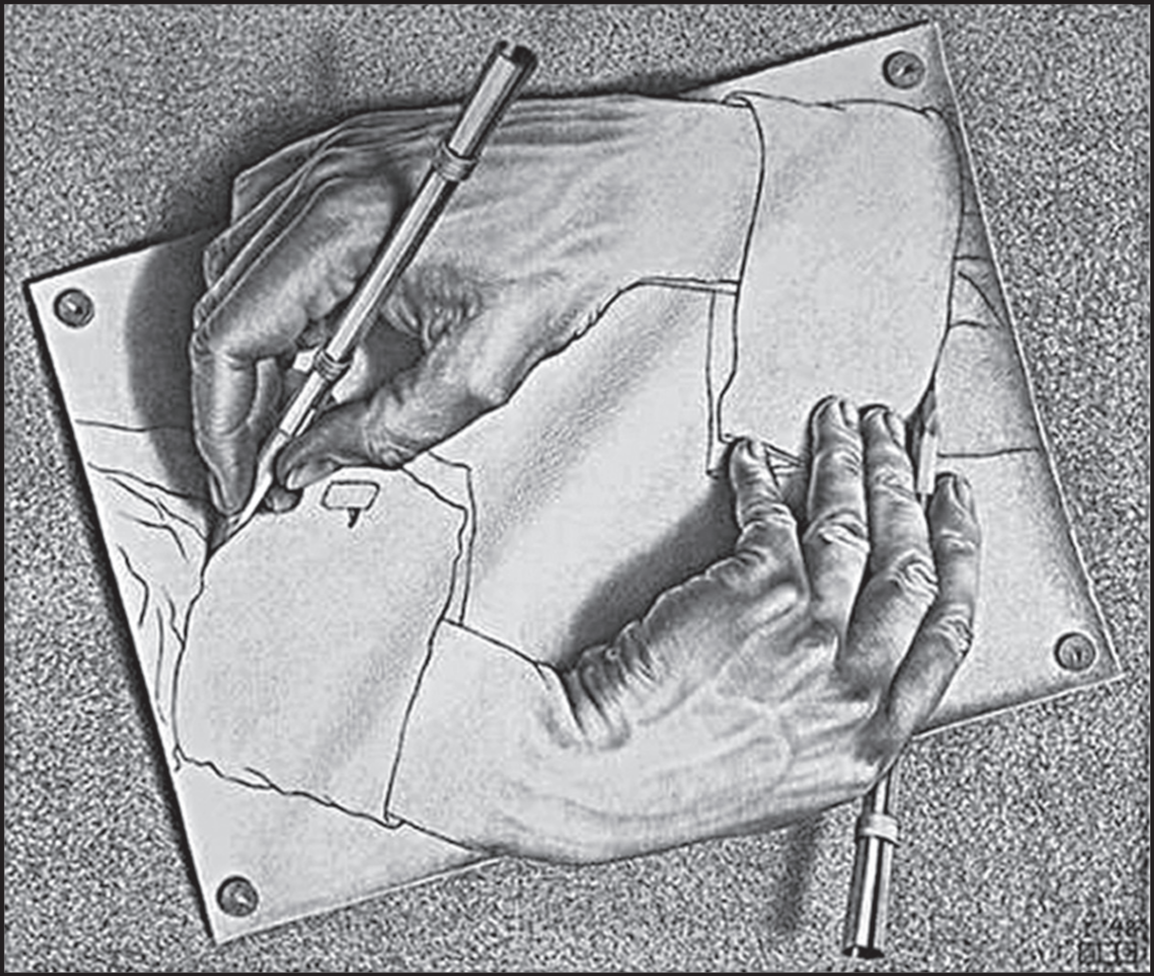
Μαθηματική Λογική

Τυπικά συστήματα, τα Θεωρήματα του Gödel, Θεωρία Αποδείξεων

Γεώργιος Κολέτσος



Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράμματα και Βοηθήματα
www.kallipos.gr

HEALLINK
Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΚΟΛΕΤΣΟΣ

Μαθηματική Λογική

Τυπικά συστήματα, τα Θεωρήματα
του Gödel, Θεωρία Αποδείξεων

Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά
Συγγράμματα και Βοηθήματα
www.kallipos.gr

Μαθηματική Λογική

Συγγραφή

Γεώργιος Κολέτσος

Κριτικός αναγνώστης

Κωνσταντίνος Δημητρακόπουλος

Συντελεστές έκδοσης

Γλωσσική Επιμέλεια: Δήμητρα Τουλάτου

Τεχνική Επεξεργασία: Αικατερίνη Ξύστρα

ISBN: 978-960-603-311-7

ΣΥΝΔΕΣΜΟΣ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΩΝ

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Ηρώων Πολυτεχνείου 9, 15780 Ζωγράφου

www.kallipos.gr

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή

Λογική είναι η ανάλυση των μεθόδων του συλλογισμού. Μελετώντας αυτές τις μεθόδους, η λογική ενδιαφέρεται περισσότερο για τη *μορφή* παρά για το περιεχόμενο του συλλογισμού π.χ. θεωρήστε τους πιο κάτω συλλογισμούς:

1. Όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί. Ο Σωκράτης είναι άνθρωπος. Άρα ο Σωκράτης είναι θνητός.

2. Όλα τα κουνέλια αγαπούν τα καρότα. Ο Μπάνυ είναι κουνέλι. Άρα ο Μπάνυ αγαπάει τα καρότα.

Και οι δύο συλλογισμοί έχουν την ίδια μορφή. *Όλα τα A είναι B. Το S είναι A. Άρα το S είναι B.* Η αλήθεια ή το ψεύδος των επιμέρους υποθέσεων και συμπερασμάτων δεν ενδιαφέρουν τη Λογική. Την ενδιαφέρει μόνον εάν η αλήθεια της υπόθεσης συνεπάγεται την αλήθεια του συμπεράσματος. Η συστηματική τυποποίηση και κατάταξη των έγκυρων μεθόδων συλλογισμού είναι μια από τις κύριες ασχολίες της Λογικής. Αν δε για τη μελέτη όλων αυτών χρησιμοποιούνται μαθηματικές μέθοδοι και το ενδιαφέρον κατευθύνεται κυρίως στους μαθηματικούς συλλογισμούς τότε τη λογική αυτή τη λέμε Μαθηματική Λογική.

Η λογική ως επιστήμη αναπτύχθηκε ήδη από την αρχαιότητα. Ο Αριστοτέλης ήταν ο πρώτος ο οποίος διέκρινε τα είδη του συλλογισμού, δημιουργώντας ένα σύστημα που είναι γνωστό ως «συλλογιστική». Η διεισδυτική και πειστική ανάλυσή του, καθώς και το μεγάλο κύρος του ως διανοητή, συνετέλεσε ώστε το σύστημά του να παραμείνει η βασική αναφορά για περίπου δύο χιλιετηρίδες. Τη σκυτάλη πήραν οι Στωικοί με σημαντικές συνεισφορές, κυρίως στη λογική των προτάσεων. Αργότερα, για πολύ μακρύ διάστημα οι ενασχολήσεις περί τη λογική ήταν κυρίως σχόλια, ταξινομήσεις και παραλλαγές πάνω στο αριστοτελικό σύστημα.

Η πρώτη μεγάλη αναγέννηση της λογικής ξεκινάει με τον Frege, στο τέλος του δέκατου ένατου αιώνα. Ο Frege προσπαθώντας να λύσει κυρίως φιλοσοφικά προβλήματα που σχετίζονταν με την, κατά Kant, έννοια της αναλυτικότητας των προτάσεων, δημιούργησε ένα τυπικό σύστημα, εντυπωσιακά δομημένο, στο οποίο μπορεί κάποιος να τυποποιήσει κάθε μαθηματικό συλλογισμό. Το σύστημα αυτό και γενικότερα οι σχετικές εργασίες του αποτέλεσαν μια επανάσταση στην ιστορία της λογικής.

Οι εργασίες του Frege γίνονταν σε μια περίοδο ταχύτατης ανάπτυξης των μαθηματικών στα οποία, την εποχή εκείνη, είχαν εισαχθεί νεοφανείς και αμφιλεγόμενες μέθοδοι απόδειξης και αποδοχής ύπαρξης μαθηματικών αντικειμένων. Στην αμφισβήτηση αυτή βοήθησε και η εμφάνιση των λεγόμενων λογικών παραδόξων, με γνωστότερο το παράδοξο του Russell[1], το οποίο ανέτρεψε την

[1] Ο Frege πίστευε ότι για οποιαδήποτε ιδιότητα $P(x)$ υπάρχει το σύνολο των «αντικειμένων» που την ικανοποιούν. Αν όμως, κατά τον Russell, η ιδιότητα είναι η «$x \notin x$», δηλαδή το σύνολο x δεν ανήκει στον εαυτό του, τότε το σύνολο $A = \{x \mid x \notin x\}$ δεν μπορεί να υπάρξει, διότι τότε θα είχαμε $A \in A \leftrightarrow A \notin A$ (άτοπο).

πορεία του έργου του Frege.

Δημιουργήθηκαν μαθηματικές αντίπαλες «σχολές»· η κυριότερη διάκριση υπήρξε μεταξύ των κατασκευαστικιστών (οι οποίοι δεν δέχονται την απόδειξη ύπαρξης ενός μαθηματικού αντικειμένου παρά μόνον αν έχουμε δημιουργήσει μια μέθοδο κατασκευής του) και των κλασικών (οι οποίοι δέχονται την ύπαρξη αντικειμένων αν προκύπτει από απόδειξη σύμφωνη με τους κλασικούς λογικούς κανόνες).

Για παράδειγμα, στο πρόβλημα,

Υπάρχουν άρρητοι αριθμοί a και b ώστε a^b είναι ρητός,

η ακόλουθη απόδειξη είναι αποδεκτή κλασικά:

Θεωρήστε το $\sqrt{2}$, που ξέρουμε ότι είναι άρρητος. Τότε υπάρχουν δύο περιπτώσεις. Αν $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ είναι ρητός, τότε παίρνουμε $a = b = \sqrt{2}$ και a^b είναι ρητός. Αν $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ είναι άρρητος, τότε με $a = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ και $b = \sqrt{2}$ έχουμε $a^b = (\sqrt{2})^{\sqrt{2})^{\sqrt{2}}} = (\sqrt{2})^2 = 2$, δηλαδή ρητός.

Οι κατασκευαστικιστές όμως δεν δέχονται την απόδειξη αυτή διότι δεν δημιουργείται μέθοδος κατασκευής των a και b.

Στη διαμάχη αυτή παρεμβαίνει ο μεγάλος μαθηματικός Hilbert και καταρτίζει ένα πρόγραμμα επίλυσης των θεμελίων των μαθηματικών, γνωστό ως πρόγραμμα του Hilbert.

