Α. Αραγεώργης
Τομέας ΑΚΕΔ, Σχολή ΕΜΦΕ, ΕΜΠ

Μαθηματικός Δομισμός

Τα μαθηματικά μπορούν να οριστούν ως εκείνο το γνωστικό αντικείμενο στο οποίο ποτέ δεν γνωρίζουμε για τι πράγματα μιλούμε, ούτε γνωρίζουμε αν αυτά που λέμε είναι αληθή.

Russell (1901), "Mathematics and the Metaphysician" στο *Mysticism and Logic*

1. Πρόδρομοι

1.1. Descartes, Αναλυτική γεωμετρία, «παγκόσμια μαθηματικά»

… κατέληξα στη διαπίστωση ότι το αποκλειστικό ενδιαφέρον των μαθηματικών αφορά ερωτήματα διάταξης ή μέτρου και ότι είναι αδιάφορο το εάν το εν λόγω μέτρο εμπλέκει αριθμούς, σχήματα, άστρα, ήχους, ή οτιδήποτε άλλο. Αυτό με έκανε να καταλάβω ότι πρέπει να υπάρχει μια γενική επιστήμη που εξηγεί όλα τα ζητήματα που μπορούν να εγερθούν σχετικά με διάταξη ή μέτρο ανεξάρτητα από το επιμέρους αντικείμενο μελέτης, και ότι αυτή η επιστήμη πρέπει να ονομαστεί *mathesis universalis* ...

Descartes (1628), *Κανόνες για την Καθοδήγηση του Πνεύματος*

1.2. Hilbert (1899), *Grundlagen der Geometrie*

Σε μια σωστή αξιωματικοποίηση της γεωμετρίας, «πρέπει κανείς να μπορεί να μιλά για τραπέζια – καρέκλες – ποτήρια μπύρας αντί για σημεία – ευθείες – επίπεδα».

(Hilbert στον Otto Blumenthal σε σταθμό τραίνου, Βερολίνο, 1891)

1.3. Weyl, Αξιωματική μέθοδος στα μαθηματικά και τις φυσικές επιστήμες

Ένα αξιωματικό σύστημα είναι μια *λογική μήτρα δυνατών επιστημών* … Μια επιστήμη μπορεί να προσδιορίσει το αντικείμενο έρευνάς της modulo ισομορφισμούς. Ειδικότερα, παραμένει παντελώς αδιάφορη όσον αφορά την «ουσία» των αντικειμένων της … Τα αξιώματα καθίστανται *έμμεσοι ορισμοί* των βασικών εννοιών που εμφανίζονται σε αυτά.

Weyl (1949), *Philosophy of Mathematics and Natural Science*

1.4. Bourbaki, Τα μαθηματικά ως μελέτη αφηρημένων δομών

Από την αξιωματική σκοπιά, τα μαθηματικά εμφανίζονται έτσι ως μια αποθήκη αφηρημένων μορφών – των μαθηματικών δομών … Ασφαλώς, δεν μπορεί να αρνηθεί κανείς το γεγονός ότι αυτές οι μορφές είχαν αρχικά ένα πολύ συγκεκριμένο διαισθητικό περιεχόμενο. Αλλά ακριβώς η εσκεμμένη αγνόηση αυτού του περιεχομένου κατέστησε δυνατή την απόδοση σε αυτές τις μορφές όλης της ισχύος που μπορούσαν να επιδείξουν και την προετοιμασία τους για νέες ερμηνείες …

Μόνο με αυτή την έννοια της λέξης 'μορφή' ('form') μπορεί κανείς να αποκαλέσει την αξιωματική μέθοδο 'φορμαλισμό' ('formalism'). Η ενότητα που αποδίδει στα μαθηματικά δεν είναι η πανοπλία της τυπικής λογικής, η ενότητα ενός άψυχου σκελετού• είναι ο θρεπτικός χυμός ενός οργανισμού στην αποκορύφωση της ανάπτυξής του...

Bourbaki (1950), "The Architecture of Mathematics"

2. Πρότυπο: «Αλγεβρικές» μαθηματικές θεωρίες

Shapiro (1997), *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*

- «Αλγεβρικές»: μαθηματικές θεωρίες (π.χ., θεωρία ομάδων, τοπολογία, θεωρία γραφημάτων, κ.ά.) που δεν προορίζονται για την περιγραφή ενός μόνο «μοντέλου»
- «Μη-αλγεβρικές»: μαθηματικές θεωρίες (π.χ., αριθμητική, πραγματική ανάλυση, κ.ά.) που προορίζονται για την περιγραφή ενός μόνο «μοντέλου»

3. Πρόκληση: Αυτό που δεν μπορούν να είναι οι αριθμοί

Benacerraf (1965), “What Numbers Could Not Be”. Πρόκληση στον συνολοθεωρητικό πλατωνισμό.

Zermelo	**Von Neumann**
$0 = \varnothing$ $1 = \{\varnothing\}$ $2 = \{\{\varnothing\}\}$ $3 = \{\{\{\varnothing\}\}\}$ ...	$0 = \varnothing$ $1 = \{\varnothing\}$ $2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ $3 = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$ ...

