Α. Αραγεώργης
Τομέας ΑΚΕΔ, Σχολή ΕΜΦΕ, ΕΜΠ

Μη Τεχνική Εισαγωγή στα
Θεωρήματα Μη Πληρότητας του Gödel*

1. Τα θεωρήματα μη πληρότητας

Ας φανταστούμε μια γλώσσα L που είναι εφοδιασμένη με ένα κατάλληλο σύστημα λογικών αξιωμάτων και αποδεικτικών κανόνων. Μια *θεωρία* T στη γλώσσα L είναι ένα σύνολο προτάσεων της L τέτοιο ώστε για κάθε πρόταση φ της L, αν η φ *αποδεικνύεται από την* (ή *είναι αποδείξιμη στην*) T (συμβολικά, $T \vdash \varphi$), τότε η φ ανήκει στην T (συμβολικά, $\varphi \in T$). Η θεωρία T λέγεται *συνεπής* αν και μόνον αν δεν υπάρχει πρόταση φ της L τέτοια ώστε $T \vdash \varphi$ και $T \vdash \neg\varphi$, όπου εδώ και στο εξής με '$\neg\varphi$' συμβολίζουμε την άρνηση μιας πρότασης φ της L - αλλιώς, η θεωρία T θα αποδείκνυε και, συνεπώς, θα περιείχε τη λογική αντίφαση $\varphi \wedge \neg\varphi$, όπου με '$\wedge$' συμβολίζουμε τον λογικό σύνδεσμο της σύζευξης ('και') στην L. Η θεωρία T λέγεται *πλήρης* ακριβώς στην περίπτωση για κάθε πρόταση φ της L είτε $T \vdash \varphi$ είτε $T \vdash \neg\varphi$. Έπεται ότι η θεωρία T θα λέγεται *μη πλήρης* αν και μόνον αν υπάρχει μια πρόταση φ της γλώσσας της θεωρίας που ούτε η ίδια ούτε η άρνησή της είναι αποδείξιμη στην θεωρία (συμβολικά, $T \nvdash \varphi$ και $T \nvdash \neg\varphi$, αντίστοιχα) – με αυτή την έννοια, η θεωρία T δεν αποφαίνεται ούτε για την «αλήθεια» ούτε για το «ψεύδος» της φ και για αυτό η πρόταση φ χαρακτηρίζεται ως *μη αποφασίσιμη*, *μη αποκρίσιμη* ή *μη απαντήσιμη* στην T.

Μια θεωρία T στη γλώσσα L λέγεται *αξιωματικοποιήσιμη* αν και μόνο αν υπάρχει ένα σύνολο A προτάσεων της L («αξιώματα» της T) τέτοιο ώστε (α) για κάθε πρόταση φ της L, $T \vdash \varphi$ ακριβώς στην περίπτωση που $A \vdash \varphi$ και (β) υπάρχει *αλγόριθμος* που αποφασίζει για οποιαδήποτε πρόταση της L εάν ανήκει στο A ή όχι. Αλλά *τι ακριβώς είναι ένας αλγόριθμος*; Η έννοια του αλγορίθμου φαίνεται να είναι τόσο αρχαία όσο και τα μαθηματικά. Οι αρχαίοι Έλληνες γεωμέτρες επινοούσαν σταδιακές διαδικασίες κατασκευής γεωμετρικών αντικειμένων με κανόνα και διαβήτη. Ακόμη και σήμερα ένα μεγάλο μέρος της βασικής μαθηματικής εκπαίδευσης συνίσταται στη διδαχή αλγορίθμων για την επίλυση προβλημάτων – π.χ., πρόσθεση ή πολλαπλασιασμός αριθμών με πολλά ψηφία, λύση αλγεβρικών εξισώσεων 1ου βαθμού, κ.λπ. Παρ' όλα αυτά η έννοια του αλγορίθμου δεν έχει ακόμη κατανοηθεί πλήρως: *δεν υπάρχει ένας καθολικά αποδεκτός ορισμός του όρου*

---

* Η εισαγωγή δεν διεκδικεί εύσημα μαθηματικής αυστηρότητας. Για παράδειγμα, συχνά χρησιμοποιώ απλώς τον όρο 'θεωρία' αντί του 'πρωτοβάθμια θεωρία', τον όρο 'αναδρομική συνάρτηση' αντί του 'μερική αναδρομική συνάρτηση', κ.λπ., και δεν δίνω ορισμούς κεντρικών όρων όπως 'μηχανή Turing', κ.ά. Ωστόσο, ελπίζω να είναι αρκετά αυστηρή ώστε να επιτρέψει να διαφανεί το περιεχόμενο των θεωρημάτων μη πληρότητας. Ο αναγνώστης που επιζητά μαθηματική αυστηρότητα ας συμβουλευτεί τα Τζουβάρας (1992), Boolos and Jeffrey (1980), Enderton (1972) ή Hedman (2006). Σύντομες και εύληπτες παρουσιάσεις των θεωρημάτων μη πληρότητας περιέχονται στα Rucker ([1982] 1999) και Smullyan (2001). Το πρωτότυπο άρθρο του ίδιου του Gödel είναι το Gödel ([1931] 1967). Το άρθρο του Raatikainen (2005) προσφέρει μια κατατοπιστική επισκόπηση των *φιλοσοφικών* συζητήσεων για τις συνέπειες των θεωρημάτων μη πληρότητας.