Σύμφωνα με αυτό, στα μαθηματικά, οι προτάσεις που έχουν νόημα είναι μόνον οι αριθμητικές προτάσεις (ή οι αναγόμενες σε τέτοιες) που έχουν έναν απλό, συνδυαστικό χαρακτήρα, δηλαδή έχουν τη μορφή: «για κάθε x ισχύει η $P(x)$», όπου $P(x)$ είναι μια ιδιότητα των αριθμών επιβεβαιώσιμη μηχανικά-κατασκευαστικά. Για παράδειγμα, η πρόταση: για κάθε n υπάρχει πρώτος αριθμός μεγαλύτερος του n και μικρότερος του $n! + 1$. Αυτή η πρόταση έχει (κατά τον Hilbert) νόημα διότι η ιδιότητα $P(n) \equiv \exists p\,(p\,\text{πρώτος και}\,n < p < n! + 1)$, στην περίπτωση αυτή, είναι ιδιότητα μηχανικά επιβεβαιώσιμη. Αυτές τις προτάσεις ο Hilbert τις ονομάζει *πραγματικές* προτάσεις και όλες τις υπόλοιπες *ιδεατές*. Δηλαδή, κατά τον Hilbert υπάρχουν δύο κόσμοι, ο κόσμος των πραγματικών μαθηματικών, στον οποίο οι προτάσεις έχουν νόημα και ο κόσμος των ιδεατών. Οι κλασικές μέθοδοι υπάγονται στον ιδεατό κόσμο. Τώρα, αν οι ιδεατές μέθοδοι δεν έχουν νόημα, τότε ποιος είναι ο λόγος ύπαρξής τους;

Κατά τον Hilbert, ο λόγος ύπαρξης είναι να διευκολύνουν τις μαθηματικές αποδείξεις πραγματικών προτάσεων. Δηλαδή, θα πρέπει να ισχύει ότι αν με ιδεατές μεθόδους αποδεικνύουμε μια πραγματική πρόταση, τότε θα πρέπει να υπάρχει και μια πραγματική απόδειξη της ίδιας πρότασης. Για να αποδειχθεί αυτό, ο Hilbert αναλύει και τυποποιεί τις μαθηματικές θεωρίες κατά τρόπο που αφηρημένες μαθηματικές θεωρίες (όπως π.χ. η αριθμητική) αποκρυσταλλώνονται σε τυπικά συστήματα τα οποία αποτελούνται από σύμβολα και λειτουργικούς κανόνες χειρισμού των συμβόλων, δηλαδή, αποτελούν τυπικά παίγνια, όπως π.χ. το σκάκι. Στη συνέχεια αποδεικνύει ότι το υπό εξέτασιν πρόβλημα του προγράμματός του είναι ισοδύναμο με την απαίτηση της συνέπειας αυτών των τυπικών συστημάτων, δηλαδή με την απόδειξη της αδυναμίας αυτού του τυπικού μαθηματικού παιχνιδιού να καταλήξει σε μια αντιφατική πρόταση όπως π.χ. το $0 = 1$· και αυτό με τον ίδιο (κατ' αναλογία) ακριβώς τρόπο που μπορούμε να διαγνώσουμε στο παιχνίδι του σκακιού ότι ένας συγκεκριμένος σχηματισμός με τα πιόνια είναι αδύνατον να παραχθεί. Οι μαθηματικές θεωρίες, σύμφωνα με την οπτική αυτή, αποκτούν την υπόσταση ενός μαθηματικού αντικειμένου (αφού έχουν συγκροτηθεί σε δομημένους σχηματισμούς συμβόλων) και γίνονται με τη σειρά τους αντικείμενο μαθηματικής μελέτης. Η, κατ' αυτόν τον τρόπο, μελέτη των μαθηματικών θεωριών ονομάζεται από τον Hilbert *Θεωρία αποδείξεων ή Μεταμαθηματικά*.

Η πρόσθετη απαίτηση που χρειάζεται, για να υλοποιηθεί το πρόγραμμα του Hilbert, είναι ότι η απόδειξη αυτή της συνέπειας των τυπικών θεωριών (στα μεταμαθηματικά) πρέπει να γίνεται με μαθηματικούς απλούς συνδυαστικούς τρόπους, δηλαδή μέσα στον κόσμο των πραγματικών μαθηματικών.

Η προσπάθεια να υλοποιηθεί το πρόγραμμα του Hilbert διήρκεσε αρκετά χρόνια και μεγάλοι μαθηματικοί της εποχής ασχολήθηκαν με αυτό. Στα χρόνια αυτά δημιουργήθηκαν όλα τα βασικά μαθηματικά και λογικά εργαλεία τα οποία αργότερα χρησίμευσαν για την ανάπτυξη της λογικής και την εμφάνιση της πληροφορικής.

Το πρόγραμμα του Hilbert είχε πικρό τέλος, διότι ο Gödel (όπως θα δούμε) απέδειξε με το θεώρημά του της μη πληρότητας ότι: το σύστημα της αριθμητικής (το οποίο είναι αρκούντως ισχυρό και περιλαμβάνει όλες τις μεθόδους των πραγματικών μαθηματικών) δεν μπορεί να αποδείξει τη συνέπειά του, δηλαδή τελικά ούτε η αριθμητική ούτε κανένα πλουσιότερο μαθηματικό σύστημα δεν μπορεί να αποδειχθεί συνεπές με πραγματικές μαθηματικές μεθόδους, όπως απαιτούσε το πρόγραμμα Hilbert.

Το πρόγραμμα του Hilbert και συναφείς λογικοφιλοσοφικές αναζητήσεις ήταν η αφετηρία για τα μεγάλα αποτελέσματα μιας επιστήμης, της επιστήμης της μαθηματικής λογικής, μέσα από την οποία αναδύθηκε η άλλη μεγάλη επιστήμη της εποχής μας, η πληροφορική.

Αλλά, βέβαια, πέρα από κάθε ορισμό ή/και ιστορική αναδρομή, ο καλύτερος τρόπος για να δούμε τι είναι μια επιστήμη είναι να τη μελετήσουμε. Ας ξεκινήσουμε λοιπόν!

2 Η λογική των προτάσεων, προτασιακός λογισμός

Στο κεφάλαιο αυτό θα ορίσουμε μια *γλώσσα* μέσω της οποίας θα μπορούμε να μεταφράζουμε προτάσεις της φυσικής μας γλώσσας. Σε αντίθεση με τις φυσικές γλώσσες (ελληνικά, αγγλικά, κλπ.) η γλώσσα που θα ορίσουμε θα είναι μια *τυπική* γλώσσα, μια γλώσσα με αυστηρούς κανόνες σχηματισμού των προτάσεων. Μας ενδιαφέρει μάλλον να εκφράσουμε τη μορφή ή την τυπική πλοκή των προτάσεων και η συμβολική γλώσσα θα είναι σε θέση να πραγματοποιήσει αυτόν το στόχο.

Οι σύνθετες προτάσεις δημιουργούνται με τη χρήση των (προτασιακών) συνδέσμων. Απλές προτάσεις είναι αυτές που δεν είναι σύνθετες, δηλαδή που δεν αναλύονται περαιτέρω. Στην προτασιακή λογική ενδιαφερόμαστε για τη λογική μορφή των σύνθετων προτάσεων και για τις σχέσεις συμπερασμού μεταξύ προτάσεων που είναι υποθέσεις και προτάσεων που είναι συμπεράσματα, είτε αυτές είναι σύνθετες είτε είναι απλές.

Οι συνήθεις σύνδεσμοι, μέσω των οποίων σχηματίζονται οι σύνθετες προτάσεις, είναι η άρνηση (όχι, δεν), η σύζευξη (και), η διάζευξη (ή), η συνεπαγωγή (αν... τότε ...) και η ισοδυναμία (αν και μόνον αν ή ανν). Ας δούμε κάποια παραδείγματα σύνθετων προτάσεων:

1. το 10 δεν είναι περιττός (όχι «το 10 είναι περιττός»),
2. το 2 είναι άρτιος και πρώτος («το 2 είναι άρτιος» και «το 2 είναι πρώτος»),
3. αν οι απέναντι πλευρές ενός τετραπλεύρου είναι παράλληλες και ίσες, τότε αυτό είναι παραλληλόγραμο.

Στο παράδειγμα 1 έχουμε μια σύνθετη πρόταση που σχηματίζεται με τον σύνδεσμο της άρνησης στην απλή πρόταση «το 10 είναι περιττός», στο 2 έχουμε μια σύζευξη απλών προτάσεων ενώ στο 3 η υπόθεση «αν οι απέναντι πλευρές ενός τετραπλεύρου είναι παράλληλες και ίσες», που είναι μέρος μιας σύνθετης πρότασης (συνεπαγωγής), είναι και αυτή σύνθετη (μια σύζευξη).

Τις απλές προτάσεις, δηλαδή αυτές που δεν έχουν καμία πλοκή με βάση τους προτασιακούς συνδέσμους, θα τις παριστάνουμε στην τυπική γλώσσα που θα ορίσουμε με τις προτασιακές μεταβλητές. Στον προτασιακό λογισμό δεν υπεισερχόμαστε στον τρόπο με τον οποίο αυτές δομούνται, τις θεωρούμε απλώς διατυπώσεις χωρίς περαιτέρω δυνατότητα ανάλυσης, διατυπώσεις οι οποίες μπορούν απλώς να είναι αληθείς ή ψευδείς. Σε μια σύνθετη πρόταση η αλήθεια ή το ψεύδος των απλών προτάσεων θα καθορίζει την αλήθεια ή το ψεύδος ολόκληρης της σύνθετης πρότασης. Ας δούμε με ένα παράδειγμα πώς μπορούμε, μέσω της χρήσης συμβόλων, να αναπαραστήσουμε τη μορφή ενός (προτασιακού τύπου) συλλογισμού. Έστω «ο Κώστας είναι καθηγητής», «ο Κώστας είναι πλούσιος», «ο Κώστας είναι λαϊκός τραγουδιστής» τρεις προτάσεις τις οποίες αντίστοιχα τις συμβολίζουμε - αναπαριστούμε με τα γράμματα A, B, C. Θεωρήστε τώρα τις ακόλουθες δηλώσεις:

«Ο Κώστας είναι καθηγητής»·

είναι ψευδές ότι «ο Κώστας είναι καθηγητής» και ότι «ο Κώστας είναι πλούσιος»·

αν «ο Κώστας είναι λαϊκός τραγουδιστής», τότε «ο Κώστας είναι πλούσιος».

Θα θέλαμε να δείξουμε ότι από τις παραπάνω υποθέσεις μπορούμε να συμπεράνουμε ότι

είναι ψευδές ότι «ο Κώστας είναι λαϊκός τραγουδιστής».

Αν χρησιμοποιήσουμε τα σύμβολα $\neg$ για το όχι, $\wedge$ για το και, $\rightarrow$ για το αν... τότε ... (τη συνεπαγωγή), ο ως άνω συλλογισμός παίρνει τη μορφή

$$((A \wedge \neg(A \wedge B)) \wedge (C \rightarrow B)) \rightarrow (\neg C)$$

που είναι η μορφή ενός σωστού συλλογισμού γιατί η τυπική αυτή μορφή της πρότασης (προτασιακός τύπος) είναι ταυτολογία.

2.1 Η γλώσσα της Λογικής των προτάσεων

Θα ορίσουμε τη γλώσσα του προτασιακού λογισμού $\mathcal{L}^{\Pi}$ η οποία είναι η τυπική γλώσσα της προτασιακής λογικής. Το σύνολο των συμβόλων της γλώσσας ή, όπως λέμε, το *Αλφάβητο* της γλώσσας αποτελείται από:

1. Τα σύμβολα λογικών συνδέσμων: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$. Αντίστοιχα αυτά ονομάζονται *άρνηση*, *σύζευξη*, *διάζευξη* και *συνεπαγωγή*.
2. Παρενθέσεις: την αριστερή παρένθεση (και τη δεξιά παρένθεση).
3. Σύμβολα προτάσεων ή προτασιακές μεταβλητές: Ένα αριθμήσιμο σύνολο συμβόλων $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$.

