

Αρχιτεκτονική Τυπικών Συστημάτων της Συμβολικής Παραγωγικής Λογικής

Η **παραγωγική λογική** [deductive logic] επικεντρώνεται στην ανάλυση της έννοιας της **εγκυρότητας** [validity] και, όπως είναι γνωστό, η εγκυρότητα ενός επιχειρήματος είναι αποκλειστικά θέμα λογικής μορφής.¹ Γι' αυτό το λόγο, οι ειδικοί της λογικής επινοούν τυπικά συστήματα στα πλαίσια των οποίων μπορούν με σαφήνεια και αυστηρότητα να μελετήσουν τις μορφές επιχειρημάτων αγνοώντας το περιεχόμενό τους. Και τα τυπικά αυτά συστήματα αξιοποιούν συμβολικές γλώσσες. Με δυο λόγια, λοιπόν, η **συμβολική ή τυπική λογική** [symbolic or formal logic] κατασκευάζει τεχνητές γλώσσες με τη βοήθεια των οποίων επιτυγχάνεται η αναπαράσταση των λογικών μορφών επιχειρημάτων και η διάκρισή τους σε έγκυρες και άκυρες.

Υπάρχουν διάφορα επίπεδα λογικής ανάλυσης ανάλογα με το βάθος στο οποίο αναλύουμε τις προτάσεις και τα επιχειρήματα μιας γλώσσας. Στο απλούστερο επίπεδο, εκείνο της **προτασιακής λογικής** [sentential or propositional logic], ασχολούμαστε μόνο με τη **διαπροτασιακή δομή** [inter-sentence structure], δηλαδή με σχέσεις μεταξύ «απλών» προτάσεων που θεωρούνται ως μη περαιτέρω αναλύσιμες ολότητες. Σε ένα βαθύτερο επίπεδο, εκείνο της **κατηγορηματικής λογικής** [predicate logic], ασχολούμαστε *και* με την **ενδοπροτασιακή δομή** [intra-sentence structure], δηλαδή *και* με σχέσεις μεταξύ των «συστατικών» των «απλών» προτάσεων (π.χ., σχέσεις υποκειμένου-κατηγορήματος).

Διακρίνουμε τέσσερα μέρη σε ένα τυπικό σύστημα της συμβολικής λογικής (όπως ο προτασιακός λογισμός, ο πρωτοβάθμιος κατηγορηματικός λογισμός, κ.λπ.): **γραμματική / συντακτικό** [grammar / syntax], **σημασιολογία** [semantics], **θεωρία απόδειξης** [proof-theory] και **εφαρμογές** [applications].

¹ Ένα **επιχείρημα** λέγεται **έγκυρο** [valid argument] αν και μόνο αν η αλήθεια όλων των προκειμένων εγγυάται την αλήθεια του συμπεράσματος: αν όλες οι προκειμένες είναι αληθείς, τότε το συμπέρασμα πρέπει να είναι αληθές.

1. Γραμματική / Συντακτικό

Η γραμματική ή συντακτικό αποτελεί τη *βάση* ενός συστήματος λογικής. Περιγράφει τα στοιχειώδη σημεία ή σύμβολα –το **λεξιλόγιο** [lexicon]– της τυπικής γλώσσας και τους κανόνες διαπλοκής των στοιχείων του λεξιλογίου για τη συγκρότηση καλώς σχηματισμένων εκφράσεων² ή τύπων [well-formed formulae] – στο εξής: **κστ**. Οι κανόνες αυτοί ονομάζονται **κανόνες σχηματισμού** [formation rules].

2. Σημασιολογία

Η σημασιολογία ενός συστήματος λογικής μελετά την απόδοση νοήματος σε εκφράσεις της τυπικής γλώσσας και, μέσω αυτής της απόδοσης νοήματος, τον χαρακτηρισμό μερικών κστ ως αληθών ή ψευδών προτάσεων. Αφού η ανάλυση του τι συνιστά έκφραση της γλώσσας και του ποιες εκφράσεις είναι καλώς σχηματισμένες ανήκει στην αρμοδιότητα του συντακτικού, είναι προφανές ότι η σημασιολογία εξαρτάται από το συντακτικό. Κεντρικές έννοιες της σημασιολογίας είναι οι έννοιες του νοήματος [meaning], της ερμηνείας [interpretation], της συνθήκης αληθείας [truth-condition], της αληθοτιμής [truth-value], κ.λπ.