'αλγόριθμος'.[1] Μπορεί, βέβαια, κανείς να καταφύγει σε γενικόλογες περιγραφές όπως η ακόλουθη:[2]

(2) Ένας αλγόριθμος είναι μια αλάθητη, μηχανική, βήμα προς βήμα διαδικασία η οποία, τουλάχιστον ιδεατά, μπορεί να επιλύσει ένας είδος προβλήματος για οποιαδήποτε δεδομένα από ένα (άπειρο) σύνολο δυνατών δεδομένων.

Με τη λέξη '*αλάθητη*' εννοούμε ότι είναι εγγυημένη η επίλυση του προβλήματος με πεπερασμένο αριθμό βημάτων (εφόσον εκτελεστούν σωστά). Με τη λέξη '*μηχανική*' εννοούμε ότι ένας ιδεατός υπολογιστής μπορεί να προγραμματιστεί να την εκτελέσει. Με την έκφραση '*βήμα προς βήμα*' εννοούμε ότι η διαδικασία ορίζει ένα βήμα κάθε φορά, το ένα μετά το άλλο, και ότι έπειτα από κάθε βήμα το επόμενο είναι όχι μόνο καθορισμένο αλλά και φανερό - δηλαδή, όχι μόνο δεν υπάρχουν αβεβαιότητες αλλά και δεν απαιτείται έμπνευση για να ανακαλυφθεί ποιο πρέπει να είναι το επόμενο βήμα. Τέλος, χρησιμοποιούμε την έκφραση '*ιδεατά*' για να δηλώσουμε ότι αγνοούμε τυχόν ύπαρξη σταθερών περιορισμών χρόνου, μεγέθους μνήμης, κ.λπ.

Όμως μόνο με γενικόλογες περιγραφές σαν τη (2) παραπάνω δεν αποδεικνύονται *μαθηματικά θεωρήματα*. Οπότε είναι αναγκαίο να δούμε με μεγαλύτερη λεπτομέρεια ποια έννοια αλγορίθμου υπεισέρχεται στα θεωρήματα μη πληρότητας και με ποιο τρόπο. Ας θεωρήσουμε πάλι την τυπική γλώσσα L και ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να διαπιστώσουμε εάν μια αυθαίρετα επιλεγμένη πρόταση φ της L ανήκει σε ένα υποσύνολο A του συνόλου των προτάσεων της L ή όχι. Πώς μπορεί το πρόβλημα αυτό να αναχθεί σε πρόβλημα υπολογισμού; Το κλειδί είναι η *αριθμητικοποίηση της σύνταξης* της L: σε κάθε έκφραση σ της L αποδίδουμε ένα φυσικό αριθμό $g(\sigma)$, τον οποίο ονομάζουμε *αριθμό Gödel* της σ, έτσι ώστε (α) σε διαφορετικές εκφράσεις να αποδίδονται διαφορετικοί αριθμοί Gödel (β) να μπορεί να υπολογιστεί αποτελεσματικά ποιος είναι ο αριθμός Gödel οποιασδήποτε έκφρασης, και (γ) δεδομένου οποιουδήποτε αριθμού να μπορεί να αποφασιστεί αποτελεσματικά εάν ο αριθμός αυτός είναι ο αριθμός Gödel κάποιας έκφρασης και, αν είναι, να βρεθεί αποτελεσματικά ποια είναι η έκφραση αυτή. Με αυτό τον τρόπο, το αρχικό ερώτημα «Ανήκει η πρόταση φ στο σύνολο A;» μετασχηματίζεται στο ερώτημα «Ανήκει ο αριθμός Gödel $g(\varphi)$ της φ στο σύνολο $g[A]=\{g(\sigma):\sigma\in A\}$ των αριθμών Gödel των στοιχείων του συνόλου A;» Και το δεύτερο ερώτημα μετασχηματίζεται, ένα βήμα παραπέρα, στο ερώτημα «Απεικονίζει η χαρακτηριστική συνάρτηση $\chi_{g[A]}$ του συνόλου $g[A]$ το όρισμα $g(\varphi)$ στην τιμή 1;»[3] Με άλλα λόγια, για να αποφασίσουμε εάν η φ ανήκει στο A ή όχι αρκεί πλέον να υπολογίσουμε την τιμή $\chi_{g[A]}(g(\varphi))$: αν η τιμή ισούται με 0, τότε $\varphi\notin A$ ενώ αν η τιμή ισούται με 1, τότε $\varphi\in A$. Το ζήτημα τώρα είναι εάν υπάρχει αλγόριθμος για τον υπολογισμό της $\chi_{g[A]}$, εάν η συνάρτηση $\chi_{g[A]}$ είναι *υπολογιστή*. Αλλά πώς ορίζεται η κλάση των υπολογιστών συναρτήσεων; Μαθηματικοί και ειδικοί της λογικής έχουν επεξεργαστεί διάφορα πρότυπα υπολογιστών συναρτήσεων (συναρτήσεις υπολογιστές από μηχανές Turing, αναδρομικές συναρτήσεις, κ.ά.) και έχουν αποδείξει ότι πολλά από αυτά τα διαισθητικά εύλογα πρότυπα είναι εκτασιακά ισοδύναμα (δηλαδή, ότι μια συνάρτηση μπορεί να υπολογιστεί από κάποια μηχανή Turing αν και μόνο αν είναι αναδρομική, κ.λπ.) Αυτά τα αποτελέσματα έχουν εκληφθεί ως τεκμήρια υπέρ της υπόθεσης που έχει γίνει γνωστή ως *θέση του Church*: οι υπολογιστές αριθμητικές συναρτήσεις είναι ακριβώς εκείνες που μπορούν να

