εντελώς ελεύθερη. Όμως, αυτές οι ά-νομες ακολουθίες έχουν ενοχλητικές ιδιότητες· είναι ερημίτες, γιατί ο καθένας είναι ανίκανος να συναναστραφεί τον άλλο [Troelstra, 1969]. Η μόνη δυνατή σχέση δύο ά-νομων ακολουθιών είναι η σχέση της τέλειας ταύτισης, γιατί αν δεν συμπίπτουν, τότε είναι εντελώς ανεξάρτητες. Επομένως, για να κάνουμε μαθηματικά με ακολουθίες επιλογών πρέπει να δεχθούμε περιορισμούς της ελευθερίας των επιλογών. Ο Brouwer τους δέχθηκε από την αρχή. Ως παράδειγμα είδαμε το ανάπτυγμα που παριστά το συνεχές. Είναι

λογικό να δεχόμαστε ότι ισχύουν περιορισμοί κατά τη διαδικασία επιλογής. Λόγου χάρη, αρχίζω χωρίς περιορισμούς και επιλέγω τους 1/2, 1/4, 3/8. Σ' αυτό το στάδιο μπορώ να επιβάλλω τον περιορισμό ότι κάθε παραπέρα μέλος θα είναι 3/8. Μια άλλη δυνατότητα είναι να αφήσουμε ανοικτή τη δυνατότητα να επιλέγουμε πάντα το 3/8 ή, από τον $n = k$ και πέρα, πάντα το $3/8 + 2^{-k}$. Στη δεύτερη περίπτωση δεν ξέρουμε αν η ακολουθία θα ορίζει τον αριθμό 3/8 ή κάποιον αριθμό που είναι λίγο μεγαλύτερος του 3/8. Σε οποιαδήποτε στιγμή, μία ακολουθία επιλογών a αποτελείται από ένα πεπερασμένο τμήμα μαζί με ορισμένους περιορισμούς ως προς την εξακολούθησή του. Εφόσον η απόδειξη μιας ιδιότητας της a πρέπει να δίδεται σε πεπερασμένο χρόνο, μπορεί να εξαρτάται μόνο από αυτά τα δεδομένα. Το γεγονός είναι γνωστό ως αρχή της συνέχειας κατά Brouwer και μας επιτρέπει να καταλάβουμε ορισμένα ιδιόρρυθμα θεωρήματα του συνεχούς. Λόγου χάρη, κάθε συνάρτηση που ορίζεται παντού πάνω σε ένα κλειστό διάστημα είναι ομοιόμορφα συνεχής. Έστω f μία συνάρτηση· θέλουμε να υπολογίσουμε την τιμή $f(a) = b$. Εδώ ο a ορίζεται από την ακολουθία επιλογών από ρητούς $a_1, a_2, \ldots$, ο b από την ακολουθία $b_1, b_2, \ldots$ ·ο b_ν πρέπει να προσδιορισθεί από μία πεπερασμένη ακολουθία $a_1, a_2, \ldots, a_\mu$, αλλά τότε όλες οι ακολουθίες που αρχίζουν με το $a_1, a_2, \ldots a_\mu$, θα δώσουν το ίδιο b_ν. Αυτό σημαίνει ότι μία ορισμένη προσέγγιση του b καθορίζεται από μία ορισμένη προσέγγιση του a. Αυτό δεν αποτελεί απόδειξη του θεωρήματος· έδειξα μόνο ότι το κάνει ευλογοφανές.

Είναι δυνατόν να παραγάγουμε κατασκευαστικά μαθηματικά χωρίς να χρησιμοποιήσουμε ακολουθίες επιλογών, αλλά αυτές παρουσιάζουν ενδιαφέρον για διάφορους λόγους.

(1) Είναι δυνατή μία έννοια του συνεχούς που να αντιστοιχεί προς τις συνήθεις έννοιες, μόνο αν χρησιμοποιήσουμε ακολουθίες επιλογών.

(2) Οι διαλογισμοί με τις ακολουθίες επιλογών παρουσιάζουν εγγενές ενδιαφέρον, όπως, λ.χ., το θεώρημα του συνεχούς, και οδηγούν σε ενδιαφέροντα αποτελέσματα.