Η *κλασική λογική* υιοθετεί ως θεμελιακή σημασιολογική παραδοχή την **αρχή της δισθένειας** [principle of bivalence] σύμφωνα με την οποία υπάρχουν ακριβώς δυο τιμές αληθείας, ‘T’ («αληθής») και ‘F’ («ψευδής»), και κάθε ερμηνευμένη πρόταση έχει ακριβώς μια από αυτές τις δυο τιμές αληθείας. Επειδή αναγνωρίζει ακριβώς δυο αληθοτιμές, η κλασική λογική αποκαλείται **δίτιμη λογική** [two-valued logic].³

Μια ερμηνεία, όπως τη νοούμε συνήθως, είναι μια απόδοση νοήματος στις εκφράσεις μιας γλώσσας. Στη λογική, επιφορτίζουμε μια ερμηνεία με έναν ειδικότερο ρόλο. Φανταστείτε μια γλώσσα που έχει κάποιες «στοιχειώδεις» εκφράσεις των οποίων το νόημα μπορεί να μεταβάλλεται –δηλαδή, εκφράσεις που δεν είναι λογικές σταθερές– και γραμματικούς / συντακτικούς κανόνες για το σχηματισμό μεγαλύτερων εκφράσεων από μικρότερες. Ο ρόλος μιας ερμηνείας είναι να μας δώσει αρκετές πληροφορίες για τις «στοιχειώδεις μη λογικές» εκφράσεις ώστε να

² Μια **έκφραση** σε μια γλώσσα είναι μια πεπερασμένη ακολουθία σημείων της γλώσσας αυτής.

³ Η αρχή της δισθένειας προκύπτει από τη σύζευξη της **αρχής του αποκλεισμένου τρίτου ή μέσου** [principle of the excluded middle], κατά την οποία κάθε (νοηματοδοτημένη) πρόταση είναι ή αληθής ή ψευδής, με την **αρχή της μη αντίφασης** [principle of non-contradiction], κατά την οποία καμία (νοηματοδοτημένη) πρόταση δεν είναι και αληθής και ψευδής.

καθοριστεί το νόημα των μεγαλύτερων εκφράσεων και τελικά να προσδιοριστεί η αληθοτιμή των προτάσεων που μας ενδιαφέρουν. Κατά συνέπεια, το τι ακριβώς συνιστά μια ερμηνεία εξαρτάται από τη γλώσσα-αντικείμενο που μελετούμε κάθε φορά.⁴

Με τη βοήθεια της έννοιας της ερμηνείας ορίζονται οι έννοιες της λογικής ισοδυναμίας και του σημασιολογικού επακόλουθου καθώς και η ταξινόμηση προτάσεων σε λογικώς αληθείς, αντιφατικές και ενδεχομενικές. Δυο προτάσεις p και q μιας συμβολικής γλώσσας L λέγονται **λογικώς ισοδύναμες** [logically equivalent] αν και μόνο αν λαμβάνουν την ίδια αληθοτιμή σε κάθε L -ερμηνεία του $\{p, q\}$. Έστω Γ ένα σύνολο προτάσεων μιας συμβολικής γλώσσας L και p μια πρόταση της L . Θα λέμε ότι η p είναι **σημασιολογικό επακόλουθο** [semantic consequence] του Γ ή ότι το Γ **συνεπάγεται σημασιολογικά** [semantically entails] την p ή ότι η p **έπεται σημασιολογικά** από το Γ και θα γράφουμε