---

[1] Βλ., π.χ., Moschovakis (2001) και Blass and Gurevich (2003).

[2] Η περιγραφή αυτή δεν είναι παρά σύνθεση εκείνων που περιέχονται στο Glymour (1992, σ. 302) και Haugeland ([1989] 1992, σ. 93).

[3] Εξ ορισμού, η χαρακτηριστική συνάρτηση χ_A ενός υποσυνόλου A ενός συνόλου Ω έχει πεδίο ορισμού το Ω και απεικονίζει τα στοιχεία του Ω που δεν ανήκουν στο A στην τιμή 0 ενώ τα στοιχεία του A στην τιμή 1.

υπολογιστούν από μηχανές Turing. Από αυτή τη σκοπιά, οι μηχανές Turing προσφέρουν μια αυστηρή μαθηματική επεξήγηση της έννοιας του αλγορίθμου: υπάρχει αλγόριθμος για τον υπολογισμό των τιμών μιας συνάρτησης για τα διάφορα ορίσματα αν και μόνο αν υπάρχει μια μηχανή Turing που υπολογίζει τις τιμές αυτές. Ας αποδώσουμε, στο εξής, τον χαρακτηρισμό '*αλγοριθμικές συναρτήσεις*' σε όλες τις υπολογιστές κατά Turing συναρτήσεις (και μόνο σε αυτές) και ας αποδώσουμε τον χαρακτηρισμό '*αλγοριθμικό σύνολο*' σε όλα τα υποσύνολα του συνόλου των φυσικών αριθμών των οποίων οι χαρακτηριστικές συναρτήσεις είναι αλγοριθμικές (και μόνο σε αυτά).

Με τη βοήθεια της θέσης του Church, λοιπόν, έχουμε έναν ακριβή ορισμό της αλγοριθμικότητας που μπορεί να αξιοποιηθεί στη συναγωγή μαθηματικών θεωρημάτων. Ωστόσο δεν πρέπει να λησμονούμε ότι η ίδια η θέση του Church *δεν είναι μαθηματικό αποτέλεσμα*· είναι μάλλον μια *εισήγηση για ορισμό*. Η εισήγηση έχει ως εξής: λαμβάνοντας υπόψη (α) ότι διαφορετικές εννοιολογικές προσεγγίσεις της έννοιας της υπολογιστής συνάρτησης συγκλίνουν σε *μια* κλάση συναρτήσεων, (β) ότι κάθε μέλος αυτής της κλάσης συναρτήσεων μπορεί να υπολογιστεί από απλές μηχανές και (γ) ότι κάθε συνάρτηση που ο καθένας μας διαισθητικά αντιλαμβάνεται ως υπολογιστή είναι υπολογιστή κατά Turing είναι εύλογο να εκλάβουμε ως υπολογιστές συναρτήσεις ακριβώς εκείνες που είναι υπολογιστές κατά Turing.