(3) Η ακριβής διατύπωση της έννοιας και οι βασικές ιδιότητες των ακολουθιών επιλογών οδηγούν σε ζητήματα που κίνησαν το ενδιαφέρον κατά τα δέκα τελευταία χρόνια. Είναι αξιοσημείωτο ότι η σημαντικότερη μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε σ' αυτές τις εργασίες είναι η τυποποίηση· αυτό επηρέασε έντονα τη σχέση του ιντουισιονισμού και του φορμαλισμού, σχέση για την οποία θα μιλήσω αργότερα.

Ένα άλλο επιχείρημα που συνηγορεί για τις ακολουθίες επιλογών είναι ότι μ' αυτές μπορούμε να κάνουμε υπολογισμούς. Λόγου χάρη, αν οι $\{a_\nu\}$ και $\{b_\nu\}$ είναι συγκλίνουσες ακολουθίες επιλογών, που ορίζουν τους πραγματικούς αριθμούς a και b, τότε η $\{a_\nu + b_\nu\}$ θα είναι μία συγκλίνουσα ακολουθία που ορίζει τον $a + b$.

4. *Θεωρία των συνόλων*

Πρέπει να πούμε μερικά λόγια για τη θεωρία των συνόλων. Διαδόθηκε πλατιά η γνώμη ότι οι ιντουισιονιστές δέχονται μόνο τα αποκρίσιμα σύνολα, όπως το σύνολο των ζυγών αριθμών ή των πρώτων αριθμών, αλλά αυτή δεν είναι η ιντουισιονιστική άποψη· είναι πολύ στενή. Δεν υπάρχει καμία αντίρρηση στο να αποδεχθεί κανείς ότι οποιαδήποτε ιδιότητα μαθηματικών οντοτήτων ορίζει ένα σύνολο. Ο Brouwer ονομάζει Είδος ένα τέτοιο σύνολο, αλλά αυτό είναι μόνο ζήτημα ορολογίας. Λόγου χάρη, μπορώ να μιλώ για το Είδος S των ψηφίων που εμφανίζονται άπειρες φορές στη δεκαδική ανάπτυξη του π. Μολονότι δεν μπορώ να δείξω ένα στοιχείο του S, γνωρίζω ότι το S δεν μπορεί να είναι κενό. Έτσι, αν MK είναι το Είδος των μη κενών Ειδών από φυσικούς αριθμούς, τότε $S \in MK$.

Η θεωρία των Ειδών είναι αυστηρά κατηγορηματική με την έννοια ότι τα στοιχεία ενός Είδους πρέπει να έχουν οριστεί ανεξάρτητα από το ίδιο το Είδος. Αρχίζουμε με τους φυσικούς αριθμούς· την επόμενη βαθμίδα σχηματίζουν οι ακολουθίες επιλογών από φυσικούς αριθμούς και τα αναπτύγματα που μπορούν να θεωρηθούν ως Είδη από ακολουθίες επιλογών. Τα είδη από φυσικούς αριθμούς και τα αναπτύγματα είναι Είδη τύπου 0. Ένα είδος, όπως το MK, είναι τύπου 1 κ.ο.κ.ε. Η ποσοποίηση πάνω σε Είδη είναι αποδεκτή, μόνο που είναι περιορισμένη στα στοιχεία ενός δεδομένου αναπτύγματος ή Είδους.

5. *Λογική*

Συνόψισα τις βασικές ιδέες των ιντουισιονιστικών μαθηματικών. Τώρα θα μιλήσω για τις σχέσεις τους με τη λογική, τη φιλοσοφία και τη γλώσσα. Η λέξη 'λογική' χρησιμοποιείται με διάφορες σημασίες· επομένως, ο λογικός νόμος επιδέχεται διάφορες ερμηνείες.

Ας θεωρήσουμε το συλλογισμό

(1) Ο Σωκράτης είναι άνθρωπος.

(2) Κάθε άνθρωπος είναι θνητός.

(3) Ο Σωκράτης είναι θνητός.

(I) Ο συλλογισμός μπορεί να θεωρηθεί ως γλωσσικός κανόνας:

(1) Α είναι Β.

(2) Κάθε Β είναι Γ.

(3) Α είναι Γ.

Όταν συμφωνώ με τα (1) και (2), περιμένει κανείς ότι θα συμφωνήσω και με το (3).