$$\Gamma \models p$$

αν και μόνο αν δεν υπάρχει L -ερμηνεία του $\Gamma \cup \{p\}$ που να αποδίδει την αληθοτιμή Γ σε όλα τα στοιχεία του Γ και την αληθοτιμή F στην p . Η έννοια του σημασιολογικού επακόλουθου προορίζεται για επεξήγηση του όρου «καλό επιχείρημα»: ένα επιχείρημα με σύνολο προκειμένων το Γ και συμπέρασμα την p είναι έγκυρο ακριβώς στην περίπτωση που $\Gamma \models p$. Στην ειδική περίπτωση όπου «δεν υπάρχει Γ » –δηλαδή, όπου $\Gamma = \emptyset$ – διαγράφουμε από τον παραπάνω ορισμό τις φράσεις που αφορούν το Γ . Έτσι για κάθε πρόταση p της L θα γράφουμε

$$\models p$$

αν και μόνο αν δεν υπάρχει L -ερμηνεία του $\{p\}$ που να αποδίδει την αληθοτιμή F στην p , δηλαδή αν και μόνο αν η p λαμβάνει την αληθοτιμή T σε κάθε L -ερμηνεία του $\{p\}$. Ακριβώς σ' αυτή την περίπτωση θα λέμε ότι η p είναι **λογικώς αληθής** πρόταση της L .⁵ Αντίθετα, μια πρόταση p της L θα λέγεται **αντιφατική** αν και μόνο αν λαμβάνει την αληθοτιμή F σε κάθε L -ερμηνεία του $\{p\}$. Και μια πρόταση p της L θα λέγεται **ενδεχομενική** αν και μόνο αν υπάρχει τουλάχιστον μια L -ερμηνεία του $\{p\}$ που αποδίδει την αληθοτιμή T στην p και τουλάχιστον μια L -ερμηνεία του $\{p\}$

⁴ Αν L είναι η γλώσσα-αντικείμενο, θα μιλούμε για **L -ερμηνείες**.

⁵ Οι λογικώς αληθείς προτάσεις του προτασιακού λογισμού ονομάζονται **ταυτολογίες** [tautologies].

που αποδίδει την αληθοτιμή F στην p . Τέλος, στην ειδική περίπτωση όπου «δεν υπάρχει p » διαγράφουμε από το γενικό ορισμό τις φράσεις που αφορούν την p . Έτσι για κάθε σύνολο Γ προτάσεων μιας συμβολικής γλώσσας L θα γράφουμε

$$\Gamma \models$$

αν και μόνο αν δεν υπάρχει L -ερμηνεία του Γ που να αποδίδει την αληθοτιμή T σε όλα τα στοιχεία του Γ . Ένα σύνολο Γ με αυτή την ιδιότητα λέγεται **ασυνεπές** [inconsistent]. Αντίθετα, ένα σύνολο Γ προτάσεων της L λέγεται **συνεπές** [consistent] αν και μόνο αν υπάρχει τουλάχιστον μια L -ερμηνεία του Γ που να αποδίδει την αληθοτιμή T σε όλα τα στοιχεία του Γ – μια τέτοια L -ερμηνεία λέγεται **μοντέλο** [model] του Γ .

Προκειμένου να κατανοήσουμε καλύτερα την έννοια του σημασιολογικού επακόλουθου στην κλασική λογική παραθέτουμε δυο σημαντικές ιδιότητές της.

[**1**]. Για κάθε σύνολο προτάσεων Γ και κάθε πρόταση p , $\Gamma \models p$ αν και μόνο αν $\Gamma \cup \{\sim p\} \not\models$.⁶ Ένα επιχειρήμα είναι έγκυρο αν και μόνο αν οι προκειμένες μαζί με την άρνηση του συμπεράσματος συναποτελούν ένα ασυνεπές σύνολο προτάσεων.

[**2**]. Για κάθε σύνολο προτάσεων Γ , αν $\Gamma \models$, τότε για κάθε πρόταση p , $\Gamma \models p$. Από ένα ασυνεπές σύνολο προτάσεων έπεται (ως συμπέρασμα έγκυρου επιχειρήματος) οποιαδήποτε πρόταση. (Το σλόγκαν είναι: «Τα πάντα έπονται λογικά από μια αντίφαση».)