Αλλά ας επιστρέψουμε τώρα στα θεωρήματα μη πληρότητας του Gödel. Στις συνηθισμένες διατυπώσεις τους, τα θεωρήματα αυτά φέρονται να αφορούν τυπικές μαθηματικές θεωρίες που «περιλαμβάνουν» την αριθμητική – ακριβέστερα, πρωτοβάθμιες θεωρίες που επεκτείνουν την αριθμητική Peano. Πολύ γενικά, η *αριθμητική Peano* (στο εξής, PA για συντομία) είναι μια αξιωματική θεωρία σε μια πρωτοβάθμια γλώσσα της οποίας το πρότυπο μοντέλο είναι η «στοιχειώδης» αριθμητική των φυσικών αριθμών, δηλαδή η δομή $Mod_{\mathrm{PA}} = \langle \mathbb{N}, s, +, \cdot, 0 \rangle$, όπου $\mathbb{N} = \{0,1,2,...\}$ το σύνολο των φυσικών αριθμών, s η συνάρτηση που απεικονίζει κάθε φυσικό αριθμό στον επόμενό του, $+$ η πράξη της πρόσθεσης μεταξύ φυσικών αριθμών, $\cdot$ η πράξη του πολλαπλασιασμού μεταξύ φυσικών αριθμών και 0 ο «ελάχιστος» φυσικός αριθμός. Θα λέμε ότι *μια θεωρία* T *σε μια γλώσσα* L *επεκτείνει την* PA αν και μόνο αν η L περιέχει όλα τα σύμβολα της γλώσσας της PA και κάθε αξίωμα της PA είναι αποδείξιμο στην T.

Το πρώτο θεώρημα μη πληρότητας του Gödel (στο εξής, 1οΘΜΠ) μπορεί πλέον να διατυπωθεί ως εξής:

(3) <u>1οΘΜΠ</u>. Κάθε συνεπής αξιωματικοποιήσιμη θεωρία που επεκτείνει την PA είναι μη πλήρης.

Όπως διαφαίνεται από τη διατύπωση, το θεώρημα ισχύει για όλα τα τυπικά συστήματα που είναι *ισχυρότερα* από την PA, όπως η αξιωματική θεωρία συνόλων Zermelo-Fraenkel με αξίωμα επιλογής (ZFC) που διεκδικεί τον τίτλο του θεμελίου όλων των κλασικών μαθηματικών.

Η απόδειξη του 1ουΘΜΠ περιλαμβάνει δυο στάδια. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια αξιωματικοποιήσιμη θεωρία T που επεκτείνει την PA. Και ας υποθέσουμε ότι έχουμε αριθμητικοποιήσει τη σύνταξη της γλώσσας L της T. *Πρώτα*, αποδεικνύουμε ότι υπάρχει κατηγόρημα P στην L τέτοιο ώστε για κάθε πρόταση φ της L,

(4) $T \vdash \varphi$ αν και μόνο αν $T \vdash P(g(\varphi))$.

Δηλαδή, μια πρόταση φ αποδεικνύεται στη θεωρία T αν και μόνο αν αποδεικνύεται στη θεωρία T η πρόταση που προκύπτει με απόδοση του κατηγορήματος P στον αριθμό Gödel της φ. Με αυτή την έννοια, το κατηγόρημα P *κωδικοποιεί την ιδιότητα της* T*-αποδειξιμότητας*. Στο δεύτερο στάδιο της απόδειξης, κατασκευάζουμε μια πρόταση G_T

(«πρόταση Gödel για την T») που *στο πλαίσιο της* T ισοδυναμεί με την άρνηση της αποδειξιμότητάς της:

(5) $$T \vdash G_T \leftrightarrow \neg P(g(G_T)).$$

(Εδώ το '$\leftrightarrow$' συμβολίζει το λογικό σύνδεσμο της υλικής ισοδυναμίας στη γλώσσα L.) Αυτό σημαίνει ότι η G_T είναι T-αποδείξιμη αν και μόνο αν η $\neg P(g(G_T))$ είναι T-αποδείξιμη και ότι η $\neg G_T$ είναι T-αποδείξιμη αν και μόνο αν η $P(g(G_T))$ είναι T-αποδείξιμη. Ας υποθέσουμε τώρα ότι πρόταση G_T είναι αποφασίσιμη στην T - δηλαδή, ότι η T αποδεικνύει είτε τη G_T είτε τη $\neg G_T$. Έστω ότι η G_T αποδεικνύεται στην T. Τότε, σύμφωνα με το (4), η $P(g(G_T))$ θα είναι επίσης T-αποδείξιμη και, σύμφωνα με το (5), η $\neg P(g(G_T))$ θα είναι επίσης T-αποδείξιμη. Επομένως η θεωρία T θα είναι ασυνεπής αφού θα αποδεικνύει και την $P(g(G_T))$ και την άρνησή της. Έστω τώρα ότι η $\neg G_T$ αποδεικνύεται στην T. Τότε, σύμφωνα με το (5), η $P(g(G_T))$ θα είναι επίσης T-αποδείξιμη οπότε, σύμφωνα με το (4), η G_T θα είναι επίσης T-αποδείξιμη. Επομένως η θεωρία T θα είναι πάλι ασυνεπής αφού θα αποδεικνύει και την G_T και την άρνησή της. Άρα αν η πρόταση G_T είναι αποφασίσιμη στην T, η θεωρία T θα είναι ασυνεπής. Έπεται ότι αν η θεωρία T είναι συνεπής, η πρόταση G_T είναι μη αποφασίσιμη στην T και η T είναι μη πλήρης.