Σε κάθε γλώσσα το αλφάβητο είναι απαραίτητο. Είναι η πρώτη ύλη με την οποία στη συνέχεια κατασκευάζουμε τις προτάσεις μας, τις φράσεις μας. Όταν ορίζουμε το σύνολο των συμβόλων που αποτελούν το αλφάβητο μιας γλώσσας θα υποθέτουμε ότι τα σύμβολα αυτά δεν έχουν καμιά οντολογική σημασία πέραν του ότι είναι σύμβολα διακεκριμένα, δηλαδή ξεχωριστά μεταξύ τους. Θα πρέπει δε να τα διακρίνουμε από τα σύμβολα της μεταγλώσσας που θα τα χρησιμοποιούμε για να μελετήσουμε την τυπική γλώσσα.

Η παράθεση συμβόλων του αλφαβήτου, το ένα μετά το άλλο, σε έναν πεπερασμένο σχηματισμό μας δίνει τις εκφράσεις. *Εκφράσεις* λοιπόν της γλώσσας του προτασιακού λογισμού είναι οι πεπερασμένες ακολουθίες συμβόλων του αλφαβήτου π.χ. $)) \rightarrow A_3($, $(A_1 \rightarrow (\neg A_2))$, $()A_{10}\neg$ είναι εκφράσεις.

Το *μήκος* μιας έκφρασης είναι ο αριθμός των εμφανίσεων των συμβόλων σ' αυτήν. Για παράδειγμα, το μήκος αντίστοιχα των προηγούμενων εκφράσεων είναι 5, 8 και 4. Ας σημειωθεί ότι το μήκος μιας έκφρασης είναι τουλάχιστον 1. Αν σ και υ δύο εκφράσεις, τότε η έκφραση $\sigma\upsilon$ είναι η *παράθεση* των δύο εκφράσεων, δηλαδή η έκφραση σ ακολουθούμενη από την έκφραση υ, π.χ. αν $\sigma \equiv (A_3 \rightarrow$ και $\upsilon \equiv A_2)$, τότε $\sigma\upsilon \equiv (A_3 \rightarrow A_2)$. Το ίδιο ισχύει και για την παράθεση περισσότερων από δύο εκφράσεων, π.χ. η έκφραση $\sigma\upsilon w$ είναι παράθεση των εκφράσεων σ, υ και w. Αν $\tau = \sigma\upsilon w$ ή $\sigma\upsilon$ ή υw, τότε υ είναι *γνήσιο τμήμα* της τ. Η έκφραση τ θεωρείται τμήμα του εαυτού της, του τ. Άρα ένα *τμήμα* μιας έκφρασης είναι είτε ολόκληρη η έκφραση είτε ένα γνήσιο τμήμα της. Στην περίπτωση $\tau = \upsilon w$ η υ ονομάζεται *γνήσιο αρχικό τμήμα* της τ. Δύο εκφράσεις σ και τ είναι *ίσες*, το γράφουμε ως $\sigma \equiv \tau$, αν έχουν το ίδιο μήκος και έχουν τα ίδια σύμβολα στις ίδιες θέσεις, δηλαδή ταυτίζονται ως συντακτικά αντικείμενα. Η $\equiv$ είναι λοιπόν η σχέση της *συντακτικής* ταυτότητας. Για παράδειγμα, αν έχουμε τις εκφράσεις 2+3 και 3+2 στο αλφάβητο $\{2, +, 3\}$, τότε δεν ισχύει ότι $2 + 3 \equiv 3 + 2$, παρόλο που οι εκφράσεις ερμηνευόμενες ως αριθμοί δίνουν 2+3=3+2.

Από το σύνολο των εκφράσεων μας ενδιαφέρουν μόνο οι καλοφτιαγμένες, αυτές που έχουν να πουν κάτι, οι κτισμένες με τους «σωστούς» γραμματικούς κανόνες. Ο τρόπος μέσω του οποίου από το σύνολο των εκφράσεων μπορούμε να διακρίνουμε τις καλοφτιαγμένες εκφράσεις θα αποτελεί τη *Γραμματική* της γλώσσας. Αποτυπώνεται δε στον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 2.1 Σωστές *ή καλοφτιαγμένες* εκφράσεις *ή* προτασιακοί τύποι *είναι οι εκφράσεις που ορίζονται, επαγωγικά, ως εξής:*

1. *Οι προτασιακές μεταβλητές είναι προτασιακοί τύποι.*

2. *Αν φ και ψ είναι προτασιακοί τύποι, τότε οι εκφράσεις $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi), (\varphi \rightarrow \psi), (\neg\varphi)$ είναι προτασιακοί τύποι.*

3. Μόνον *οι εκφράσεις που σχηματίζονται από εφαρμογές των (1) και (2) είναι προτασιακοί τύποι.*

Ο ορισμός 2.1 δεν είναι τίποτε άλλο παρά ένας μηχανισμός κατασκευής προτασιακών τύπων. Ο τύπος αυτός του ορισμού λέγεται και *γενικευμένος επαγωγικός* ορισμός. Είναι επαγωγικός επειδή μας δίνει ένα σύνολο αρχικών εκφράσεων, τις προτασιακές μεταβλητές, που τις ονομάζει προτασιακούς τύπους και στη συνέχεια δίνει κάποιους κανόνες οι οποίοι μπορούν να εφαρμοστούν γενικότερα σε εκφράσεις και που μας επιτρέπουν να κατασκευάσουμε καινούργιους προτασιακούς τύπους από προτασιακούς τύπους που έχουν ήδη κατασκευαστεί. Κάθε έκφραση λοιπόν είναι προτασιακός τύπος μόνον αν στην κατασκευή της έχει προηγηθεί αυτή η διαδικασία.

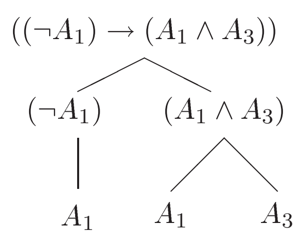
π.χ. η έκφραση $((\neg A_1) \rightarrow (A_1 \wedge A_3))$ είναι προτασιακός τύπος διότι υπάρχει η εξής κατασκευή:

(i). Τα A_1, A_3 είναι προτασιακοί τύποι λόγω (1).

(ii). Τα $(\neg A_1), (A_1 \wedge A_3)$ είναι προτασιακοί τύποι λόγω (2) και (i).

(iii). $((\neg A_1) \rightarrow (A_1 \wedge A_3))$ είναι προτασιακός τύπος λόγω (2) και (ii).

Η κατασκευή αυτή μπορεί να παρουσιαστεί υπό μορφή δένδρου ως εξής:



Κάθε έκφραση στην οποία δεν είναι δυνατόν να εφαρμοστεί η διαδικασία ορισμού δεν είναι προτασιακός τύπος. Π.χ. $\neg(A_1$ δεν είναι προτασιακός τύπος.

Συνήθως ο ορισμός των προτασιακών τύπων δίνεται ως εξής.

Ορισμός 2.2 *Το σύνολο* Π *των προτασιακών τύπων είναι το μικρότερο σύνολο για το οποίο ισχύουν οι εξής ιδιότητες:*

1. *Κάθε προτασιακή μεταβλητή ανήκει στο* Π.

2. *Αν* $\phi, \psi \in \Pi$ *τότε* $(\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \to \psi), (\neg\varphi) \in \Pi$ *[λέμε ότι* Π *είναι κλειστό στις διαδικασίες σχηματισμού σύνθετων τύπων].*

Παρατήρηση: Κάθε σύνολο Σ εκφράσεων της γλώσσας το οποίο ικανοποιεί τις συνθήκες 1 και 2 του ορισμού 2.2 λέγεται *επαγωγικό σύνολο.* Είναι τότε εύκολο να δούμε ότι το Π, ως το μικρότερο επαγωγικό σύνολο, είναι η τομή όλων των επαγωγικών συνόλων.

Θα δούμε τώρα ότι ο ορισμός 2.2 είναι ισοδύναμος με τη διαδικασία σχηματισμού των τύπων που αναφέρθηκε παραπάνω.

Θεώρημα 2.3 $\phi \in \Pi \Leftrightarrow$ *Υπάρχει ακολουθία* $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ *τύπων ώστε* $\phi \equiv \phi_n$ *και κάθε* ϕ_i, $(1 \leq i \leq n)$ *της ακολουθίας, είτε είναι προτασιακή μεταβλητή είτε είναι σύνθετος προτασιακός τύπος του οποίου τα συνθετικά μέρη έχουν προηγηθεί στην ακολουθία, δηλαδή αν π.χ.* $\phi_i \equiv (\phi_j \wedge \phi_k)$ *όπου* $j, k \leq i$.

Η ακολουθία $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ περιγράφει τον τρόπο σχηματισμού του ϕ σύμφωνα με τις οδηγίες του ορισμού 2.1 και ονομάζεται *ακολουθία δημιουργίας* του ϕ.

Απόδειξη $\Rightarrow$: Έστω R το σύνολο των προτασιακών τύπων ϕ που προκύπτουν από ακολουθίες δημιουργίας, δηλαδή υπάρχει ακολουθία δημιουργίας $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ ώστε $\phi_n = \phi$. Τότε εύκολα βλέπουμε ότι R είναι επαγωγικό σύνολο. Άρα $\Pi \subseteq R$ επειδή Π είναι το μικρότερο επαγωγικό σύνολο.

$\Leftarrow$: έστω $\phi \equiv \phi_n$ στην ακολουθία δημιουργίας $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$. Με επαγωγή στο n, αρχίζοντας από το $n = 1$, εύκολα βλέπουμε ότι κάθε τέτοιο ϕ_n ανήκει στο Π. Διότι αν μεν ϕ_n είναι προτασιακή μεταβλητή ανήκει, επειδή το Π περιέχει όλες τις προτασιακές μεταβλητές, ενώ αν ϕ_n έχει προκύψει από τύπους ϕ_j με $j < n$ θα ανήκει διότι από την επαγωγική υπόθεση τα $\phi_j \in \Pi$ ενώ το ϕ_n θα ανήκει επειδή το Π είναι επαγωγικό σύνολο και άρα κλειστό στη δημιουργία σύνθετων τύπων. $\Box$

Ο τύπος του γενικευμένου επαγωγικού ορισμού υποδεικνύει και μια μέθοδο απόδειξης που ονομάζεται *απόδειξη με επαγωγή.* Ας υποθέσουμε ότι $\mathcal{P}(x)$ είναι μια ιδιότητα που αναφέρεται στις εκφράσεις της γλώσσας, π.χ. $\mathcal{P}(x)$ θα μπορούσε να είναι η ιδιότητα «η έκφραση x έχει τον ίδιο αριθμό αριστερών και δεξιών παρενθέσεων». Τότε, για να αποδείξουμε ότι η ιδιότητα $\mathcal{P}(x)$ ισχύει για όλους τους προτασιακούς τύπους, αρκεί να αποδείξουμε τα εξής:

(i) Να αποδείξουμε ότι $\mathcal{P}(A_i)$ για κάθε σύμβολο πρότασης A_i, δηλαδή να αποδείξουμε ότι κάθε σύμβολο πρότασης έχει αυτήν την ιδιότητα.

(ii) Με βάση την υπόθεση $\mathcal{P}(\varphi)$ και $\mathcal{P}(\psi)$ να αποδείξουμε ότι ισχύει και $\mathcal{P}((\neg\varphi))$, $\mathcal{P}((\varphi \vee \psi))$, $\mathcal{P}((\varphi \wedge \psi))$, $\mathcal{P}((\varphi \to \psi))$. (το επαγωγικό βήμα).