3. Θεωρία Απόδειξης

Η θεωρία απόδειξης μελετά τους τυπικούς κανόνες που επιτρέπουν την παραγωγή (απόδειξη) καλώς σχηματισμένων τύπων από άλλους καλώς σχηματισμένους τύπους χωρίς να ασχολείται με το νόημά τους. Έτσι η θεωρία απόδειξης είναι ανεξάρτητη από τη σημασιολογία ενώ, όπως και η σημασιολογία, βασίζεται στη γραμματική. Κεντρικές έννοιες της θεωρίας απόδειξης είναι οι έννοιες του αποδεικτικού κανόνα ή κανόνα συμπερασμού ή συναγωγής [inference rule], του αξιώματος [axiom], του θεωρήματος [theorem], κ.λπ.

Σκοπός της θεωρίας απόδειξης είναι να προτείνει ανθρωπίνως εύχρηστα κριτήρια για την άμεση αναγνώριση, τουλάχιστον, των «καλών» επιχειρημάτων ως «καλών». Λόγω της φύσης του σκοπού της, η θεωρία απόδειξης έχει *επαγωγικό*

⁶ Χρησιμοποιούμε το σύμβολο ' \sim ' για τον προτασιακό σύνδεσμο της άρνησης.

(*αναδρομικό*) χαρακτήρα: ξεκινά κανείς με την πιστοποίηση μερικών στοιχειωδών «καλών» επιχειρημάτων και υποδεικνύει στη συνέχεια τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε, βήμα-βήμα, να πιστοποιήσουμε πιο περίπλοκα «καλά» επιχειρήματα. Αυτή η προσέγγιση βρίσκεται σε συμφωνία με τη διαισθητική αντίληψη περί απόδειξης: αποδεικνύουμε έναν ισχυρισμό δείχνοντας ότι προκύπτει από ένα σύνολο παραδοχών μέσω μιας ακολουθίας «μικρών», αλλά αναντίρρητα «έγκυρων», βημάτων. Γενικότερα, ένας άνθρωπος που συμμετέχει σε μια δημόσια συζήτηση δεν διατυπώνει απλώς τις προκειμένες και το συμπέρασμα του επιχειρημάτος του προκαλώντας τους υπόλοιπους συμμετέχοντες να περιγράψουν πώς θα ήταν δυνατό να είναι όλες οι προκειμένες αληθείς και το συμπέρασμα ψευδές. Εκείνο που συνήθως κάνει είναι να *καταλήξει σταδιακά στο συμπέρασμα ξεκινώντας από τις προκειμένες, να παραγάγει το συμπέρασμα από τις προκειμένες, μέσω μιας ακολουθίας βημάτων καθένα από τα οποία μπορεί να ελεγχθεί εύκολα ως προς την «εγκυρότητα» του.*

Αυτή ακριβώς τη δομή της επιχειρηματολογίας στην καθημερινή ζωή (αλλά και στα μαθηματικά, τις επιστήμες ή τη φιλοσοφία) προσπαθεί να συλλάβει η θεωρία απόδειξης. Αφετηρία της είναι η *παραδοχή* ότι όλα τα επιχειρήματα που «ταιριάζουν» σε ορισμένες επιλεγμένες λογικές μορφές ή συλλογιστικά σχήματα είναι «καλά» επιχειρήματα. Γενικότερα, *επιλέγει* κανείς ένα «πεπερασμένα περιγράψιμο» σύνολο λογικών αξιωμάτων και αποδεικτικών κανόνων⁷ και αναγνωρίζει ως «καλό» κάθε επιχείρημα του οποίου το συμπέρασμα μπορεί να προκύψει από τις προκειμένες του με διαδοχική εφαρμογή των επιλεγμένων μόνο αξιωμάτων και κανόνων. Η ίδια η θεωρία απόδειξης δεν ασχολείται με τη «λογική αλήθεια» των αξιωμάτων ή την «εγκυρότητα» των κανόνων συναγωγής – τη δέχεται «αξιωματικά».