(II) Ο συλλογισμός αυτός μπορεί να θεωρηθεί ως δήλωση που αφορά τον κόσμο: Αν αληθεύει η (1) και αληθεύει η (2), τότε αληθεύει η (3).

(III) Ο συλλογισμός μπορεί να θεωρηθεί ως μαθηματικό θεώρημα. Αν η οντότητα Α ανήκει στο Είδος B και το B είναι μέρος του Είδους Γ, τότε η A ανήκει στο Γ.

$$\frac{\begin{array}{c}A\in B\\ B\subset\Gamma\end{array}}{A\in\Gamma.}$$

Είναι φανερό ότι καμία από αυτές τις ερμηνείες δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη θεμελίωση των μαθηματικών. Αντίθετα, καθεμιά τους προϋποθέτει τα μαθηματικά. Οι (I) και (II) ανήκουν στα εφαρμοσμένα μαθηματικά, γιατί η θεωρία των γλωσσών, καθώς και κάθε άλλη θεωρία για τον πραγματικό κόσμο, είναι εφαρμοσμένα μαθηματικά. Είναι προφανές ότι η (III) είναι θεώρημα της θεωρίας των συνόλων, θεωρίας που αποτελεί προχωρημένο τμήμα των μαθηματικών.

Γενικότερα, η λογική μπορεί να θεωρηθεί ως τμήμα της γλωσσολογίας ή ως φιλοσοφική θεωρία για τον κόσμο· και στις δύο περιπτώσεις ανήκει στα εφαρμοσμένα μαθηματικά. Τα καθαρά μαθηματικά εξετάζουν μόνο την τρίτη ερμηνεία. Τα θεωρήματα της λογικής είναι μαθηματικά θεωρήματα. Η λογική δεν θεμελιώνει τα μαθηματικά· αντίθετα, από εννοιολογική άποψη, είναι ένα πολύπλοκο και λεπτό τμήμα των μαθηματικών.

Αν τα μαθηματικά αποτελούνται από νοητικές κατασκευές, τότε πρέπει κάθε μαθηματική πρόταση να είναι βεβαίωση σχετική με νοητικές κατασκευές. Με μεγαλύτερη ακρίβεια: κάθε μαθηματική πρόταση είναι της μορφής: Έγινε μία κατασκευή με τις ακόλουθες ιδιότητες: ... Στη λογική εξετάζουμε την περίπτωση στην οποία η κατασκευή φτιάχνεται από απλούστερες κατασκευές με τη βοήθεια των λογικών σταθερών. Μίλησα για την ερμηνεία των λογικών σταθερών, αλλά θα ήταν χρήσιμες μερικές πρόσθετες παρατηρήσεις. Η σύζευξη δεν παρουσιάζει δυσκολίες. Όσο για τη διάζευξη, μπορούμε να βεβαιώσουμε την $A \vee B$ όταν έχουμε εκτελέσει μία από τις κατασκευές A ή B· αλλά είναι ανοησία να λέω ότι έχω εκτελέσει μία από τις κατασκευές A ή B, χωρίς να ξέρω ποια από τις δύο. Όταν βεβαιώνω $A \vee B$, είμαι πάντα σε θέση είτε να βεβαιώσω την A είτε να βεβαιώσω τη B. Η συνεπαγωγή ερμηνεύεται με τον ακόλουθο τρόπο: Μπορώ να βεβαιώσω την $A \rightarrow B$, όταν είμαι σε θέση να μετατρέψω οποιαδήποτε απόδειξη της A σε απόδειξη της B. Με άλλα λόγια, πρέπει να διαθέτω μία γενική μέθοδο κατασκευής, η οποία, όταν εφαρμοσθεί στην A, δίνει μία απόδειξη της B. Μίλησα για την αναγωγή της άρνησης στη βασική έννοια της αντίφασης.

Με αυτές τις ερμηνείες, ισχύει ο νόμος του αποκλειόμενου τρίτου $A \vee \neg A$; Όταν τον βεβαιώνω, αυτό σημαίνει ότι για την πρόταση A μπορούμε ή να αποδείξουμε ότι A ή να παραγάγουμε μία αντίφαση από μία υποθετική απόδειξη της A. Είναι φανερό πως δεν μπορούμε να κάνουμε κάτι τέτοιο για κάθε πρόταση A· επομένως, ο νόμος του αποκλειομένου τρίτου δεν μπορεί να αποδειχθεί. Όταν δεν ξέρουμε αν η A είναι αληθής ή όχι, τότε είναι καλύτερο να μη βεβαιώνουμε τίποτα σχετικό μ' αυτήν.