Αυτό ολοκληρώνει τη σκιαγράφηση των κομβικών σημείων μιας απόδειξης του 1ουΘΜΠ. Όπως υποψιάζεται κάθε αναγνώστης, οι λεπτομερείς αποδείξεις των δυο σταδίων που απλώς αναφέρθηκαν παραπάνω απαιτούν σημαντική προσπάθεια ενώ η αρχική επινόησή τους από τον Kurt Gödel απαιτούσε ιδιαίτερη ευφυΐα και έμπνευση. Πρέπει επίσης να σημειώσω ότι ο τρόπος απόδειξης που σκιαγράφησα προϋποθέτει επιπλέον ότι η θεωρία T είναι *ω-συνεπής*.[4] Η ω-συνέπεια της T είναι μια τεχνική υπόθεση την οποία είχε χρησιμοποιήσει ρητά ο Gödel ([1931] 1967, σ. 607) στην αρχική απόδειξη. Την αποσιώπησα για λόγους απλούστευσης του κυρίως κειμένου δεδομένου ότι την κατέστησε περιττή μια *τροποποιημένη* απόδειξη του 1ουΘΜΠ στη διατύπωση (3) που κατασκεύασε ο J. Barkley Rosser το 1936.

Το δεύτερο θεώρημα μη πληρότητας (στο εξής, 2οΘΜΠ) προκύπτει ως συνέπεια του 1ουΘΜΠ. Αποδεικνύεται ότι για κάθε συνεπή αξιωματικοποιήσιμη πρωτοβάθμια θεωρία T που επεκτείνει την PA, η πρόταση $Cons(T) = \neg P(g(\perp))$, όπου P το κατηγόρημα που κωδικοποιεί την T-αποδειξιμότητα και $\perp$ μια αντίφαση στη γλώσσα της T (π.χ., η $\neg(1=1)$) είναι ισοδύναμη *στο πλαίσιο της* T με τη πρόταση Gödel G_T για την T:

(6) $$T \vdash G_T \leftrightarrow Cons(T), \text{ όπου } Cons(T) = \neg P(g(\perp)).$$

Οπότε αφού, από το 1οΘΜΠ, η G_T είναι μη αποφασίσιμη στη θεωρία T, μη αποφασίσιμη στη θεωρία T θα είναι και η πρόταση $Cons(T)$. Συνοψίζοντας, έχουμε:

---

[4] Χρησιμοποιώντας αδόκιμο συμβολισμό, ας πούμε μόνο το εξής: μια θεωρία T που επεκτείνει την PA είναι ω-συνεπής αν και μόνο αν δεν υπάρχει τύπος $\varphi(x)$ τέτοιος ώστε οι $\varphi(0), \varphi(1), \varphi(2), \ldots$ να είναι αποδείξιμοι στην T και επίσης ο τύπος $\exists x \neg\varphi(x)$ να είναι αποδείξιμος στην T. Η ίδια η PA είναι ω-συνεπής. Και αν μια θεωρία είναι ω-συνεπής, τότε θα είναι συνεπής. Όμως το αντίστροφο δεν ισχύει.

(7) 2οΘΜΠ. Αν T είναι μια συνεπής αξιωματικοποιήσιμη θεωρία που επεκτείνει την PA, P είναι το κατηγόρημα που κωδικοποιεί την T-αποδειξιμότητα και $Cons(T) = \neg P(g(\perp))$ όπου $\perp$ μια αντίφαση στη γλώσσα της T, τότε $T \nvdash Cons(T)$ και $T \nvdash \neg Cons(T)$.

Εφόσον η $Cons(T)$ εκφράζει την αδυναμία της T να αποδείξει μια αντίφαση και, με αυτή τον τρόπο, τη *συνέπεια* της T, το 2οΘΜΠ μη πληρότητας συνεπάγεται ότι καμιά συνεπής αξιωματικοποιήσιμη θεωρία που επεκτείνει την PA δεν μπορεί να αποδείξει την ίδια της τη συνέπεια.