Η έννοια του παραγωγικού επακόλουθου ορίζεται με αναφορά σε ένα σύστημα λογικών αξιωμάτων και αποδεικτικών κανόνων. Έστω Γ ένα σύνολο προτάσεων μιας συμβολικής γλώσσας L , p μια πρόταση της L και S ένα σύστημα λογικών αξιωμάτων και αποδεικτικών κανόνων για την L . Θα λέμε ότι η p είναι **παραγωγικό επακόλουθο** [deductive consequence] του Γ στο S ή ότι το Γ **συνεπάγεται παραγωγικά** [deductively entails] την p στο S ή ότι η p **έπεται παραγωγικά** από το Γ στο S και θα γράφουμε

⁷ *Πρόχειρα*, ένας κανόνας συμπερασμού ή συναγωγής [inference rule] ή αποδεικτικός κανόνας είναι ένας κανόνας που καθορίζει ποιοι κστ επιτρέπεται να εισαχθούν σε ένα βήμα μιας τυπικής απόδειξης. Και ένα λογικό αξίωμα μπορεί «ελεύθερα» να εισαχθεί σε οποιοδήποτε βήμα μιας τυπικής απόδειξης.

$$\Gamma \vdash_S p$$

αν και μόνο αν υπάρχει μια πεπερασμένη ακολουθία S -βημάτων⁸ της οποίας το τελευταίο στοιχείο είναι η p και κάθε άλλο στοιχείο είτε ανήκει στο Γ είτε είναι λογικό αξίωμα του S είτε έχει εισαχθεί στη θέση του δυνάμει ενός κανόνα συμπερασμού του S και (ενδεχομένως) κάποιων S -βημάτων που προηγούνται στην ακολουθία. Μια τέτοια ακολουθία καλείται **S -απόδειξη** της p από το Γ . Στην ειδική περίπτωση όπου «δεν υπάρχει Γ », δηλαδή όπου $\Gamma = \emptyset$, γράφουμε ' $\vdash_S p$ ' και λέμε ότι η p είναι **θεώρημα του S** – η p είναι S -αποδείξιμη χωρίς προκειμένες.

Η έννοια του παραγωγικού επακόλουθου προσφέρει ένα κριτήριο για τη διάκριση μεταξύ «καλών» και «κακών» επιχειρημάτων. Ένα επιχείρημα με προκειμένες στο σύνολο Γ και συμπέρασμα την p θεωρείται «καλό» ακριβώς στην περίπτωση που είναι **S -αποδείξιμο**, $\Gamma \vdash_S p$.

Αξίζει να σημειωθεί εδώ ότι *εν γένει* ενώ η *κατασκευή* μιας τυπικής απόδειξης δεν είναι μηχανική διαδικασία, ο *έλεγχος* μιας τυπικής απόδειξης είναι. Πράγματι, δεδομένου ενός συστήματος λογικών αξιωμάτων και αποδεικτικών κανόνων S και μιας ακολουθίας βημάτων, μπορεί κανείς να αποφασίσει με τελείως μηχανικό τρόπο αν η δοθείσα ακολουθία είναι S -απόδειξη ή όχι. Δεν χρειάζεται κανείς να ενδιαφερθεί για το νόημα των κστ που εμφανίζονται ή για την «εγκυρότητα» κάθε βήματος. Το μόνο που απαιτείται είναι γνώση του συντακτικού της τυπικής γλώσσας – συγκεκριμένα, η ικανότητα να αναγνωρίζει κανείς ότι ένας κστ που εμφανίζεται σε μια θέση είναι ίδιος με τον κστ που εμφανίζεται σε μια άλλη θέση, να βλέπει ότι ένας κστ αποτελεί παράδειγμα μιας δεδομένης προτασιακής μορφής, κ.ο.κ. Συμπερασματικά, η θεωρία απόδειξης προσφέρει μια αμιγώς *συντακτική* ανάλυση της έννοιας του «καλού» επιχειρήματος.