Προτάθηκε η ακόλουθη ασθενέστερη ερμηνεία της $A \vee B$: δεν μπορούν να είναι ψευδείς και η A και η B. Τότε η $A \vee B$ θα σήμαινε το ίδιο όπως η $\neg(\neg A \,\&\, \neg B)$. Με αυτή την ερμηνεία ο νόμος του αποκλειομένου τρίτου γίνεται $\neg(\neg A \,\&\, \neg\neg A)$, επομένως, είναι ειδική περίπτωση του νόμου της αντίφασης. Μολονότι αυτή η ερμηνεία είναι βάσιμη, εναντίον της υπάρχουν σοβαρές αντιρρήσεις. Ήδη επισήμανα ότι πρέπει να αποφεύγουμε την άρνηση, όπου αυτό είναι δυνατόν. Είναι σημαντικό το να αποφασίζουμε για κάθε αλγεβρικό αριθμό, αν είναι ρητός ή όχι· χωρίς την ισχυρή διάζευξη θα ήταν αδύνατον να εκφράσουμε αυτή την ιδιότητα. Η ασθενής ερμηνεία $\neg(\neg A \,\&\, \neg\neg A)$ δίνει μονάχα το κοινότοπο αποτέλεσμα ότι ένας αλγεβρικός αριθμός δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα άρρητος και μη άρρητος. Η ιντουισιονιστική λογική επιτρέπει λεπτότερες διακρίσεις που δεν μπορεί να τις εκφράσει η κλασική δίτιμη λογική.

Η ερμηνεία του υπαρκτικού ποσοδείκτη $\bigvee$ είναι ανάλογη με την ερμηνεία της διάζευξης. Μπορώ να βεβαιώσω την $\bigvee xA(x)$, όταν έχω κατασκευάσει ένα στοιχείο x και αποδείξει ότι γι' αυτό το στοιχείο ισχύει η $A(x)$. Η ασθενής ερμηνεία θα ήταν $\neg \bigwedge x \neg A(x)$, αλλά οι δύο έννοιες διαφέρουν και η ισχυρή ύπαρξη έχει πολύ μεγαλύτερη σπουδαιότητα. Είδαμε το παράδειγμα της πρότασης: Το ψηφίο x εμφανίζεται άπειρες φορές στο δεκαδικό ανάπτυγμα του π. Γι' αυτή την πρόταση είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι $\neg \bigwedge x \neg A(x)$, αλλά δεν μπορούμε να αποδείξουμε ότι $(\bigvee x) A(x)$ γιατί, αν το a είναι ένα τυχόν ψηφίο, είναι ακόμα δυνατόν να συμβαίνει $\neg A(a)$.

Δεν θα δώσω πολλά παραδείγματα όπως αυτό, αλλά πρέπει να πω μερικά λόγια για τη χρήση τους, επειδή συνεχίζεται η παρανόηση ότι αυτά αποτελούν ουσιαστικό τμήμα των ιντουισιονιστικών μαθηματικών. Έχουν την ίδια λειτουργία όπως τα παρόμοια παραδείγματα των κλασικών μαθηματικών. Λόγου χάρη, το παράδειγμα μιας συνεχούς συνάρτησης που δεν παραγωγίζεται πουθενά είναι χρήσιμο ως προειδοποίηση για λάθη, αλλά δεν αποτελεί ουσιαστικό τμήμα της ανάλυσης.

Είναι φανερό πως ο καθολικός ποσοδείκτης μπορεί να χρησιμοποιηθεί, όταν το πεδίο της μεταβλητής δίνεται από κάποιο Είδος. Ένα θεώρημα μπορεί να ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό, για κάθε πραγματικό αριθμό, για κάθε Είδος πραγματικών αριθμών κτλ., αλλά όχι για οτιδήποτε. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση στην οποία πεδίο της μεταβλητής είναι

ένα ανάπτυγμα, γιατί ένα στοιχείο x ενός αναπτύγματος S είναι μία ακολουθία επιλογών· ώστε όταν ισχύει η $A(x)$ για κάθε στοιχείο x του S, αυτό πρέπει να είναι γνωστό για κάθε x μετά που θα έχει επιλεχθεί ένα πεπερασμένο τμήμα του x. Με άλλα λόγια, η βεβαίωση $\bigwedge xA(x)$, όπου το x έχει ως πεδίο ορισμού ένα ανάπτυγμα, είναι πολύ ισχυρή.