Ισόμορφες δομές για την αριθμητική

Ποια από τις δυο είναι ορθή;

$1 \in 3$;

4. Δομισμός

Resnik (1997), *Mathematics as a Science of Patterns*

Shapiro (1997), *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*

Τα αντικείμενα των μαθηματικών είναι *δομές*, όχι σύνολα, αριθμοί, σημεία, κ.ο.κ. Η αριθμητική δεν είναι η μελέτη των φυσικών αριθμών αλλά η μελέτη της *δομής-των-φυσικών-αριθμών*: της δομής κάθε *συστήματος* που διαθέτει ένα «πρώτο» στοιχείο, μια μονομελή πράξη «διαδοχής» και ικανοποιεί την αρχή της μαθηματικής επαγωγής (π.χ., άπειρη ακολουθία αραβικών αριθμητικών, άπειρη ακολουθία ομοίων γραμμών, άπειρη ακολουθία διακριτών χρονικών στιγμών, κ.λπ.) Τα μαθηματικά αντικείμενα όπως αριθμοί, σύνολα, σημεία, κ.λπ., δεν είναι παρά *θέσεις μέσα σε δομές*.

Δομή (αφηρημένο, καθόλου) / *Σύστημα* (συγκεκριμένο, καθέκαστον, πραγμάτωση δομής)

'Δομή' ως *πρωταρχική έννοια* (όχι ως συνολοθεωρητική έννοια); (*sui generis* δομισμός, συνολοθεωρητικός δομισμός)

Οι δομές είναι αφηρημένες οντότητες οι οποίες υπάρχουν ανεξάρτητα από τα συστήματα που τις πραγματώνουν; (*ante rem* δομισμός, *in re* δομισμός)

5. Πλεονεκτήματα

5.1. Εξήγηση της a priori φύσης των μαθηματικών

Αν οι δομές είναι αφηρημένες οντότητες, τότε η γνώση των δομών δεν μπορεί παρά να είναι a priori. Ένα *έμμεσος ορισμός* είναι ένας ολιστικός χαρακτηρισμός οντοτήτων με αναφορά στις σχέσεις που έχουν η μια με την άλλη. Έτσι ένας έμμεσος ορισμός χαρακτηρίζει μια δομή ή μια κλάση δυνατών συστημάτων (αν *όντως* χαρακτηρίζει *κάτι*). Έτσι αν η αισθητηριακή αντίληψη δεν υπεισέρχεται στην ικανότητα κατανόησης ενός έμμεσου ορισμού, ούτε στη δικαιολόγηση ότι ο έμμεσος ορισμός δεν είναι «κενός», ούτε στον τρόπο με τον οποίο συλλαμβάνουμε τις λογικές συναγωγές, τότε η γνώση για τις δομές που προκύπτει με συναγωγή από τον έμμεσο ορισμό είναι a priori.

5.2. Εφαρμοσιμότητα των μαθηματικών στη φυσική πραγματικότητα

Οι δομές έχουν φυσικές πραγματώσεις: φυσικές οντότητες αντιστοιχούν στις θέσεις εντός της δομής (π.χ., συμμετρίες του χωροχρόνου και θεωρία ομάδων). Δεν υπάρχει διαφορά μεταξύ «καθαρών» και «εφαρμοσμένων» μαθηματικών.

5.3. Απάντηση στο πρόβλημα του Benacerraf

Ερωτήσεις για αντικείμενα και ταυτότητα έχουν νόημα μόνον με αναφορά σε μια δεδομένη δομή. Το ερώτημα '$1 \in 3$;' *συγχέει κατηγορίες*: το '$\in$' υποδηλώνει συνολοθεωρητική σχέση ενώ τα ‘1’ και ‘3’ υποδηλώνουν θέσεις στη δομή των φυσικών αριθμών.

6. Προβλήματα

6.1. Η ‘ $3_{\text{φυσικός}} = 3_{\text{πραγματικός}}$ ’ στερείται νοήματος (αληθοτιμής) ή είναι ψευδής;

Οι μαθηματικές θεωρίες πρέπει να είναι *εγγενώς ασύμμετρες*! Δεν μπορούν να συγκριθούν τα μεγέθη ή οι δομές των πεδίων τους εκτός αν θεωρηθούν ως «κομμάτια» της ίδιας ευρύτερης θεωρίας. Δεν μπορεί πραγματικά να υπάρξει καμία γνήσια προσπάθεια *ενοποίησης* της μαθηματικής πρακτικής.

6.2. Εάν η εμφύτευση μιας δομής σε μια άλλη δεν μπορεί παρά να νοηθεί ως ομομορφισμός μεταξύ δυο υποδομών της ίδιας ευρύτερης δομής, τότε δεν είναι εφικτή η εξήγηση της εφαρμοσιμότητας των μαθηματικών στη μη μαθηματική πραγματικότητα.

6.3. Το πρόβλημα των μη τετριμμένων αυτομορφισμών

- Αναγωγισμός ως προς τα αντικείμενα;

  Αν τα x και y μοιράζονται ακριβώς τις ίδιες δομικές σχέσεις προς τα άλλα στοιχεία μιας δομής, τότε $x = y$.

  $1 = -1$; $i = -i$; $p = q$ για οποιαδήποτε σημεία p, q του Ευκλείδειου επιπέδου;

- Αναγωγισμός ως προς τις ιδιότητες;

  Μη δομικές ιδιότητες: ‘9 είναι ο αριθμός των πλανητών’. Ο ante rem δομισμός ή θα «αποκλείσει» τη δυνατότητα εφαρμογής των μαθηματικών στη μη μαθηματική πραγματικότητα ή θα «αναχθεί» σε παλιό καλό πλατωνισμό!