4. Εφαρμογές

Το αντικείμενο εφαρμογής ενός τυπικού συστήματος λογικής είναι μια λίγο-έως-πολύ αυστηρά οροθετημένη περιοχή του ανθρώπινου λόγου. Και το κεντρικό ερώτημα είναι το κατά πόσον οι έννοιες του τυπικού συστήματος –ειδικότερα, η έννοια του σημασιολογικού επακόλουθου και η έννοια του παραγωγικού επακόλουθου–

⁸ Συνήθως ένα S -βήμα δεν είναι παρά ένας κστ της L .

εξυπηρετούν ικανοποιητικά το στόχο της διάκρισης μεταξύ «καλών» και «κακών» επιχειρημάτων στη δεδομένη περιοχή του ανθρώπινου λόγου. Για παράδειγμα, ο ορισμός του '⊨' είναι καθαρά θέμα της τυπικής σημασιολογίας. Αποτελεί εφαρμογή η σύνδεση αυτής της τυπικής έννοιας με τη διαισθητική κανονιστική ιδέα του «καλού» επιχειρήματος – μια εφαρμογή που μπορεί τελικά να κριθεί ως επιτυχής ή ατυχής.

5. Μεταθεωρία

Ένα τυπικό σύστημα της συμβολικής λογικής, λοιπόν, συγκροτεί δυο θεωρητικώς ανεξάρτητες αναλύσεις της έννοιας του «καλού» επιχειρήματος. Η πρώτη βασίζεται στην έννοια του σημασιολογικού επακόλουθου: ένα επιχείρημα με σύνολο προκειμένων Γ και συμπέρασμα p θεωρείται «καλό» αν και μόνο αν $\Gamma \models p$. Η δεύτερη ανάλυση προέρχεται από τη θεωρία απόδειξης και βασίζεται στην έννοια του παραγωγικού επακόλουθου σε ένα σύστημα λογικών αξιωμάτων και αποδεικτικών κανόνων S : ένα επιχείρημα με σύνολο προκειμένων Γ και συμπέρασμα p θεωρείται «καλό» αν και μόνο αν $\Gamma \vdash_S p$. Τα «καλά» επιχειρήματα χαρακτηρίζονται ως *έγκυρα* στη σημασιολογική προσέγγιση και ως *S-αποδείξιμα* στην αποδεικτικο-θεωρητική προσέγγιση.

Παρατηρήστε τις διαφορές μεταξύ των δυο προσεγγίσεων. Η σημασιολογική προσέγγιση δεν αναφέρει τίποτα για αποδείξεις, αξιώματα ή κανόνες συμπερασμού ενώ η αποδεικτικο-θεωρητική προσέγγιση δεν αναφέρεται καθόλου στην έννοια της αλήθειας ή σε εκείνη της ερμηνείας. Επομένως δεν είναι εξαρχής φανερό η σχέση μεταξύ των δυο προσεγγίσεων. Εκείνο που είναι φανερό, *ίσως*, είναι το πώς *θα θέλαμε* να σχετίζονται: *θα θέλαμε* η σημασιολογική ανάλυση της έννοιας του «καλού» επιχειρήματος να συμφωνεί με την αποδεικτικο-θεωρητική ανάλυση.

Η σχέση μεταξύ των δυο προσεγγίσεων –ακριβέστερα, η σχέση μεταξύ σημασιολογικού και παραγωγικού επακόλουθου– διερευνάται με τη βοήθεια των εννοιών της ορθότητας και της πληρότητας. Ένα σύστημα λογικών αξιωμάτων και αποδεικτικών κανόνων S λέγεται **ορθό** [sound] αν και μόνο αν κάθε S -αποδείξιμο επιχείρημα είναι έγκυρο – δηλαδή, ακριβώς στην περίπτωση που για κάθε Γ και κάθε p , αν $\Gamma \vdash_S p$ τότε $\Gamma \models p$. Ένα σύστημα αποδεικτικών κανόνων S λέγεται **πλήρες** [complete] αν και μόνο αν κάθε έγκυρο επιχείρημα είναι S -αποδείξιμο – δηλαδή,