6. *Τα μαθηματικά και η γλώσσα*

Αυτά για τη λογική. Αλλά τώρα ας ρωτήσουμε πώς μπορούν να μεταδοθούν τα μαθηματικά. Κατά τη γνώμη μου δεν υπάρχει ουσιαστική διαφορά ανάμεσα στη χρήση της γλώσσας γι' αυτόν το σκοπό και στη χρήση της για άλλους σκοπούς. Χρησιμοποιούμε τη γλώσσα για να επηρεάσουμε τις σκέψεις και τις πράξεις των άλλων ανθρώπων. Όταν ένας μαθηματικός γράφει ένα άρθρο ή ένα βιβλίο, επιχειρεί να υποδείξει σε άλλους ανθρώπους μαθηματικές κατασκευές· όταν κρατάει σημειώσεις για να βοηθήσει τη μνήμη του, το μελλοντικό εγώ του παίζει το ρόλο ενός άλλου ανθρώπου. Όπως κάθε άλλη χρήση της γλώσσας, η ανακοίνωση των μαθηματικών δεν είναι απαλλαγμένη από την παρανόηση. Υπάρχει καλή αποδεικτική μαρτυρία για την υπόθεση ότι η κατασκευή μικρών φυσικών αριθμών είναι η ίδια για όλους τους ανθρώπους, αλλά για να ανακοινώσουμε πολυπλοκότερες δομές ούτε και η μεγάλη προσπάθεια να είμαστε σαφείς δεν μπορεί να εξασφαλίσει την πλήρη κατανόηση.

Σ' αυτό ο ιντουισιονισμός είναι το ακριβές αντίθετο του φορμαλισμού. Δεν επιδιώκω να περιγράψω την άποψη του φορμαλισμού, αλλά η σύγκριση των δύο προσανατολισμών μπορεί να συμβάλει στη διασάφηση και των δύο. Τολμώ να εξετάσω το ριζοσπαστικότερο είδος φορμαλισμού, που είναι το πιο κατάλληλο για τη σύγκριση με τον ιντουισιονισμό. Ο φορμαλισμός θεωρεί ότι κάθε ιντουισιονιστικός μαθηματικός διαλογισμός είναι ανακριβής. Μελετά τη γλώσσα στην οποία εκφράζονται οι διαλογισμοί αυτοί και προσπαθεί να τους τυποποιήσει. Το αποτέλεσμα είναι μία τυπική δομή που αποτελείται από έναν πεπερασμένο αριθμό συμβόλων και έναν πεπερασμένο αριθμό κανόνων για το συνδυασμό τους σε τύπους. Από ιντουισιονιστική σκοπιά αυτή η διεργασία ανήκει στα εφαρμοσμένα μαθηματικά και το τυπικό σύστημα μπορεί να εφαρμοσθεί στην επιστήμη και στη βιομηχανία· η λειτουργία του μπορεί να συγκριθεί με τη λειτουργία μιας μηχανής σε ένα εργοστάσιο.

Φυσικά δεν έχουμε καμία αντίρρηση εναντίον της δραστηριότητας των φορμαλιστών· είναι επίσης αναμφίβολο ότι οι επιστήμονες και οι μηχανικοί ενδιαφέρονται περισσότερο για τους ίδιους τους μαθηματικούς τύπους παρά για την αφηρημένη ερμηνεία τους. Δεν υπάρχει αντιμαχία ανάμεσα στον ιντουισιονισμό και το φορμαλισμό, όταν ο καθένας περιοριστεί στο θέμα του, ο ιντουισιονισμός στις νοητικές κατασκευές, ο φορμαλισμός στην κατασκευή ενός τυπικού συστήματος, παρακινημένος από την εσωτερική ομορφιά του ή από τη χρησιμότητά του για την επιστήμη και τη βιομηχανία. Συγκρούονται όταν οι φορμαλιστές υποστηρίζουν ότι τα συστήματά τους εκφράζουν τη μαθηματική σκέψη. Οι ιντουισιονιστές έχουν δύο αντιρρήσεις εναντίον αυτής της θέσης. Πρώτον, όπως υποστήριξα μόλις τώρα, οι νοητικές κατασκευές δεν μπορούν να αποδοθούν με ακρίβεια από τη γλώσσα· δεύτερον, η συνηθισμένη ερμηνεία του τυπικού συστήματος δεν είναι νοητική κατασκευή.