2. Τι δεν λένε τα θεωρήματα μη πληρότητας

Στην εκλαϊκευτική, κυρίως, βιβλιογραφία απαντούν διάφοροι εσφαλμένοι ισχυρισμοί σχετικά με το «τι λένε» για τα μαθηματικά τα θεωρήματα μη πληρότητας. Στη σύντομη αυτή ενότητα, σταχυολογώ μερικούς από αυτούς και δικαιολογώ επιγραμματικά τη θέση ότι είναι εσφαλμένοι.

Ισχυρισμός: «Κάθε ενδιαφέρον συνεπές αξιωματικό σύστημα είναι μη πλήρες». *Λάθος!* Η ευκλείδεια γεωμετρία (π.χ., στην κατά Hilbert [1899] 1992 αξιωματική θεμελίωση) είναι και συνεπής και πλήρης και, με τεκμήριο δυο χιλιετηρίδες περίπου επιτυχιών, μάλλον ενδιαφέρουσα.

Ισχυρισμός: «Κάθε συνεπές αξιωματικό σύστημα που περιέχει τους φυσικούς αριθμούς είναι μη πλήρες». *Λάθος!* Η αριθμητική Presburger που αποδεικνύει κάθε πρωτοβάθμια πρόταση που αναφέρεται μόνο στην πρόσθεση φυσικών αριθμών είναι και συνεπής και πλήρης.[5]

Ισχυρισμός: «Δεν μπορεί να αποδειχθεί η συνέπεια της αριθμητικής». *Λάθος!* Το 1936 ο Gentzen δημοσίευσε μια απόδειξη της συνέπειας της πρωτοβάθμιας αριθμητικής Peano, της PA, χρησιμοποιώντας, όμως, ισχυρότερα εργαλεία που δεν μπορούσαν να τυποποιηθούν στο πλαίσιο της ίδιας της PA.

Ισχυρισμός: «Κανείς δεν μπορεί να γνωρίζει ότι οι μαθηματικές θεωρίες είναι συνεπείς». *Λάθος!* Έχουμε ήδη αποδείξει τη συνέπεια πολλών μαθηματικών θεωριών. Εκείνο που συνεπάγεται το 2οΘΜΠ είναι ότι κάθε μέλος μιας ευρείας κλάσης πρωτοβάθμιων θεωριών αδυνατεί να αποδείξει την πρόταση που εκφράζει *συντακτικά* τη *δική του* συνέπεια.[6] Αλλά θα το θέλαμε αυτό; Ας πούμε ότι μια θεωρία αποδείκνυε την πρόταση που εκφράζει συντακτικά τη δική της συνέπεια. Θα είχαμε τότε λόγους να πιστέψουμε ότι η θεωρία είναι συνεπής; *Ασφαλώς όχι!* Αν η θεωρία είναι ασυνεπής, τότε αποδεικνύει οποιαδήποτε πρόταση[7] – άρα, και την πρόταση που εκφράζει συντακτικά τη δική της συνέπεια. *Το να πιστεύουμε ότι μια θεωρία είναι συνεπής επειδή αποδεικνύει την ίδια της τη συνέπεια είναι τόσο ανόητο όσο το να πιστεύουμε ότι ένας άνθρωπος είναι ειλικρινής επειδή ισχυρίζεται ότι δεν ψεύδεται ποτέ.*[8]

3. Τετριμμένη μη πληρότητα;

Μήπως, όμως, η μεταμαθηματική ιδιότητα της μη πληρότητας που διαπιστώνουν τα θεωρήματα του Gödel είναι μια απολύτως τετριμμένη ιδιότητα την οποία μοιράζονται πολλά λιγότερο ή περισσότερο τυπικά συστήματα; Σκεφθείτε το εξής. Μια θεωρία είναι πλήρης αν, για κάθε πρόταση στη γλώσσα της θεωρίας, η θεωρία αποδεικνύει ή την ίδια την πρόταση ή

---

[5] Βλ., π.χ., Boolos and Jeffrey (1980, σ. 219-227).
[6] Για μια φιλοσοφική ανάλυση του 2ουΘΜΠ βλ. και Moore (1988).
[7] Κατά την κλασική λογική κάθε επιχείρημα με ασυνεπές σύνολο προκειμένων είναι έγκυρο ανεξάρτητα από το ποιο είναι το συμπέρασμα του επιχειρήματος.
[8] Η προκλητική αυτή αναλογία οφείλεται στον Smullyan (2001, σ. 84).

την άρνησή της. Και ας θεωρήσουμε ένα μυθιστόρημα ή ένα διήγημα ως μια «θεωρία», ως μια συλλογή προτάσεων, για κάποια άτομα, για τους χαρακτήρες που «εμφανίζονται» σε αυτό. Είναι τα μυθιστορήματα ή τα διηγήματα πλήρη με την έννοια ότι μας επιτρέπουν να αποφανθούμε για την αλήθεια ή το ψεύδος κάθε δυνατής πρότασης που αφορά τους χαρακτήρες στους οποίους αναφέρονται; Γενικά, όχι. Δεν μπορεί, λόγου χάριν, κανείς να μάθει τι ύψος είχε ή τι απέγινε η αρραβωνιαστικιά του Georg Bendemann διαβάζοντας το *The Judgment* του Kafka. Και το ίδιο ισχύει για τα περισσότερα μυθιστορήματα ή διηγήματα που μπορούμε να φανταστούμε.