Αν λοιπόν αποδείξουμε τα (i) και (ii) για μια ιδιότητα $\mathcal{P}(x)$, τότε το σύνολο $\mathcal{P}$ των εκφράσεων που ικανοποιούν αυτήν την ιδιότητα θα είναι επαγωγικό σύνολο, άρα το Π, ως το μικρότερο επαγωγικό σύνολο, θα είναι $\Pi \subseteq \mathcal{P}$, δηλαδή κάθε προτασιακός τύπος θα ικανοποιεί την ιδιότητα $\mathcal{P}$.

Μια άλλη μορφή με την οποία θα παρουσιάζεται η ανωτέρω απόδειξη με επαγωγή είναι η επαγωγή στον αριθμό των εμφανίσεων προτασιακών συνδέσμων σε έναν προτασιακό τύπο. Ο αριθμός αυτός ονομάζεται *βαθμός* του ϕ ($\deg(\phi)$). Οπότε η απόδειξη γίνεται αποδεικνύοντας πρώτα ότι η ιδιότητα ισχύει για όλες τις προτασιακές μεταβλητές, δηλαδή με βαθμό 0 και στη συνέχεια, υποθέτοντας ότι ισχύει για τύπους με βαθμό $< n$, αποδεικνύουμε ότι ισχύει και για τύπους με βαθμό n.

Όλα όσα έχουμε αναπτύξει ως προς τους επαγωγικούς ορισμούς και τις αποδείξεις με επαγωγή στην περίπτωση των προτασιακών τύπων, θα ισχύουν, τηρουμένων των αναλογιών, και σε κάθε άλλη ανάλογη περίπτωση στη συνέχεια.

Παράδειγμα 2.4 Αποδείξτε ότι κάθε προτασιακός τύπος έχει τον ίδιο αριθμό αριστερών και δεξιών παρενθέσεων.

Απόδειξη : Με επαγωγή.

(i) Η ιδιότητα ισχύει για τα σύμβολα προτάσεων γιατί ο αριθμός των παρενθέσεων είναι μηδέν.

(ii) Έστω φ και ψ έχουν τον ίδιο αριθμό αριστερών και δεξιών παρενθέσεων. Τότε $(\neg\varphi)$ έχει επίσης τον ίδιο αριθμό διότι προστέθηκε στον φ μόνο μια αριστερή και μια δεξιά παρένθεση. Επίσης, $(\varphi \wedge \psi)$ έχει τον ίδιο αριθμό διότι προφανώς η έκφραση $\varphi \wedge \psi$ έχει τον ίδιο αριθμό και στον $(\varphi \wedge \psi)$ προστέθηκε μια αριστερή και μια δεξιά παρένθεση. Για τον ίδιο λόγο τα $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ έχουν τον ίδιο αριθμό αριστερών και δεξιών παρενθέσεων. □

2.2 Μοναδική αναγνωσιμότητα

Κάθε προτασιακός τύπος, ανάλογα με το ποιο σύμβολο συνδέσμου έχει χρησιμοποιηθεί τελευταίο στην κατασκευή του, είναι είτε μια προτασιακή μεταβλητή, είτε μια άρνηση της μορφής $(\neg\varphi)$, είτε μία διάζευξη της μορφής $(\varphi \vee \psi)$, είτε μία σύζευξη της μορφής $(\varphi \wedge \psi)$, είτε μια συνεπαγωγή της μορφής $(\varphi \rightarrow \psi)$. Το στοιχείο που μας επιτρέπει την αναμφίβολη αναγνώριση του ποιο σύμβολο συνδέσμου έχει εφαρμοστεί τελευταίο είναι η χρησιμοποίηση των παρενθέσεων. Αν δεν χρησιμοποιούσαμε παρενθέσεις και σχηματίζαμε π.χ. την έκφραση $A_1 \wedge A_2 \rightarrow A_3$, τότε θα ήμασταν σε αμφιβολία αν αυτό παριστάνει τον προτασιακό τύπο $(A_1 \wedge (A_2 \rightarrow A_3))$ ή τον $((A_1 \wedge A_2) \rightarrow A_3)$. Δηλαδή η αναγνωσιμότητα σ' αυτή την περίπτωση δεν θα ήταν μοναδική. Πιο κάτω διατυπώνεται το θεώρημα που μας εξασφαλίζει τη μοναδική αναγνωσιμότητα.

Θεώρημα 2.5 *Για κάθε προτασιακό τύπο ϕ* μία και μόνο μία *από τις ακόλουθες συνθήκες ικανοποιείται:*

1. *φ είναι μια προτασιακή μεταβλητή.*
2. *Υπάρχει ένας* μοναδικός *προτασιακός τύπος ψ ώστε $\varphi \equiv (\neg\psi)$.*

3. Υπάρχει ένα μοναδικό ζεύγος προτασιακών τύπων ψ_1, ψ_2 και ένα μοναδικό σύμβολο λογικού συνδέσμου $\diamondsuit$ έτσι ώστε
$\varphi \equiv (\psi_1 \diamondsuit \psi_2)$ *και* $\diamondsuit \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$.
Αυτό σημαίνει ότι μια σύζευξη δεν μπορεί να είναι διάζευξη ή συνεπαγωγή κλπ.

Απόδειξη Αποδεικνύουμε πρώτα το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 2.6 *Κάθε γνήσιο αρχικό μέρος ενός προτασιακού τύπου είναι μια έκφραση με πλήθος αριστερών παρανθέσεων μεγαλύτερο από το πλήθος των δεξιών.*

Απόδειξη: Με επαγωγή. Η ιδιότητα ισχύει στις προτασιακές μεταβλητές γιατί αυτές δεν έχουν γνήσιο αρχικό μέρος. Έστω τώρα ότι η ιδιότητα ισχύει για τους τύπους φ και ψ. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει για τους $(\varphi \wedge \psi)$, $(\neg\varphi)$, κ.ο.κ. Παίρνουμε τον $(\varphi \wedge \psi)$. Κάθε γνήσιο αρχικό μέρος του $(\varphi \wedge \psi)$ έχει μία από τις μορφές: (ή $(\varphi'$ ή $(\varphi$ ή $(\varphi\wedge$ ή $(\varphi \wedge \psi'$ ή $(\varphi \wedge \psi$, όπου φ' και ψ' γνήσια αρχικά μέρη, αντίστοιχα, των φ και ψ, άρα λόγω της υπόθεσης ισχύει γι' αυτά η ιδιότητα. Είναι εύκολο να δούμε ότι και στις έξι περιπτώσεις έχουμε περισσότερες αριστερές από δεξιές παρενθέσεις. Την ίδια ακριβώς απόδειξη χρησιμοποιούμε για τους $(\varphi \vee \psi), (\varphi \rightarrow \psi) και (\neg\varphi)$.

Απόδειξη του θεωρήματος 2.5. Το ότι κάθε προτασιακός τύπος θα έχει μια από τις μορφές που δηλώνονται στο θεώρημα 2.5 είναι προφανές από τον επαγωγικό ορισμό 2.1. Να αποδείξουμε τώρα τη μοναδικότητα. Έστω ότι ο τύπος έχει τη μορφή $(\psi_1 \wedge \psi_2)$. Ο τύπος αυτός είναι αδύνατον να έχει και τη μορφή $(\neg\psi)$, διότι ο τύπος ψ_1 θα άρχιζε με το σύμβολο $\neg$, αδύνατον διότι όλοι οι προτασιακοί τύποι είτε είναι προτασιακές μεταβλητές είτε αρχίζουν με μια αριστερή παρένθεση. Έστω τώρα ότι $(\psi_1 \wedge \psi_2) \equiv (\psi_1' \diamondsuit \psi_2')$ για κάποιους τύπους ψ_1', ψ_2' και κάποιο σύμβολο συνδέσμου $\diamondsuit$. Αυτό σημαίνει ότι $\psi_1 \wedge \psi_2) \equiv \psi_1' \diamondsuit \psi_2')$. Αλλά τότε αν το ψ_1 διαφορετικό από το ψ_1', αυτό σημαίνει ότι αν αρχίσουμε να διαγράφουμε τα ίδια σύμβολα που αναγκαστικά βρίσκονται στις ακολουθίες συμβόλων $\psi_1 \wedge \psi_2)$ και $\psi_1' \diamondsuit \psi_2')$ ανάλογα με το ποιον από τους ψ_1 και ψ_1' εξαντλήσουμε πρώτο, είτε ο ψ_1 θα είναι γνήσιο αρχικό μέρος του ψ_1' ή ο ψ_1' θα είναι γνήσιο αρχικό μέρος του ψ_1. Και τα δύο όμως αυτά είναι αδύνατα, μια και σύμφωνα με το λήμμα 2.6 κάθε γνήσιο αρχικό μέρος ενός προτασιακού τύπου έχει περισσότερες αριστερές από δεξιές παρενθέσεις άρα αποκλείεται να είναι τύπος όπως απαιτεί το παράδειγμα 2.4. Άρα τελικά, $\psi_1 \equiv \psi_1'$ και άρα $\wedge\psi_2) \equiv \diamondsuit\psi_2')$ από το οποίο συμπεραίνουμε ότι $\wedge \equiv \diamondsuit$ και $\psi_2 \equiv \diamondsuit\psi_2')$. Όμοια δουλεύουμε και για τις άλλες μορφές $(\varphi \vee \psi)$ κτλ. □

Ένας *αλγόριθμος* είναι μια κατασκευαστική συνταγή ή διαδικασία μέσω της οποίας μπορούμε να αποφανθούμε, σε έναν πεπερασμένο αριθμό βημάτων της διαδικασίας, αν για ένα μέλος ενός δοσμένου συνόλου το μέλος αυτό ικανοποιεί μια ιδιότητα ή όχι. Π.χ. αν A είναι το σύνολο των εκφράσεων και P η ιδιότητα μιας έκφρασης να είναι προτασιακός τύπος, ένας αλγόριθμος στην περίπτωση αυτή θα ήταν να περιγράψουμε μια διαδικασία που θα αποφάσιζε (με έναν εντελώς κατασκευαστικό-μηχανικό τρόπο) αν μια δοθείσα έκφραση είναι προτασιακός τύπος ή όχι [η απάντηση θα δίνεται με ένα ΝΑΙ ή ένα ΟΧΙ].

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο υπολογιστής μας, δηλαδή η μηχανή που εκτελεί τις κατασκευαστικές-μηχανικές οδηγίες μας, αναγνωρίζει τα σύμβολα $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, (,)$ και τα σύμβολα $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$. Θα περιγράψουμε έναν αλγόριθμο ώστε όταν τον τροφοδοτούμε με μια έκφραση να μας απαντάει αν αυτή είναι προτασιακός τύπος ή όχι. Έστω ϕ η δοθείσα έκφραση και έστω L το μήκος της ϕ.

Βήμα 1. Αν $L = 1$, τότε απαντάει ΝΑΙ μόνο στην περίπτωση που ϕ είναι προτασιακή μεταβλητή, αλλιώς απαντάει ΟΧΙ.

Βήμα 2. Αν $L > 1$, πρέπει η ϕ να αρχίζει με μια αριστερή παρένθεση. Αλλιώς ΟΧΙ. Αν το δεύτερο σύμβολο είναι $\neg$, τότε ϕ πρέπει να έχει τη μορφή $(\neg\psi)$ για κάποια έκφραση ψ, αλλιώς ΟΧΙ. Σ' αυτήν την περίπτωση το πρόβλημα ανάγεται στην επανάληψη της διαδικασίας, αρχίζοντας από το Βήμα 1 για την έκφραση ψ, που βέβαια τώρα έχει μικρότερο μήκος από τη ϕ. Επιστροφή στο Βήμα 1 για την ψ.

