Α. Αραγεώργης
Τομέας ΑΚΕΔ, Σχολή ΕΜΦΕ, ΕΜΠ

Παράδοξα, Θεωρία των Τύπων, Αρχή του Φαύλου Κύκλου, Μη-Κατηγορηματικοί Ορισμοί

Ως *παράδοξο* νοείται ένα επιχείρημα που παράγει μια αντίφαση από φαινομενικά αποδεκτές προκείμενες με φαινομενικά αποδεκτούς κανόνες συναγωγής.[1] Τα παράδοξα που αποτέλεσαν κεντρικό αντικείμενο ενδιαφέροντος για τη φιλοσοφία των μαθηματικών και της λογικής ταξινομούνται σε δυο κατηγορίες: (1) στα *συνολοθεωρητικά παράδοξα* που απαιτούν μόνο τη λογική και τη θεωρία συνόλων για τη διατύπωσή τους χρησιμοποιώντας ουσιωδώς εκφράσεις όπως 'σύνολο', '$\in$', 'πληθικότητα', 'διατακτικός αριθμός' (π.χ., παράδοξο Russell, παράδοξο Cantor, παράδοξο Burali-Forti) και (2) στα *σημασιολογικά παράδοξα* που διατυπώνονται στα πλαίσια φυσικών γλωσσών και χρησιμοποιούν ουσιωδώς εκφράσεις όπως 'είναι ψευδής', 'είναι ψευδής για', 'μπορεί να οριστεί', 'μπορεί να περιγραφεί' (π.χ., παράδοξο του Ψεύτη, παράδοξο Grelling, παράδοξο Berry).

Από τα παραπάνω έπεται ότι μια ολοκληρωμένη «λύση» ενός τέτοιου παραδόξου θα έχει δυο συνιστώσες: την *τυπική* και τη *φιλοσοφική*. Η τυπική λύση θα συνίσταται από τον εντοπισμό των φαινομενικά αποδεκτών προκείμενων ή κανόνων συναγωγής που πρέπει να εγκαταλειφθούν και, ενδεχομένως, από την υπόδειξη του τρόπου αντικατάστασής τους προκειμένου να προκύψει μια συνεπής τυπική θεωρία (για τα σύνολα ή τη σημασιολογία). Η *φιλοσοφική* λύση θα συνίσταται από μια εξήγηση του *γιατί* οι εν λόγω προκείμενες ή κανόνες συναγωγής δεν πρέπει, παρά «τα φαινόμενα», να θεωρούνται αποδεκτές ή αποδεκτοί.[2]

Στο "Mathematical Logic as Based on the Theory of Types",[3] ο Russell προσέφερε μια ολοκληρωμένη λύση των παραδόξων. Η τυπική λύση ήταν η περίφημη *θεωρία των τύπων* (theory of types). Η φιλοσοφική λύση είχε ως εξής: όλα τα παράδοξα πηγάζουν από την παραβίαση μιας θεμελιώδους αρχής, της *αρχής του φαύλου κύκλου* (vicious circle principle, VCP).

Πολύ χοντρικά, η θεωρία των τύπων ταξινομεί το σύμπαν του λόγου της θεωρίας συνόλων σε μια ιεραρχία: άτομα (τύπος 0), σύνολα ατόμων (τύπος 1), σύνολα συνόλων ατόμων (τύπος 2), …• και, αντίστοιχα, κατηγοριοποιεί με τη βοήθεια δεικτών τις μεταβλητές ανάλογα με τον τύπο των αντικειμένων που διατρέχουν: η x_0 διατρέχει αντικείμενα τύπου 0, η x_1 αντικείμενα τύπου 1, η x_2 αντικείμενα τύπου 2, …. Τέλος, περιορίζει τους κανόνες σχηματισμού έτσι ώστε μια έκφραση της μορφής '$v \in w$' να είναι καλώς σχηματισμένος τύπος μόνο αν ο δείκτης τύπου της w είναι ακριβώς κατά μια μονάδα μεγαλύτερος από τον δείκτη τύπου της v. Έτσι, για οποιοδήποτε φυσικό αριθμό n, η έκφραση '$x_n \in x_n$' δεν είναι καλώς