Στην ιστορία της φορμαλιστικής έρευνας έχουν γίνει πολλές εργασίες πάνω στις αποδείξεις της συνέπειας. Από την άποψη που σκιαγραφώ, η σπουδαιότητά τους είναι κυρίως πρακτική. Ένα σύστημα που δεν έχει συνέπεια, στο οποίο παράγεται οποιοσδήποτε τύπος, δεν μπορεί να είναι πολύ χρήσιμο. Ο ισχυρισμός ότι μία απόδειξη εσωτερικής συνέπειας θα έδινε μία ερμηνεία του τυπικού συστήματος είναι εντελώς αστήρικτος.

Ωστόσο, υπάρχει μία δυνατή εφαρμογή των τυπικών μεθόδων στα ιντουισιονιστικά μαθηματικά. Είναι η καλύτερη μέθοδος για τη διερεύνηση των παραδοχών που κάνουμε σε μία δεδομένη απόδειξη. Πρόσφατα εφαρμόσθηκε με επιτυχία στις αποδείξεις της θεωρίας του Brouwer για τις ακολουθίες των επιλογών. Η τυποποίηση της εποπτικής λογικής εξυπηρετεί έναν άλλο σκοπό, δηλ. εκφράζει τα λογικά θεωρήματα σε μία γλώσσα που είναι κατανοητή στον παραδοσιακό μαθηματικό. Ωστόσο, η μεταμαθηματική εργασία πάνω στο τυπικό σύστημα των ιντουισιονιστικών μαθηματικών, μολονότι ενδιαφέρουσα αυτή καθ' εαυτήν, δεν έχει μεγάλη σχέση με τα ιντουισιονιστικά μαθηματικά.

7. *Τα εφαρμοσμένα μαθηματικά*

Από όσα είπα στην αρχή τούτης της ομιλίας θα είναι σαφές ότι ολόκληρη η συνειδητή σκέψη μπορεί να θεωρηθεί ότι ανήκει στα εφαρμοσμένα μαθηματικά. Δεν ξεκινάμε, βέβαια, κατασκευάζοντας ένα μαθηματικό σύστημα που κατόπιν το εφαρμόζουμε στις εντυπώσεις μας. Στον καθημερινό βίο η δημιουργία μιας οντότητας συμβαδίζει με την εντύπωση που αυτή παριστά, και με το σύνθετο από μνήμες και προσδοκίες, το οποίο συνδέεται μ' αυτή την εντύπωση. Δεν ξέρουμε ποιο προηγείται, γιατί το σύνθετο γεννιέται ολόκληρο τη στιγμή που συγκεντρώνω την προσοχή μου πάνω του. Μόνο αργότερα μπορώ να το αναλύσω, λίγο ή πολύ, στα συστατικά του. Μία σκέψη, όπως αυτές που κάνουμε στον καθημερινό βίο, συνίσταται σε έναν πεπερασμένο αριθμό τέτοιων οντοτήτων και σχέσεων ανάμεσά τους.