Βήμα 3. Αν ϕ αρχίζει με αριστερή παρένθεση αλλά το δεύτερο σύμβολο δεν είναι το $\neg$, τότε σαρώστε το ϕ από τα αριστερά προς τα δεξιά έως ότου για πρώτη φορά φτάσετε σε μια έκφραση της μορφής $(\psi$, όπου στην έκφραση ψ έχουμε τον ίδιο αριθμό αριστερών και δεξιών παρενθέσεων. Αν εξαντληθεί η ϕ χωρίς να φτάσετε σε μια τέτοια έκφραση, η απάντηση είναι ΟΧΙ. Αν φτάσουμε, τότε η ϕ πρέπει να έχει τη μορφή $(\psi\diamondsuit\chi)$, με χ κάποια έκφραση και $\diamondsuit \in \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$, αλλιώς ΟΧΙ. Τότε το πρόβλημα ανάγεται στο να εξετάσουμε αν οι εκφράσεις ψ και χ, που έχουν μικρότερο μήκος, είναι προτασιακοί τύποι. Άρα επιστροφή στο Βήμα 1 και περαίωση της διαδικασίας για το ψ και μετά το ίδιο για το χ.

Επειδή κάθε έκφραση έχει πεπερασμένο μήκος η διαδικασία αυτή θα τελειώσει και αν υπάρχει ένα τουλάχιστον ΟΧΙ η απάντηση για την έκφραση ϕ είναι ΟΧΙ, ενώ αν δεν υπάρξει, δηλαδή αν όλες οι απαντήσεις έως το τέλος είναι ΝΑΙ τότε ϕ είναι προτασιακός τύπος.

Ως άσκηση μπορείτε να αποδείξετε , με επαγωγή στο ϕ, ότι όντως η ανωτέρω περιγραφή των βημάτων είναι ένας σωστός αλγόριθμος που αν ϕ είναι προτασιακός τύπος δίνει την απάντηση ΝΑΙ, ενώ αν δεν είναι δίνει την απάντηση ΟΧΙ.

2.2.1 Πολωνική γραφή

Υπάρχει ένας τρόπος να ορίσουμε τους τύπους χωρίς να χρησιμοποιήσουμε παρενθέσεις και παρ' όλα αυτά να έχουμε μοναδική αναγνωσιμότητα. Ξεκινώντας από τις προτασιακές μεταβλητές κάθε φορά που θέλουμε την άρνηση του φ, γράφουμε $\neg\varphi$, για τη διάζευξη, σύζευξη, συνεπαγωγή των φ και ψ γράφουμε αντίστοιχα $\vee\varphi\psi$, $\wedge\varphi\psi$, $\rightarrow\varphi\psi$. Ο τρόπος αυτός επειδή χρησιμοποιήθηκε πρώτα από τους Πολωνούς λογικούς ονομάζεται πολωνικός τρόπος γραφής.

2.2.2 Ανορθογραφίες

Επειδή όταν θέλουμε να γράφουμε προτασιακούς τύπους είναι πολλές φορές κουραστικό να χρησιμοποιούμε όλες τις παρενθέσεις που απαιτούνται, θα επιτρέπουμε στον εαυτό μας να κάνουμε και ανορθογραφίες. Π.χ. θα γράφουμε $\phi \wedge \psi$ και θα εννοούμε $(\phi \wedge \psi)$, θα γράφουμε $(\neg\psi) \rightarrow \psi$ και θα εννοούμε $((\neg\psi) \rightarrow \psi)$. Ο «κανόνας» στις ανορθογραφίες θα είναι ότι το $\neg$ θα δένει περισσότερο με τα γειτονικά του απ' ό,τι τα $\vee$ και $\wedge$, που με τη σειρά τους θα δένουν περισσότερο με τα γειτονικά τους απ' ό,τι το $\rightarrow$. Π.χ. αν γράφω $\neg\phi\vee\psi \rightarrow \phi\vee\psi$ σύμφωνα με αυτόν τον κανόνα, θα εννοώ $((\neg\phi\vee\psi) \rightarrow (\phi\vee\psi))$.

2.3 Ασκήσεις

1. Αποδείξτε ότι κάθε γνήσιο τελικό τμήμα ενός προτασιακού τύπου έχει περισσότερες δεξιές από αριστερές παρενθέσεις.

2. Έστω ψ, χ, ϕ προτασιακοί τύποι. Τότε αν $(\neg\psi)$ είναι τμήμα του ϕ, το ψ ονομάζεται το *εύρος* στον ϕ του $\neg$ στα αριστερά του ψ. Αν $(\psi\Diamond\chi)$ είναι τμήμα του ϕ, τότε τα ψ και χ ονομάζονται αριστερό και δεξιό εύρος στον ϕ του $\Diamond$ μεταξύ ψ και χ.

Αποδείξτε ότι κάθε $\neg$ στο κάθε ϕ έχει ένα μοναδικό εύρος.

Επίσης ότι κάθε $\Diamond$ σε κάθε ϕ έχει μοναδικά αριστερά και δεξιά εύρη.

3. Αποδείξτε ότι αν ϕ είναι τμήμα του $(\neg\psi)$, τότε ϕ είναι τμήμα του ψ ή $\phi = (\neg\psi)$. Επίσης αποδείξτε ότι αν ϕ είναι τμήμα του $\psi\Diamond\chi$, τότε ϕ είναι τμήμα του ψ ή τμήμα του χ ή $\phi = \psi\Diamond\chi$.

4. Φανταστείτε ότι ο υπολογιστής σας αναγνωρίζει τα σύμβολα $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ και τα σύμβολα $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$. Να κατασκευάσετε ένα πρόγραμμα (αλγόριθμο) ώστε όταν τον τροφοδοτείτε με μια έκφραση να σας απαντάει αν αυτή είναι προτασιακός τύπος ή όχι.

5. Αποδείξτε το θεώρημα της μοναδικής αναγνωσιμότητας για την πολωνική γραφή.

(Υπόδειξη: Οι εκφράσεις φ και ψ λέγονται *συμβιβαστές* όταν είτε $\varphi \equiv \psi$ είτε η μία από αυτές είναι αρχικό μέρος της άλλης. Αποδείξτε με επαγωγή στον αριθμό των συμβόλων ότι αν $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ είναι προτασιακοί τύποι και οι εκφράσεις $\varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_n$ και $\psi_1\psi_2\ldots\psi_n$ είναι συμβιβαστές, τότε $\varphi_i \equiv \psi_i$ για κάθε $i \leq n$.)

2.4 Σημασιολογικές έννοιες, Σημαντική

Μέχρι τώρα η μελέτη της γλώσσας ήταν καθαρά *συντακτική*. Οι προτασιακοί τύποι δεν ήταν τίποτε άλλο παρά «νεκρές» ακολουθίες συμβόλων, συντακτικά αντικείμενα. Πέραν αυτού καμιά άλλη οντολογική αξία δεν αναγνωριζόταν σ' αυτά τα σύμβολα, δεν ήταν φορτισμένα με καμιά «ερμηνεία». Η γλώσσα όμως υπάρχει για να εκφράζει κάποια πράγματα. Για να αποκαταστήσουμε λοιπόν τον λόγο για τον οποίο κατασκευάστηκε η (τυπική) γλώσσα πρέπει να δώσουμε την ερμηνεία της, δηλαδή τον τρόπο με τον οποίο η γλώσσα αποκτά τη σημασία της (σημασιολογία ή σημαντική). Προς τον σκοπό αυτό θα σκεφτόμαστε ότι τα σύμβολα προτάσεων είναι (κάποιες) απλές, ατομικές προτάσεις της ελληνικής γλώσσας (άρα προτάσεις που είναι αληθείς ή ψευδείς), τα υπόλοιπα σύμβολα $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ έχουν τη συνήθη σημασία και ότι ο ορισμός της κατασκευής των προτασιακών τύπων αντανακλά τον τρόπο κατασκευής προτάσεων, στη φυσική γλώσσα, με βάση τους λογικούς συνδέσμους.

Συνήθεις λογικοί σύνδεσμοι: θεωρούμε σκόπιμο να παρεμβάλουμε μια εξέταση των συνήθων λογικών συνδέσμων $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$. Εδώ θα πρέπει να προσέξουμε. Τα σύμβολα $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ τα μεταχειριστήκαμε ως σύμβολα συνδέσμων στην τυπική μας γλώσσα. Και τώρα πρόκειται να τα μεταχειριστούμε και σαν σύμβολα των ίδιων των πραγματικών συνδέσμων. Μια λύση θα ήταν να γράφουμε $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ για τα σύμβολα ως συντακτικά αντικείμενα και κάτι σαν $\tilde{\neg}, \tilde{\wedge}, \tilde{\vee}, \tilde{\rightarrow}$ για τη σημασία τους δηλαδή τους συνδέσμους. Συνήθως θα το αποφεύγουμε και ελπίζουμε ότι ο αναγνώστης θα καταλαβαίνει κάθε φορά τι εννοούμε. Δεχόμαστε ότι κάθε προτασιακός τύπος (που παριστάνει μια πρόταση της φυσικής γλώσσας) μπορεί να έχει μια από τις εξής δύο *αληθοτιμές*: *αληθής* (T, True) ή *ψευδής* (F, False). Η αληθοτιμή μιας σύνθετης πρότασης καθορίζεται πλήρως από τις αληθοτιμές των απλούστερων προτάσεων που συνδέθηκαν με κάποιον λογικό σύνδεσμο για να τη σχηματίσουν. Ο καθορισμός αυτός γίνεται σύμφωνα με τους παρακάτω αληθοπίνακες: *Αρνηση*:

φ	$\neg\varphi$
T	F
F	T

Η άρνηση αλλάζει την τιμή αλήθειας της πρότασης στην οποία αναφέρεται. *Σύζευξη*:

φ	ψ	$\varphi\wedge\psi$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

«$\varphi \wedge \psi$» σημαίνει «φ και ψ».

Διάζευξη:

«$\varphi \vee \psi$» σημαίνει «φ ή ψ». Υπάρχουν δύο σημασίες της διάζευξης στην καθημερινή της χρήση. Η *μη αποκλειστική* και η *αποκλειστική* σημασία. Η *μη αποκλειστική* διάζευξη δύο προτάσεων εκφράζει ότι μία από τις προτάσεις είναι αληθινή, χωρίς να λέει τίποτα για το αν αμφότερες οι προτάσεις πρέπει να είναι αληθινές ή όχι. Η *αποκλειστική* διάζευξη δύο προτάσεων μας λέει ότι μία από τις προτάσεις είναι αληθής ενώ η άλλη είναι ψευδής. Π.χ. αν σ' ένα βιβλιοπωλείο είναι γραμμένη η επιγραφή «Οι πελάτες που είναι καθηγητές ή φοιτητές έχουν ειδική έκπτωση», τότε προφανώς έχουμε μια μη αποκλειστική διάζευξη. Αν ένα κινηματογραφικό έργο παίζεται την ίδια ώρα μ' ένα θεατρικό έργο, τότε η πρόταση «θα πάμε στον κινηματογράφο ή στο θέατρο» έχει την αποκλειστική σημασία. Στα μαθηματικά η διάζευξη χρησιμοποιείται πάντα με τη μη αποκλειστική της σημασία. Άρα μπορούμε να λέμε ότι κάθε αριθμός είναι θετικός ή μικρότερος του 3 ξέροντας ότι υπάρχουν θετικοί αριθμοί μικρότεροι του 3. Ο αληθοπίνακας της μη αποκλειστικής διάζευξης είναι:

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Συνεπαγωγή:

«$\varphi \rightarrow \psi$» σημαίνει «αν φ τότε, ψ».