ακριβώς στην περίπτωση που για κάθε Γ και κάθε p , αν $\Gamma \models p$ τότε $\Gamma \vdash_S p$. Προφανώς, η συμφωνία σημασιολογίας και θεωρίας απόδειξης ως προς την κλάση των «καλών» επιχειρημάτων συνίσταται ακριβώς στην ορθότητα και πληρότητα του αντίστοιχου συστήματος φυσικής παραγωγής.

Μια λέξη για ένα θέμα ορολογίας. Μερικοί ειδικοί της λογικής αποδίδουν τον όρο ‘**συνέπεια**’ [‘consistency’] στην ιδιότητα που ονομάσαμε ‘ορθότητα’. Υπάρχουν διάφοροι λόγοι που δικαιολογούν τη χρήση του όρου. Μια γενική ιδέα είναι ότι ένα ορθό σύστημα φυσικής παραγωγής είναι *συνεπές (εναρμονίζεται) με την αντίστοιχη σημασιολογία*. Εξάλλου, ένα ορθό σύστημα φυσικής παραγωγής S είναι συνεπές με την έννοια ότι δεν επιτρέπει την απόδειξη αντιφάσεων *χωρίς προκείμενες αφού κάθε θεώρημα του S είναι λογικώς αληθής πρόταση*.

Θα θέλαμε, λοιπόν, κάθε τυπικό σύστημα της συμβολικής λογικής να είναι εφοδιασμένο με ένα ορθό και πλήρες σύστημα λογικών αξιωμάτων και αποδεικτικών κανόνων. Ωστόσο, στη λογική –όπως, ίσως, και στη ζωή– δεν μπορούμε πάντα να έχουμε αυτό που θέλουμε! Υπάρχουν τυπικά συστήματα για τα οποία κανένα σύνολο λογικών αξιωμάτων και αποδεικτικών κανόνων δεν μπορεί να είναι *και ορθό και πλήρες* (και έχουμε *αποδείξεις* για την ανυπαρξία αυτής της δυνατότητας). Πάντως, η κλασική προτασιακή λογική και η κλασική πρωτοβάθμια κατηγορηματική λογική που μας ενδιαφέρουν κυρίως μπορούν να εφοδιαστούν με ορθά και πλήρη συστήματα – και τις θεωρούμε έτσι εφοδιασμένες.⁹

Κλείνοντας, ας σημειώσουμε ότι τα περί ορθότητας και πληρότητας ανήκουν στη δικαιοδοσία της **μεταθεωρίας** ενός τυπικού συστήματος λογικής: συνιστούν προτάσεις *περί* του συστήματος και όχι προτάσεις *εντός* του συστήματος.

Ενδεικτική Βιβλιογραφία

- Τζουβάρας, Α. (1992). *Στοιχεία Μαθηματικής Λογικής*. Θεσσαλονίκη: Π. Ζήτη.
 Enderton, H. B. (1972). *A Mathematical Introduction to Logic*. New York: Academic Press.
 Forbes, G. (1994). *Modern Logic*. Oxford: Oxford University Press.
 Goble, L. (ed.) (2001). *The Blackwell Guide to Philosophical Logic*. Oxford: Blackwell.
 Hedman, S. (2006). *A First Course in Logic: An Introduction to Model Theory, Proof Theory, Computability, and Complexity*. Oxford: Oxford University Press.
 Mendelson, E. (1987). *Introduction to Mathematical Logic*. 3rd edition. Pacific Grove, CA: Wadsworth.
 Restall, G. (2006). *Logic: An Introduction*. London and New York: Routledge.

⁹ Γι’ αυτό και γράφουμε συχνά ‘ \vdash ’ αντί για ‘ \vdash_S ’.