Ή σκεφθείτε μια φυσική θεωρία, π.χ., τη θεωρία που απαρτίζεται από τους τρεις νόμους του Kepler για την κίνηση των πλανητών. Αποφαίνεται αυτή η θεωρία για την αλήθεια ή το ψεύδος κάθε δυνατής υπόθεσης που αφορά τους πλανήτες του ηλιακού μας συστήματος; Όχι. Δεν προσδιορίζει το πλήθος των πλανητών, την περίοδο ή τη μέση απόσταση από τον ήλιο ενός πλανήτη, κ.λπ. Και το «φαινόμενο» είναι γενικό: ακόμη και εκείνες οι φυσικές θεωρίες που έχουν κατά καιρούς εκληφθεί ως θεμελιώδεις υπολείπονται της πληρότητας με την έννοια ότι αφήνουν αναπάντητα πολλά ερωτήματα – για παράδειγμα, ερωτήματα που αφορούν τις ακριβείς τιμές φυσικών σταθερών.

Ίσως, όμως, αυτές οι παρατηρήσεις να αφήνουν αδιάφορους όσους αναγνώστες πιστεύουν ότι η μη πληρότητα, ως μεταμαθηματική έννοια, πρέπει να εφαρμόζονται μόνο σε περιπτώσεις μαθηματικών θεωριών. Ας επιστρέψουμε, λοιπόν, στα μαθηματικά. Αν από την ευκλείδεια γεωμετρία εξαιρέσουμε το αίτημα των παραλλήλων του Ευκλείδη,[9] τότε θα έχουμε μια μη πλήρη θεωρία. Για παράδειγμα, δεν θα μπορούμε να αποφανθούμε εάν το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών ενός τριγώνου είναι μικρότερο από 180^o ή όχι. Στη μη ευκλείδεια γεωμετρία του Lobachevski, σύμφωνα με την οποία από σημείο εκτός ευθείας άγονται άπειρες παράλληλες προς την ευθεία αυτή, το άθροισμα είναι μικρότερο των 180^o. Στην ευκλείδεια γεωμετρία, σύμφωνα με την οποία από σημείο εκτός ευθείας άγεται ακριβώς μια παράλληλος προς την ευθεία αυτή, το άθροισμα ισούται με 180^o. Ενώ στη μη ευκλείδεια γεωμετρία του Riemann, σύμφωνα με την οποία από σημείο εκτός ευθείας δεν άγεται καμία παράλληλος προς την ευθεία αυτή, το άθροισμα είναι μεγαλύτερο από 180^o.

Ή, για να χρησιμοποιήσουμε μια απλή αλγεβρική θεωρία, σκεφτείτε τη θεωρία ομάδων. Τα μοντέλα της θεωρίας είναι δομές που απαρτίζονται από ένα μη κενό σύνολο μεταξύ των στοιχείων του οποίου ορίζεται μια διμελής πράξη η οποία είναι προσεταιριστική, έχει ουδέτερο στοιχείο και προβλέπει αντίστροφο στοιχείο για κάθε στοιχείο του συνόλου. Όπως είναι γνωστό, υπάρχουν ομάδες στις οποίες η πράξη είναι αντιμεταθετική (π.χ., το σύνολο $\mathbb{R}-\{0\}$ των μη μηδενικών πραγματικών αριθμών με πράξη το συνήθη πολλαπλασιασμό και ουδέτερο στοιχείο τη μονάδα) καθώς και ομάδες στις οποίες η πράξη δεν είναι αντιμεταθετική (π.χ., το σύνολο $GL(2,\mathbb{R})$ των 2×2 πινάκων πραγματικών αριθμών που έχουν μη μηδενική ορίζουσα με πράξη τον πολλαπλασιασμό πινάκων και ουδέτερο στοιχείο τον μοναδιαίο πίνακα). Έπεται ότι η πρόταση που εκφράζει την αντιμεταθετικότητα της πράξης είναι μη αποφασίσιμη στη θεωρία ομάδων.