φ	ψ	$\varphi \rightarrow \psi$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Η περίπτωση (2η σειρά) όπου η υπόθεση είναι αληθής και το συμπέρασμα ψευδές είναι σαφής. Στην περίπτωση αυτή στο $\varphi \rightarrow \psi$ πρέπει να αποδοθεί η τιμή F. Επίσης σαφής είναι και η περίπτωση της πρώτης σειράς. Για να δικαιολογήσουμε τις υπόλοιπες σειρές του αληθοπίνακα παρατηρούμε ότι είναι επιθυμητό η πρόταση «αν φ και ψ τότε ψ» να είναι *πάντα* αληθινή. Δηλαδή η $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \psi$ πρέπει να παίρνει πάντα την τιμή T. Αλλά τότε (γράφοντας $\varphi = \mathsf{T}$ ή $\varphi = \mathsf{F}$ αν η φ παίρνει την τιμή T ή την τιμή F):

- Αν $\varphi = \mathsf{T}$ και $\psi = \mathsf{T}$, τότε $(\varphi \wedge \psi) = \mathsf{T}$ και $\psi = \mathsf{T}$. Άρα δικαιολογείται η πρώτη σειρά.
- Αν $\varphi = \mathsf{F}$ και $\psi = \mathsf{T}$, τότε $(\varphi \wedge \psi) = \mathsf{F}$. Άρα δικαιολογείται η τρίτη σειρά.

- Αν $\varphi = \mathsf{F}$ και $\psi = \mathsf{F}$, τότε $(\varphi \wedge \psi) = \mathsf{F}$. Άρα δικαιολογείται η τέταρτη σειρά.

Άλλη δικαιολόγηση του αληθοπίνακα είναι η εξής: Θεωρούμε την πρόταση «αν x περιττός τότε x^2 περιττός». Τη θεωρούμε *αληθινή* πρόταση. Προφανώς για να διαψεύσουμε αυτήν την πρόταση δεν θα θέλαμε να θεωρήσουμε περιπτώσεις όπου x δεν είναι περιττός. Αυτό δικαιολογεί την 3η και 4η σειρά. Επίσης κάθε περίπτωση x περιττού μας δίνει x^2 περιττό που επιβεβαιώνει τον γενικό ισχυρισμό. Αυτό δικαιολογεί την 1η σειρά.

Τους αληθοπίνακες μπορούμε να τους φανταστούμε, με προφανή τρόπο, ως συναρτήσεις που καθορίζουν τους αντίστοιχους συνδέσμους. Έτσι ο αληθοπίνακας της άρνησης θα καθορίζει τη συνάρτηση-σύνδεσμο $\tilde{\neg} : \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\} \to \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}$ και οι υπόλοιποι τις συναρτήσεις $\tilde{\wedge}, \tilde{\vee}, \tilde{\to} : \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}^2 \to \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}$.

2.5 Απονομές αλήθειας

Θέλουμε να ορίσουμε τι σημαίνει για έναν προτασιακό τύπο να είναι λογική συνέπεια άλλων προτασιακών τύπων. Π.χ. A_1 είναι λογική συνέπεια του $(A_1 \wedge A_2)$. Γιατί πράγματι όποιες προτάσεις της ελληνικής γλώσσας και να συμβολίζουν οι A_1 και A_2, αν η πρόταση $(A_1 \wedge A_2)$ είναι αληθής τότε η A_1 θα είναι επίσης αληθής. Το σύνολο $\{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}$ το ονομάζουμε σύνολο των *αληθοτιμών ή τιμών αλήθειας* και αποτελείται από δύο ξεχωριστά στοιχεία, το T και το F. Το T ονομάζουμε *αληθές* (True). Το F ονομάζουμε *ψευδές* (False). (Δεν έχει σημασία *ποια* είναι τα T και F, θα μπορούσε να ήταν οι αριθμοι 1 και 0, όπως συνήθως παριστάνονται στην πληροφορική.) Εστω $\mathcal{A}$ το σύνολο των προτασιακών μεταβλητών της γλώσσας της λογικής των προτάσεων και Π το σύνολο όλων των προτασιακών τύπων.

Ορισμός 2.7 Απονομή αλήθειας *ονομάζουμε κάθε συνάρτηση*

$$V : \mathcal{A} \to \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}$$

(δηλαδή κάθε συνάρτηση από το σύνολο $\mathcal{A}$ στο σύνολο των αληθοτιμών).

Αν V είναι μία απονομή αλήθειας, τότε σε κάθε «ατομική πρόταση» A_k αντιστοιχεί μέσω της V μία τιμή T ή F. Αν υποθέσουμε ότι οι $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ αντιστοιχούν στις ατομικές προτάσεις που μπορούμε να σχηματίσουμε στην ελληνική γλώσσα, τότε η τιμή T ή F που θα παίρνουμε μέσω της V θα μας λέει ότι η πρόταση είναι αντίστοιχα αληθής ή ψευδής. Δηλαδή μία απονομή αλήθειας αποτελεί έναν «κόσμο» μέσα στον οποίο μία ατομική πρόταση (δηλαδή τα σύμβολα προτάσεων) αποκτά τη σημασία της, να είναι δηλαδή αληθής ή ψευδής στον κόσμο αυτό. Άπαξ και δοθεί μια απονομή αλήθειας, οι τιμές αλήθειας των σύνθετων προτάσεων θα καθορίζονται βάσει των αληθοπινάκων. Αυτό αυτόματα θα μας δώσει μια επέκταση της συνάρτησης V στο σύνολο όλων των προτάσεων. Αν ονομάσουμε $\bar{V}$ αυτήν την επέκταση, η $\bar{V}$ θα είναι μια συνάρτηση $\bar{V} : \Pi \to \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}$ που ορίζεται ως ακολούθως: Ο ορισμός γίνεται με (γενικευμένη) επαγωγή στον τρόπο κατασκευής των προτασιακών τύπων:

0. Για κάθε $A_i \in \mathcal{A}$ έχουμε $\bar{V}(A_i) = V(A_i)$ (άρα $\bar{V}$ είναι επέκταση της V).

   Αν τώρα $\varphi, \psi \in \Pi$ και έχουν ήδη οριστεί οι $\bar{V}(\varphi)$ και $\bar{V}(\psi)$,

1. $\bar{V}((\neg\varphi)) = \begin{cases} \mathsf{T} & \text{αν } \bar{V}(\varphi) = \mathsf{F} \\ \mathsf{F} & \text{αν } \bar{V}(\varphi) = \mathsf{T} \end{cases}$

2. $\bar{V}((\varphi \wedge \psi)) = \begin{cases} \mathsf{T} & \text{αν } \bar{V}(\varphi) = \mathsf{T} \text{ και } \bar{V}(\psi) = \mathsf{T} \\ \mathsf{F} & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

3. $\bar{V}((\varphi \vee \psi)) = \begin{cases} \mathsf{F} & \text{αν } \bar{V}(\varphi) = \mathsf{F} \text{ και } \bar{V}(\psi) = \mathsf{F} \\ \mathsf{T} & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

4. $\bar{V}((\varphi \to \psi)) = \begin{cases} \mathsf{F} & \text{αν } \bar{V}(\varphi) = \mathsf{T} \text{ και } \bar{V}(\psi) = \mathsf{F} \\ \mathsf{T} & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

Σημείωση: Είναι εύκολο να δούμε ότι οι συνθήκες δεξιά αντιστοιχούν στον τρόπο με τον οποίο υπολογίζουμε την τιμή αλήθειας μιας σύνθετης πρότασης βάσει του αληθοπίνακα (όταν οι τιμές αλήθειας των επιμέρους προτάσεων είναι γνωστές). Δηλαδή θα μπορούσαμε να είχαμε γράψει $\bar{V}(\neg\phi) = \tilde{\neg}(\bar{V}(\phi))$ και $\bar{V}(\phi\Diamond\psi) = \tilde{\Diamond}(\bar{V}(\phi), \bar{V}(\psi))$ για $\Diamond \in \{\wedge, \vee, \to\}$.

Ισχύουν τα ακόλουθα θεωρήματα:

Θεώρημα 2.8 *Για κάθε απονομή αλήθειας V υπάρχει μία και μόνον μία επέκταση $\bar{V}$.*

Απόδειξη

Μοναδικότητα: Έστω ότι υπήρχαν δύο διαφορετικές επεκτάσεις $\bar{V}_1$ και $\bar{V}_2$ μιας V. Τότε θα υπήρχε ένας ελάχιστος n για τον οποίο ένας προτασιακός τύπος ϕ με $\deg(\phi) = n$ θα έπαιρνε δύο διαφορετικές τιμές για τα $\bar{V}_1$ και $\bar{V}_2$, δηλαδή $\bar{V}_1(\phi) \neq \bar{V}_2(\phi)$. Αλλά τότε ϕ δεν θα μπορούσε να είναι μια προτασιακή μεταβλητή διότι στις προτασιακές μεταβλητές οι $\bar{V}_1$ και $\bar{V}_2$ συμφωνούν, επειδή $\bar{V}_1$ και $\bar{V}_2$ επεκτάσεις της V. Άρα ϕ σύνθετος τύπος και αν π.χ. $\phi \equiv (\phi_1 \wedge \phi_2)$ τότε

$$\bar{V}_1(\phi) = \tilde{\wedge}(\bar{V}_1(\phi_1), \bar{V}_1(\phi_2)) \stackrel{\text{E. Y.}}{=} \tilde{\wedge}(\bar{V}_2(\phi_1), \bar{V}_2(\phi_2)) = \bar{V}_2(\phi)$$

[Από Ε. Υ. (Επαγωγική Υπόθεση) $\bar{V}_1(\phi_1) = \bar{V}_2(\phi_1)$ και $\bar{V}_1(\phi_2) = \bar{V}_2(\phi_2)$, επειδή $\deg(\phi_1), \deg(\phi_2) < \deg(\phi) = n$.]

Ύπαρξη: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε συνάρτηση $\bar{V}_n$ η οποία έχει πεδίο ορισμού όλους τους προτασιακούς τύπους ϕ με βαθμό $\leq n$ [δηλαδή $\deg(\phi) \leq n$ και πεδίο τιμών το $\{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}$. Η συνάρτηση θα νοείται ως ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγών $< a, b >$, όπου a είναι το όρισμα και b η τιμή της συνάρτησης για το όρισμα a.

- $\bar{V}_0 = V$

- $\bar{V}_{n+1}$ θα προκύπτει εάν στη $\bar{V}_n$ προσθέσουμε όλα τα διατεταγμένα ζεύγη $\langle \phi, * \rangle$, όπου $\deg(\phi) = n+1$ και
  $* = \bar{V}_{n+1}(\phi) = \tilde{\neg}(\bar{V}_n(\psi))$ αν $\phi \equiv \neg\psi$, ενώ
  $* = \bar{V}_{n+1}(\phi) = \tilde{\Diamond}(\bar{V}_n(\phi_1), \bar{V}_n(\phi_2))$ αν $\phi \equiv \phi_1 \Diamond \phi_2$, [με $\Diamond \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$].