---

[1] Γενικότερα, το συμπέρασμα ενός παραδοξολογικού επιχειρήματος μπορεί να μην συνιστά αντίφαση αλλά να θεωρείται απλώς μη-αποδεκτό επειδή αντιβαίνει στις διαισθήσεις μας. Για παράδειγμα, τα «παράδοξα της υλικής συνεπαγωγής» στη φιλοσοφία της λογικής αντιβαίνουν σε διαισθήσεις για τη έννοια της συνεπαγωγής ενώ το «παράδοξο EPR» στη φιλοσοφία της κβαντικής μηχανικής αντιβαίνει σε διαισθήσεις για τον φυσικό κόσμο.

[2] Βλ. και Haack, S., *Philosophy of Logics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1978, 135-151.

[3] Το άρθρο πρωτοδημοσιεύθηκε στο *American Journal of Mathematics 30* (1908). Βρίσκεται στη συλλογή van Heijenoort, J. (ed.), *From Frege to Gödel: A Sourcebook in Mathematical Logic, 1879-1931*. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1967. Έχει μεταφραστεί στα ελληνικά στο Χριστοδουλίδης, Π. (επιμ.), *Η Φιλοσοφία των Μαθηματικών*. Αθήνα: Γ. Α. Πνευματικός, 1993. Οι αναφορές σε σελίδες είναι από τον τόμο του van Heijenoort.

σχηματισμένη και, συνεπώς, δεν μπορεί να εκφραστεί στη θεωρία η ιδιότητα «δεν ανήκει στον εαυτό του» που είναι απαραίτητη για την εμφάνιση του παραδόξου του Russell. Σε δεύτερο στάδιο, η θεωρία των τύπων επιβάλλει μια αντίστοιχη ιεραρχία τάξεων πάνω στις προτάσεις (κλειστοί τύποι) και τις προτασιακές συναρτήσεις (ανοικτοί τύποι) μαζί με τον περιορισμό ότι μια προτασιακή συνάρτηση παράγει προτάσεις μόνο για ορίσματα των οποίων η τάξη είναι κατά μία μονάδα κατώτερη της τάξης της. Οι προτασιακές συναρτήσεις ‘$'p'$ είναι αληθής’ και ‘$'p'$ είναι ψευδής’ φέρουν επίσης δείκτες ανάλογα με την τάξη των προτάσεων που επιδέχονται ως ορίσματα. Έτσι για μια πρόταση p τάξης n επιτρέπονται οι δηλώσεις ‘$'p'$ είναι αληθής$_{n+1}$’ και ‘$'p'$ είναι ψευδής$_{n+1}$’, αλλά όχι οι ‘$'p'$ είναι αληθής$_{n}$’ και ‘$'p'$ είναι ψευδής$_{n}$’. Κατά συνέπεια, η πρόταση που γεννά το παράδοξο του Ψεύτη –η πρόταση που ισχυρίζεται ότι η ίδια είναι ψευδής– δεν μπορεί πλέον να εκφραστεί.

Ο Russell διατύπωσε την αρχή του φαύλου κύκλου ως εξής:

> «Οτιδήποτε εμπεριέχει [involves] το όλον μιας συλλογής δεν πρέπει να είναι μέλος της συλλογής»• ή, αντίστροφα: «Αν, με την παραδοχή ότι μια ορισμένη συλλογή συγκροτούσε μια ολότητα, αυτή θα είχε μέλη που μπορούν να οριστούν μόνο με τη βοήθεια αυτής της ολότητας, τότε η εν λόγω συλλογή δεν συγκροτεί ολότητα». [Υποσημείωση: Όταν λέω ότι μια συλλογή δεν συγκροτεί ολότητα, εννοώ ότι δηλώσεις που αφορούν *όλα* τα μέλη της στερούνται νοήματος….] (σ. 155)

Στο “Russell’s Mathematical Logic”,[4] ο Gödel επαναδιατύπωσε την VCP με τον ακόλουθο τρόπο:

> Καμία ολότητα δεν μπορεί να περιέχει μέλη που μπορούν να οριστούν μόνο με τη βοήθεια αυτής της ολότητας, ή μέλη που εμπεριέχουν ή προϋποθέτουν την ολότητα αυτή. (σ. 454)

Ο Gödel (σ. 455) παρατήρησε σωστά ότι αυτή η διατύπωση περικλείει *τρεις* αρχές που αντιστοιχούν στις εκφράσεις «μπορεί να οριστεί μόνο με τη βοήθεια της», «εμπεριέχει την» και «προϋποθέτει την» και ότι η πρώτη εκδοχή είναι περισσότερο ενδιαφέρουσα, αλλά και λιγότερο εύλογη, από τις άλλες δυο επειδή ακριβώς εξοβελίζει από τη μαθηματική πρακτική τους λεγόμενους μη-κατηγορηματικούς ορισμούς. Ο ορισμός μιας μαθηματικής οντότητας λέγεται *μη-κατηγορηματικός* (impredicative) αν και μόνο αν κάνει ουσιώδη αναφορά σε μια συλλογή στην οποία ανήκει αυτή η οντότητα. Αλλά η VCP ορίζει ότι καμία ολότητα δεν μπορεί να περιλαμβάνει μέλη που ορίζονται μόνο βάσει του εαυτού της.

Στην περίπτωση μερικών παραδόξων (όπως, π.χ., εκείνο του Berry), είναι εύκολο να εντοπίσει κανείς τη χρήση μη κατηγορηματικών ορισμών. Ωστόσο η καχυποψία απέναντι στους μη-κατηγορηματικούς ορισμούς είχε τροφοδοτηθεί και από μια συγκεκριμένη φιλοσοφική άποψη για τα μαθηματικά αντικείμενα. Πράγματι, αν τα μαθηματικά αντικείμενα είναι κατασκευές του ανθρώπινου νου (ιδεαλισμός ως προς τις μαθηματικές οντότητες), τότε οι μη-κατηγορηματικοί ορισμοί φαίνονται ύποπτα κυκλικοί: δεν μπορεί κανείς να *κατασκευάσει* ένα αντικείμενο χρησιμοποιώντας μια συλλογή που *ήδη* το περιέχει. Και το πρόβλημα είναι οξύτερο στην περίπτωση συλλογών με άπειρο πλήθος στοιχείων γιατί ακριβώς η «σταδιακή κατασκευή» μιας τέτοιας συλλογής «δεν ολοκληρώνεται ποτέ»: η ίδια η συλλογή δεν

---

[4] Gödel, K. (1944): “Russell’s Mathematical Logic” στο Benacerraf, P. and Putnam, H. (eds.) (1983): *Philosophy of Mathematics*. 2nd edition. Cambridge: Cambridge University Press, 447-469.

μπορεί ποτέ να θεωρηθεί ως «τελειωμένο» αντικείμενο μελέτης.[5] Έτσι η κριτική των μη-κατηγορηματικών ορισμών συνδέεται με την κριτική της έννοιας του *πραγματικού* απείρου στο πλαίσιο μιας κατασκευαστικής αντίληψης για τα μαθηματικά αντικείμενα. Τέτοια ακριβώς ήταν η στάση του Poincaré.[6]

Βέβαια, για έναν ρεαλιστή ως προς τις μαθηματικές οντότητες, οι μη-κατηγορηματικοί ορισμοί είναι φιλοσοφικά «ανώδυνοι». Στο "Russell's Mathematical Logic", ο Gödel γράφει:

> … η αρχή του φαύλου κύκλου … εφαρμόζεται μόνο αν οι οντότητες που υπεισέρχονται κατασκευάζονται από εμάς. Σ' αυτή την περίπτωση είναι ξεκάθαρο ότι πρέπει να υπάρχει ένας ορισμός (συγκεκριμένα, η περιγραφή της κατασκευής) που δεν αναφέρεται σε μια ολότητα στην οποία ανήκει το αντικείμενο που ορίζεται, αφού η κατασκευή ενός πράγματος δεν μπορεί ασφαλώς να βασίζεται σε μια ολότητα πραγμάτων στην οποία ανήκει το ίδιο το αντικείμενο που πρόκειται να κατασκευαστεί. Αν, όμως, είναι θέμα αντικειμένων που υπάρχουν ανεξάρτητα από τις κατασκευές μας, δεν υπάρχει τίποτα το ανόητο στην ύπαρξη ολοτήτων που περιέχουν μέλη, τα οποία μπορούν να περιγραφούν (δηλαδή, να χαρακτηριστούν κατά μοναδικό τρόπο) μόνο με αναφορά σ' αυτήν την ολότητα. (σ. 456).

Και, όπως είναι γνωστό, ο Gödel προχωρεί στον ισχυρισμό ότι τα αντικείμενα της θεωρίας συνόλων υπάρχουν ανεξάρτητα από τις κατασκευές μας.

Το ζήτημα της VCP –και γενικότερα της στρατηγικής που πρέπει να ακολουθηθεί για τον εξοβελισμό των παραδόξων– αποτελεί παραδειγματική περίπτωση θεματικής όπου η φιλοσοφία των μαθηματικών εμπλέκεται με τη μαθηματική πρακτική. Και τούτο γιατί τα κλασικά μαθηματικά περιέχουν ένα πλήθος μη-κατηγορηματικών ορισμών (βλ. παρακάτω). Απ' αυτή την άποψη, η επιβολή της VCP θέτει περιορισμούς στους οποίους πρέπει να συμμορφωθεί η πρακτική των μαθηματικών. Από την άλλη, το γεγονός ότι η VCP είναι πολύ περιοριστική για τη μαθηματική πρακτική συνηγορεί υπέρ της αναζήτησης άλλης φιλοσοφικής λύσης των παραδόξων.

<u>Παραδείγματα Μη-Κατηγορηματικών Ορισμών</u>

1. *Θεωρία Διάταξης*. Έστω $\langle S, \leq \rangle$ ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο και $A \subseteq S$. Το σύνολο των άνω φραγμάτων του A στο S είναι $A^* = \{a \in S : x \leq a$ για κάθε $x \in A\}$. Αν υπάρχει $a^* \in A^*$ τέτοιο ώστε $a^* \leq a$ για κάθε $a \in A^*$, τότε λέμε ότι το a^* είναι το *ελάχιστο άνω φράγμα του* A *στο* S και γράφουμε $a^* = \sup_S A$.
2. *Τοπολογία*. Έστω A ένα σύνολο υποσυνόλων ενός μη-κενού συνόλου X. Η *τοπολογία* T *στο* X *που γεννάται από το* A είναι η τομή όλων των τοπολογιών στο X που περιέχουν το A.
3. *Θεωρία Μέτρου*. Η *σ-άλγεβρα των συνόλων Borel του* $\mathbb{R}^n$ ορίζεται ως η τομή όλων των σ-αλγεβρών που περιέχει όλα τα ανοικτά σύνολα του $\mathbb{R}^n$ –δηλαδή, ως η μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει όλα τα ανοικτά σύνολα του $\mathbb{R}^n$ (με τη συνήθη τοπολογία).

---

[5] Πράγματι, η εφαρμογή μη-κατηγορηματικών ορισμών σε σύνολα πεπερασμένης πληθικότητας δεν φαίνεται προβληματική. Σκεφθείτε εκφράσεις της καθημερινής γλώσσας όπως 'ο καλύτερος σκόρερ του φετινού πρωταθλήματος' ή ακόμη και 'ο τρελός του χωριού'.

[6] Βλ., π.χ., Poincaré, H., 'Les Mathématiques et la logique', *Revue de Métaphysique et de Morale* (1906), 249-317 και Poincaré, H., 'La logique de l'infini', *Revue de Métaphysique et de Morale* (1909), 461-482. Το δεύτερο άρθρο βρίσκεται μεταφρασμένο στα ελληνικά στο *Δευκαλίων 18/1*, Ιούνιος 2000.