Υπάρχει βαθμιαία εξέλιξη από αυτή τη φυσική δραστηριότητα στον καθημερινό βίο ώς την πιο αφηρημένη επιστήμη που κατασκευάζει η στενή συνεργασία επιστημονικών ομάδων. Η επιστήμη προσπαθεί να οργανώσει χώρους της εμπειρίας, οι οποίοι ώς τότε φαίνονταν χωριστοί, σε ευρύτερες δομές που τους περιλαμβάνουν ομαδικά. Σ' αυτό δεν υπάρχει θεμελιώδης διαφορά ανάμεσα στην επιστήμη με τη στενή σημασία (φυσική επιστήμη) και στις επιστήμες του ανθρώπου, όπως η ιστορία ή η ψυχολογία. Οι διαφορές είναι διαφορές βαθμού: Τα μαθηματικά συστήματα που χρησιμοποιεί η μοντέρνα φυσική είναι εξαιρετικά λεπτότερα από τα συστήματα στα οποία βασίζεται η ιστορία, αλλά και η δουλειά του ιστορικού συνίσταται στο να αποδεικνύει σχέσεις ανάμεσα σε γεγονότα που έχει απομονώσει στη συνεχή ροή των συμβάντων. Η ουσιαστική διαφορά ανάμεσα στις διάφορες επιστήμες δεν έγκειται στις μεθόδους με τις οποίες προσπαθούν να βάλουν τάξη στο υλικό τους, αλλά στον τρόπο με τον οποίο πορίζονται το ακατέργαστο υλικό τους. Λόγου χάρη, η αυτοπαρατηρησία είναι άχρηστη στη φυσική, ενώ είναι νόμιμη μέθοδος στην ιστορία, επειδή μας επιτρέπει να βρούμε σχέσεις ανάμεσα στις περιστάσεις στις οποίες βρίσκεται ένας άνθρωπος και στις αντιδράσεις του. Αλλά αυτή η καταγραφή γεγονότων ανήκει στην προ-επιστημονική φάση: το να μετρήσουμε τις μελανές κηλίδες πάνω στο αρνητικό μιας φωτογραφίας, το να έχουμε μία συνέντευξη, το να φανταστούμε τις αντιδράσεις κάποιου – αυτά δεν είναι ακόμα επιστήμη.

Κάθε επιστήμη υπερβαίνει πολύ ό,τι αντιλαμβανόμαστε άμεσα. Κατασκευάζει ένα μαθηματικό σύστημα στο οποίο μπορούν να συνταιριαστούν τα γεγονότα και οι σχέσεις τους. Η γεωμετρική δομή που επιβάλλουμε στον υλικό κόσμο περιέχει πολύ περισσότερα από όσα μπορούμε να παρατηρήσουμε πραγματικά. Ανάλογες παρατηρήσεις μπορούν να γίνουν και για την ιστορία: οι ιστορικοί προσπαθούν να προσαρμόσουν τα γεγονότα που αντλούν από τα ντοκουμέντα σε μία ευρύτερη δομή υποθετικών συμβάντων.

Θα είναι πια σαφές ότι η γλωσσολογία και η λογική, η τελευταία στο βαθμό που δεν θεωρείται κεφάλαιο των μαθηματικών, ανήκουν στα εφαρμοσμένα μαθηματικά. Και η επιστημονική φιλοσοφία ανήκει στα εφαρμοσμένα μαθηματικά, αλλά πολλά σημαντικά φιλοσοφικά έργα δεν είναι επιστημονικά. Αυτό δεν σημαίνει πως τα υποτιμώ. Πολλά φιλοσοφικά βιβλία είναι έργα τέχνης· ανήκουν περισσότερο στη λογοτεχνία ή στην ποίηση, παρά στην επιστήμη· συχνά είναι πολύ ποιητικά και ανήκουν στην καλύτερη λογοτεχνία. Αλλά είναι σφάλμα το να προφασίζονται πως ανήκουν στην επιστήμη· ούτε τους ταιριάζει η επιστημονική περιβολή.

Βιβλιογραφία

1. E. Bishop, *Foundations of Constructive Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1967.
2. L. E. Brouwer, *Over de Grondslagen der Wiskunde*, Amsterdam, 1907.
3. L. E. J. Brouwer, 'De Onbetrouwbaarheid Logische Principes', *Tijdschrift voor Wijsbegeerte 2* (1908) 152-158.
(Μεταφράσεις [στα αγγλικά] αυτών των δύο εργασιών θα περιλαμβάνονται στα 'Απαντα του L. E. J. Brouwer που θα κυκλοφορήσουν το 1974.) [Αυτά πράγματι κυκλοφόρησαν το 1975 και περιλαμβάνουν τις δύο προαναφερθείσες εργασίες.]
4. L. E. J. Brouwer, 'Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten, Erster Teil, Allgemeine Mengenlehre', *Verhandlingen Nederl. Akad. Wetenschappen*, 1e Sectie. *12*, No 5 (1918).
5. A. S. Troelstra, 'Informal Theory of Choice Sequences', *Studia Logica 25* (1969) 31-54.