Εύκολα βλέπουμε, με επαγωγή στο n, ότι

$$V = \bar{V}_0 \subseteq \cdots \subseteq \bar{V}_n \subseteq \bar{V}_{n+1} \subseteq \cdots$$

και ορίζοντας

$$\bar{V} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bar{V}_n$$

παίρνουμε τη ζητούμενη επέκταση της V. □

Θεώρημα 2.9 *Αν φ είναι ένας προτασιακός τύπος στον οποίο εμφανίζονται τα σύμβολα προτάσεων $A_{k_1}, A_{k_2}, \ldots, A_{k_n}$ (και μόνον αυτά) και αν V_1, V_2 είναι δύο απονομές αλήθειας που συμφωνούν σ' αυτά τα σύμβολα δηλαδή $V_1(A_{k_i}) = V_2(A_{k_i})$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$, τότε $\bar{V}_1(\varphi) = \bar{V}_2(\varphi)$.*

Π.χ. αν $\varphi \equiv (A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow A_5))$, τότε η τιμή $\bar{V}(\varphi)$ εξαρτάται μόνον από τις τιμές $V(A_1), V(A_2), V(A_5)$ και όχι από άλλες, λ.χ. τη $V(A_{50})$.

Ορισμός 2.10 *Λέμε ότι μια απονομή αλήθειας V* ικανοποιεί *τον προτασιακό τύπο φ αν $\bar{V}(\varphi) = \mathsf{T}$.*

Ας υποθέσουμε τώρα ότι Σ είναι ένα σύνολο προτασιακών τύπων (άπειρο ή πεπερασμένο) και ότι ϕ είναι επίσης ένας προτασιακός τύπος.

Ορισμός 2.11 *Το Σ* ταυτολογικά συνεπάγεται *τον ϕ (και γράφουμε $\Sigma \models \phi$) αν κάθε απονομή αλήθειας που ικανοποιεί όλους τους τύπους στο Σ ικανοποιεί και τον ϕ.*

Ο ορισμός αυτός αντανακλά το αίσθημα που έχουμε να θεωρούμε ότι ένα συμπέρασμα (το ϕ) έπεται από ένα σύνολο υποθέσεων (το Σ) αν η παραδοχή ότι οι υποθέσεις είναι αληθινές εξασφαλίζει ότι και το συμπέρασμα είναι αληθές. Ορισμένες ειδικές περιπτώσεις του $\Sigma \models \phi$ αξίζει να μνημονευτούν. Ας είναι το Σ το κενό σύνολο $\emptyset$. Παρατηρούμε ότι είναι *πάντα* αλήθεια ότι κάθε απονομή αλήθειας ικανοποιεί όλα τα μέλη του Σ. (Γιατί;). Άρα όταν έχουμε $\emptyset \models \phi$, αυτό σημαίνει ότι *κάθε* απονομή αλήθειας ικανοποιεί τον ϕ. Σ' αυτήν την περίπτωση λέμε ότι ο ϕ είναι *ταυτολογία* και γράφουμε $\models \phi$. Άλλη ειδική περίπτωση είναι όταν καμία απονομή αλήθειας δεν ικανοποιεί όλα μαζί τα μέλη του Σ. Τότε ισχύει (δηλαδή σ' αυτήν την περίπτωση είναι αληθές) το $\Sigma \models \phi$. Αυτό μπορούμε να το δούμε με το να φανταστούμε τις περιπτώσεις που θα μπορούσε το $\Sigma \models \phi$ να μην είναι αληθινό. Θα πρέπει να υπάρχει μια απονομή που θα ικανοποιούσε όλους τους τύπους του Σ αλλά δεν θα ικανοποιούσε το ϕ. Αλλά κάτι τέτοιο είναι αδύνατο αφού το Σ δεν ικανοποιείται από καμία απονομή. Άρα τελικά το $\Sigma \models \phi$ πρέπει να είναι αληθές. Π.χ. $\Sigma = \{\varphi, \neg\varphi\} \models \psi$. Αν το Σ είναι μονομελές δηλαδή $\Sigma = \{\psi\}$ για κάποιο ψ, τότε αντί για $\{\psi\} \models \phi$ γράφουμε $\psi \models \phi$. Αν έχουμε $\psi \models \phi$ και $\phi \models \psi$, λέμε ότι οι ψ και ϕ είναι *ταυτολογικά ισοδύναμοι* και γράφουμε $\psi \models\,\dashv \phi$.

Π.χ. $\neg(\varphi \wedge \psi) \models\,\dashv \neg\varphi \vee \neg\psi$.

Εξ ορισμού, η ερώτηση αν ένας προτασιακός τύπος ϕ είναι ταυτολογία ή όχι συναρτάται με όλες τις απονομές αλήθειας, οι οποίες είναι άπειρες. Το θεώρημα 2.9 όμως μας λέει ότι μόνον οι συνδυασμοί των αληθοτιμών που αντιστοιχούν στις μεταβλητές $B_1, \ldots, B_n$ που εμφανίζονται στον ϕ πρέπει να ληφθούν υπόψη. Για n τιμές αντιστοιχούν 2^n διαφορετικοί συνδυασμοί (απονομές) τιμών αληθείας. Σε κάθε μία από αυτές τις περιπτώσεις η τιμή για τον ϕ μπορεί να υπολογιστεί αποτελεσματικά. Οι τιμές του ϕ για όλες τις 2^n περιπτώσεις συγκροτούν αυτό που ονομάζουμε *αληθοπίνακα* του ϕ. Προσπαθήστε να εξακριβώστε με τη μέθοδο του αληθοπίνακα ότι ο τύπος

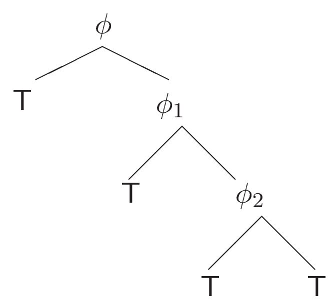
$$\phi = (A \wedge B \to C) \wedge (A \to B) \to (A \to C)$$

είναι ταυτολογία. Ο αλγόριθμος του αληθοπίνακα λειτουργεί βέβαια πάντα αλλά μπορούμε να παρουσιάσουμε κάποιον άλλον αλγόριθμο που είναι πιο αποτελεσματικός.

Ο αλγόριθμος αυτός δουλεύει ως εξής: Πάρτε μία προτασιακή μεταβλητή του ϕ έστω A και αντικαταστήστε τη με το γράμμα T. Τότε θα προκύψουν «εκφράσεις» της μορφής $B \wedge \mathsf{T}$, $\mathsf{T} \wedge B$, $\mathsf{T} \to C$ κ.ο.κ. Όλες οι δυνατές μορφές εκφράσεων που μπορεί να προκύψουν φαίνονται στον παρακάτω πίνακα. Αυτές οι εκφράσεις θα αντικατασταθούν με τις εκφράσεις που βρίσκονται στο δεξιό μέρος του πίνακα, οπότε θα προκύψει ένας τύπος της γλώσσας που δεν θα περιέχει τη μεταβλητή A. Το ίδιο θα γίνει αντικαθιστώντας το A με την τιμή F. Θα επαναλάβουμε τη διαδικασία έως ότου εξαντληθούν όλες οι προτασιακές μεταβλητές του ϕ. Στο δέντρο που θα σχηματιστεί με την εκτέλεση αυτής της διαδικασίας θα πρέπει σε όλα τα τερματικά φύλλα να υπάρχει το σύμβολο T. Αλλιώς δεν θα πρόκειται για ταυτολογία.

$\neg\mathsf{T}$	F
$\neg\mathsf{F}$	T
$D \wedge \mathsf{T}$	D
$\mathsf{T} \wedge D$	D
$D \wedge \mathsf{F}$	F
$\mathsf{F} \wedge D$	F
$D \vee \mathsf{T}$	T
$\mathsf{T} \vee D$	T
$D \vee \mathsf{F}$	D
$\mathsf{F} \vee D$	D
$D \rightarrow \mathsf{T}$	T
$\mathsf{T} \rightarrow D$	D
$D \rightarrow \mathsf{F}$	$\neg D$
$\mathsf{F} \rightarrow D$	T

Το δέντρο που αντιστοιχεί στον έλεγχο του ϕ σύμφωνα με τους ανωτέρω κανόνες είναι το εξής:



όπου με $A = \mathsf{F}$ στο ϕ έχει προκύψει το T και με $A = \mathsf{T}$ έχει προκύψει το $\phi_1 \equiv (B \rightarrow C) \wedge B \rightarrow C$. Στη συνέχεια, με $B = \mathsf{F}$ στο ϕ_1 έχει προκύψει το T και με $B = \mathsf{T}$ έχει προκύψει το $\phi_2 \equiv C \rightarrow C$. Στη συνέχεια, με $C = \mathsf{F}$ στο ϕ_2 έχει προκύψει το T και με $C = \mathsf{T}$ επίσης το T.

Είναι χρήσιμο τώρα να καταγράψουμε μερικούς από τους βασικούς νόμους ή ισοδυναμίες της προτασιακής λογικής. Η απόδειξή τους επαφίεται στον αναγνώστη.

1. Προσεταιριστική, αντιμεταθετική ιδιότητα για τα $\wedge, \vee, \leftrightarrow$.

   Π.χ. $\phi \wedge (\psi \wedge \tau) \models\dashv (\phi \wedge \psi) \wedge \tau, \phi \vee \psi \models\dashv \psi \vee \phi$ κλπ.

2. Επιμεριστικοί νόμοι:

$$\begin{array}{lcl} (\varphi \wedge (\psi \vee \tau)) & \models\dashv & ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \tau)) \\ (\varphi \vee (\psi \wedge \tau)) & \models\dashv & ((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \tau)) \end{array}$$

3. Αρνηση:

$(\neg(\neg\varphi)) \models\,\dashv \varphi$
$\neg(\varphi \to \psi) \models\,\dashv (\varphi \wedge \neg\psi)$
$\neg(\varphi \leftrightarrow \psi) \models\,\dashv ((\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\varphi \wedge \psi))$
$\left.\begin{array}{l} \neg(\varphi \wedge \psi) \models\,\dashv (\neg\varphi \vee \neg\psi) \\ \neg(\varphi \vee \psi) \models\,\dashv (\neg\varphi \wedge \neg\psi) \end{array}\right\}$ Νόμοι του De Morgan
$\models (\varphi \vee \neg\varphi)$ Αρχή του αποκλειομένου τρίτου
$\models \neg(\varphi \wedge (\neg\varphi))$
$(\varphi \to \psi) \models\,\dashv ((\neg\psi) \to (\neg\varphi))$ Αντιστροφοαντίθετη

Λήμμα 2.12 *Αν ισχύουν $\phi \models\,\dashv \phi'$ και $\psi \models\,\dashv \psi'$, τότε*

1. $\neg\phi \models\,\dashv \neg\phi'$.
2. $\phi \wedge \psi \models\,\dashv \phi' \wedge \psi'$.
3. $\phi \vee \psi \models\,\dashv \phi' \vee \psi'$.
4. $\phi \to \psi \models\,\dashv \phi' \to \psi'$.

Θεώρημα 2.13 *Αν $\chi \models\,\dashv \psi$ και ϕ' προκύπτει από τον ϕ με την αντικατάσταση σ' αυτόν κάποιων (όχι αναγκαστικά όλων) εμφανίσεων του χ από το ψ τότε $\phi \models\,\dashv \phi'$.*

Απόδειξη Με επαγωγή στον ϕ. □

Θεώρημα 2.14 (Δυϊκότητα) *Έστω φ προτασιακός τύπος για την κατασκευή του οποίου έχουν χρησιμοποιηθεί ως σύμβολα συνδέσμων μόνον τα $\wedge, \vee$ και $\neg$. Έστω φ^* ο προτασιακός τύπος που προκύπτει αν στον φ εναλλάξουμε τα $\wedge$ και $\vee$ και αντικαταστήσουμε κάθε προτασιακή μεταβλητή A με το $\neg A$. Τότε $\varphi \models\,\dashv \neg\varphi^*$.*

Απόδειξη Με επαγωγή στον ϕ. Αν $\phi \equiv A$, A προτασιακή μεταβλητή, τότε $\phi^* \equiv \neg A$ και βέβαια $\phi \equiv A \models\,\dashv \neg\phi^* \equiv \neg\neg A$.