Τα παραπάνω παραδείγματα φαίνεται να αναδεικνύουν μια μάλλον τετριμμένη όψη της μη πληρότητας θεωριών. Μη αποφασίσιμες προτάσεις αναδύονται σε όλες τις θεωρίες που υπολείπονται μιας πλήρους περιγραφής του αντικειμένου τους. Γιατί, λοιπόν, θεωρείται τόσο σημαντική η συμβολή των θεωρημάτων του Gödel; Μήπως τα θεωρήματα αυτά καταδεικνύουν μόνον το γεγονός ότι η αξιωματικοποίηση της αριθμητικής κατά Peano είναι ελλιπής με την έννοια ότι απαιτεί την προσθήκη κάποιου επιπλέον αξιώματος για την πλήρη περιγραφή του σύμπαντος των φυσικών αριθμών;

Όχι, ακριβώς. Ας προσθέσουμε ως αξιώματα της αριθμητικής όλες τις αλήθειες για τους φυσικούς αριθμούς – πιο συγκεκριμένα, όλες τις προτάσεις που αληθεύουν στο πρότυπο μοντέλο Mod_{PA}. Η θεωρία που θα πάρουμε θα είναι πλήρης αλλά όχι αξιωματικοποιήσιμη.

---

9 Πρόκειται για το αξίωμα το οποίο ο Hilbert ([1899] 1992, σ. 25) διατυπώνει ως εξής: «Έστω α μια ευθεία και Α ένα σημείο εκτός αυτής. Τότε υπάρχει το πολύ μια ευθεία στο επίπεδο, που προσδιορίζουν η α και το Α, η οποία περνά από το Α και δεν τέμνει την α».

Το σύνολο των αξιωμάτων της δεν θα είναι αλγοριθμικό. Και σε μια τέτοια θεωρία δεν θα μπορούμε να ελέγξουμε μηχανικά εάν μια πεπερασμένη ακολουθία τύπων είναι απόδειξη ή όχι. Από αυτή την άποψη, τα θεωρήματα μη πληρότητας του Gödel έχουν να κάνουν με την *ανυπαρξία αλγορίθμων*. Και είναι σημαντικό να έχουμε αυτή την άποψη κατά νου όταν διερευνούμε τις συνέπειες των θεωρημάτων αυτών σε κάποια περιοχή της φιλοσοφίας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Τζουβάρας, Αθ. (1992): *Στοιχεία Μαθηματικής Λογικής*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Π. Ζήτη.

Blass, A. and Gurevich, Y. (2003): "Algorithms: A Quest for Absolute Definitions", *Bulletin of European Association for Theoretical Computer Science* **81**:195-225.

Boolos, G. S. and Jeffrey, R. C. (1980): *Computability and Logic*. 2nd edition. Cambridge: Cambridge University Press.

Enderton, H. B. (1972): *A Mathematical Introduction to Logic*. New York: Academic Press.

Glymour, C. (1992): *Thinking Things Through: An Introduction to Philosophical Issues and Achievements*. Cambridge, MA: MIT Press.

Gödel, K. ([1931] 1967): "On formally undecidable propositions of *Principia Mathematica* and related systems I" στο J. van Heijenoort (ed.), *From Frege to Gödel: A Sourcebook in Mathematical Logic, 1879-1931*. Cambridge, MA: Harvard University Press, σ. 592-616.

Haugelend, J. ([1989] 1992): *Τεχνητή Νοημοσύνη. Σχεδιάζοντας τη νόηση: από την υπολογιστική θεωρία στις σύγχρονες ευφυείς μηχανές*. Μετάφραση: Σ. Ζαχαρίου. Επιστημονική επιμέλεια: Σ. Μανουσέλης. Αθήνα: Εκδόσεις Κάτοπτρο.

Hedman, S. (2006): *A First Course in Logic: An Introduction to Model Theory, Proof Theory, Computability, and Complexity*. Oxford: Oxford University Press.

Hilbert, D. ([1899] 1992): *Foundations of Geometry*. 2nd English edition. Translated from the 10th German edition of *Grundlagen der Geometrie* by L. Unger. Revised and enlarged by P. Bernays. La Salle, IL: Open Court.

Moore, A. W. (1988): "What Does Gödel's Second Incompleteness Theorem Show?" *Noûs* **22**: 573-584.

Moschovakis, Y. N. (2001): "What Is an Algorithm?" στο B. Engquist and W. Schmid (eds.), *Mathematics Unlimited – 2001 and Beyond*. New York: Springer, σ. 919-936.

Raatikainen, P. (2005): "On the Philosophical Relevance of Gödel's Incompleteness Theorems", *Revue Internationale de Philosophie* **234**: 513-534.

Rucker, R. ([1982] 1999): *Το Άπειρο και ο Νους*. Απόδοση στα ελληνικά – επιστημονική επιμέλεια: Κ. Χατζηκυριάκου. Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Smullyan, R. (2001): "Gödel's Incompleteness Theorems" στο L. Goble (ed.), The *Blackwell Guide to Philosophical Logic*. Oxford: Blackwell, σ. 72-89.