Αν π.χ. $\phi \equiv \phi_1 \wedge \phi_2$, τότε $\phi^* \equiv \phi_1^* \vee \phi_2^*$ και από την επαγωγική υπόθεση $\phi_1 \equiv \neg\phi_1^*$ και $\phi_2 \equiv \neg\phi_2^*$. Οπότε από λήμμα 2.12

$$\phi \equiv \phi_1 \wedge \phi_2 \models\,\dashv \neg\phi_1^* \wedge \neg\phi_2^* \models\,\dashv \neg(\phi_1^* \vee \phi_2^*) \equiv \neg\phi^*.$$

Παρομοίως και για τις άλλες περιπτώσεις. □

2.6 Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι κανένας από τούς δύο προτασιακούς τύπους δεν συνεπάγεται ταυτολογικά τον άλλο:
$(\varphi \wedge ((\psi \to \tau) \wedge (\tau \to \psi)))$ και $((\varphi \wedge (\psi \wedge \tau)) \vee ((\neg\varphi) \wedge ((\neg\psi) \wedge (\neg\tau))))$

2. Είναι ο $(((\varphi \to \psi) \to \varphi) \to \varphi)$ ταυτολογία;

3. (i) $\Sigma \cup \{\varphi\} \models \psi \iff \Sigma \models (\varphi \to \psi)$

(ii) $\sigma \models\,\dashv \tau \iff \models (\sigma \to \tau) \wedge (\tau \to \sigma)$

2.7 Προτασιακοί σύνδεσμοι

Μέχρι τώρα έχουμε χρησιμοποιήσει τέσσερις προτασιακούς (ή λογικούς) συνδέσμους. Αναρωτιόμαστε αν θα κερδίζαμε τίποτα προσθέτοντας κι άλλους συνδέσμους ή θα χάναμε παραλείποντας μερικούς. Θα προσπαθήσουμε τέτοιου είδους ερωτήσεις να τις κάνουμε ακριβείς ώστε να μπορέσουμε να δώσουμε και ακριβείς απαντήσεις. Ας θεωρήσουμε το ακόλουθο παράδειγμα. Έστω ότι επεκτείνουμε τη γλώσσα μας προσθέτοντας έναν τριθέσιο σύνδεσμο #. Δηλαδή τώρα αν φ, ψ, τ είναι προτασιακοί τύποι, ο $(\#\varphi\psi\tau)$ θα είναι προτασιακός τύπος. Πρέπει να δώσουμε μια ερμηνεία σ' αυτό το σύμβολο. Δηλαδή να υπολογίζουμε την τιμή $\bar{V}((\#\varphi\psi\tau))$, όπου V είναι μια απονομή αλήθειας, όταν είναι γνωστές οι τιμές $\bar{V}(\varphi), \bar{V}(\psi), \bar{V}(\tau)$. Ορίζουμε $\bar{V}((\#\varphi\psi\tau))$ να είναι ό,τι και η πλειοψηφία των $\bar{V}(\varphi)$, $\bar{V}(\psi)$, $\bar{V}(\tau)$, π.χ. αν $\bar{V}(\varphi) = \bar{V}(\psi) = \mathsf{T}$ και $\bar{V}(\tau) = \mathsf{F}$, τότε $\bar{V}((\#\varphi\psi\tau)) = \mathsf{T}$. Ισχυριζόμαστε ότι με την επέκταση αυτή που κάναμε στο σύνολο των συνδέσμων μας δεν κερδίσαμε τίποτα, γιατί κάθε προτασιακός τύπος στην επεκτεταμένη καινούργια μας γλώσσα είναι ταυτολογικά ισοδύναμος με έναν προτασιακό τύπο της αρχικής μας γλώσσας. Κι αυτό γιατί $(\#\varphi\psi\tau)$ είναι ταυτολογικά ισοδύναμος με τον $((\varphi\wedge\psi)\vee(\varphi\wedge\tau)\vee(\psi\wedge\tau))$.

Ορισμός 2.15 *Κάθε συνάρτηση $\mathcal{B} : \{\mathsf{T},\mathsf{F}\}^n \to \{\mathsf{T},\mathsf{F}\}$ ονομάζεται* συνάρτηση Boole *n θέσεων ή (λογικός, προτασιακός)* σύνδεσμος *n θέσεων*[2]*. Εδώ $\{\mathsf{T},\mathsf{F}\}^n = \underbrace{\{\mathsf{T},\mathsf{F}\} \times \ldots \times \{\mathsf{T},\mathsf{F}\}}_{n}$. Επιτρέπουμε και στις τιμές* T *και* F *να είναι συναρτήσεις Boole με 0 θέσεις. Σ' αυτήν την περίπτωση συνήθως γράφουμε $\mathcal{T}$ και $\mathcal{F}$.*

Η έννοια της συνάρτησης Boole γενικεύει την ιδέα του συνδέσμου. Όταν ερμηνεύουμε έναν σύνδεσμο λέμε ποιοι συνδυασμοί τιμών αλήθειας (διατεταγμένες n-άδες αληθοτιμών) δίνουν ποιες τιμές αλήθειας (π.χ. ο αληθοπίνακας). Κάθε προτασιακός τύπος ορίζει μια συνάρτηση Boole.

Π.χ. θεωρούμε τον $(A_1 \wedge A_2) \vee A_1$. Παίρνουμε την εξής συνάρτηση Boole.

A_1	A_2	$(A_1 \wedge A_2) \vee A_1$
T	T	T
T	F	T
F	T	F
F	F	F

Και γενικότερα:

Ορισμός 2.16 *Έστω ϕ προτασιακός τύπος που οι προτασιακές μεταβλητές που περιέχει είναι οι $B_1, \ldots, B_k$. Ορίζουμε τη συνάρτηση Boole με n θέσεις $\mathcal{B}_\phi$ ως ακολούθως. $\mathcal{B}_\phi(x_1, \ldots, x_n) = \bar{V}(\phi)$, όπου $x_i \in \{\mathsf{T},\mathsf{F}\}$ και V είναι η απονομή αλήθειας με $V(B_i) = x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Λέμε ότι η $\mathcal{B}_\phi$ είναι η συνάρτηση Boole που πραγματοποιείται από τον ϕ.*

[2]Λέμε επίσης n-θέσια συνάρτηση ή n-θέσιος σύνδεσμος.

Σημείωση: Στον ανωτέρω ορισμό η συνάρτηση $\mathcal{B}_\phi$ που ορίζεται από το ϕ εξαρτάται από τη διάταξη $B_1, \ldots, B_k$ των προτασιακών μεταβλητών που εμφανίζονται στο ϕ, π.χ. αν $\phi \equiv (A_2 \to A_5)$ και έχουμε $B_1 = A_2$ και $B_2 = A_5$, τότε $\mathcal{B}_\phi(\mathsf{T}, \mathsf{F}) = \mathsf{F}$, ενώ αν πάρουμε $B_1 = A_5$ και $B_2 = A_2$ έχουμε $\mathcal{B}_\phi(\mathsf{T}, \mathsf{F}) = \mathsf{T}$. Συνήθως θα πραγματοποιούμε τη $\mathcal{B}_\phi$ θεωρώντας ότι οι προτασιακές μεταβλητές του ϕ έχουν διαταχθεί κατά αύξοντα αριθμό δείκτη, δηλαδή η $B_1, \ldots, B_k$ είναι η ακολουθία $A_{j_1}, \ldots, A_{j_k}$ με $j_1 < j_2 < \cdots < j_k$.

Θεώρημα 2.17 *Έστω $\mathcal{G}$ μια συνάρτηση Boole με n θέσεις ($n \geq 1$). Τότε υπάρχει ένας προτασιακός τύπος ϕ στη γλώσσα του προτασιακού λογισμού έτσι ώστε $\mathcal{G} = \mathcal{B}_\phi$, δηλαδή $\mathcal{G}$ πραγματοποιείται από τόν ϕ.*

Απόδειξη 1η περίπτωση: πεδίο τιμών της $\mathcal{G}$ είναι το σύνολο $\{\mathsf{F}\}$, δηλαδή δίνει σταθερά την τιμή F. Τότε

$$\phi \equiv (A_1 \wedge \neg A_1) \wedge \ldots \wedge (A_n \wedge \neg A_n)$$

2η περίπτωση: Η 1η περίπτωση δεν ισχύει, δηλαδή υπάρχουν k περιπτώσεις στις οποίες η $\mathcal{G}$ παίρνει την τιμή T, όπου $0 < k \leq 2^n$. Κάνουμε μια λίστα αυτών των περιπτώσεων.

$$\left.\begin{array}{ll} x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n} & (1) \\ x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n} & (2) \\ \vdots & \vdots \\ x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kn} & (k) \end{array}\right\}$$

Έστω $A_1, \ldots, A_n$ προτασιακές μεταβλητές. Ορίζουμε

$$\beta_{ij} = \begin{cases} A_j & \text{αν } x_{ij} = \mathsf{T} \\ (\neg A_j) & \text{αν } x_{ij} = \mathsf{F} \end{cases}$$

και $\gamma_i = \beta_{i1} \wedge \ldots \wedge \beta_{in}$ και $\phi = \gamma_1 \vee \ldots \vee \gamma_k$.
Ισχυριζόμαστε ότι $\mathcal{G} = \mathcal{B}_\phi$. Πότε η γ_i γίνεται αληθής; Όταν *όλα* τα $\beta_{i1}, \ldots, \beta_{in}$ είναι αληθή. Τα β_{ij} όμως είναι κατασκευασμένα έτσι ώστε να παίρνουν την τιμή T *μόνον* όταν τα A_j πάρουν τις τιμές που έχουμε στον πίνακα. Ένας οποιοσδήποτε άλλος συνδυασμός εκτός πίνακα κάνει ένα από τα β_{ij} ψευδές, άρα όλα τα γ_i ψευδή, άρα τη ϕ ψευδή. Όλα αυτά φαίνονται καθαρά αν εξετάσουμε το ακόλουθο παράδειγμα.

Έστω $\mathcal{G}$ ως ακολούθως:

$$\begin{array}{c} \mathcal{G}(\mathsf{T},\mathsf{T},\mathsf{T})=\mathsf{T} \\ \mathcal{G}(\mathsf{T},\mathsf{T},\mathsf{F})=\mathsf{F} \\ \mathcal{G}(\mathsf{T},\mathsf{F},\mathsf{T})=\mathsf{F} \\ \mathcal{G}(\mathsf{T},\mathsf{F},\mathsf{F})=\mathsf{T} \\ \mathcal{G}(\mathsf{F},\mathsf{T},\mathsf{T})=\mathsf{F} \\ \mathcal{G}(\mathsf{F},\mathsf{T},\mathsf{F})=\mathsf{T} \\ \mathcal{G}(\mathsf{F},\mathsf{F},\mathsf{T})=\mathsf{T} \\ \mathcal{G}(\mathsf{F},\mathsf{F},\mathsf{F})=\mathsf{F} \end{array}$$

Τότε στις τριάδες των αληθοτιμών που αντιστοιχεί τιμή T δημιουργούμε τους εξής τύπους:

$$\left.\begin{array}{cccc} \mathsf{F} & \mathsf{F} & \mathsf{T} & (\neg A_1) \wedge (\neg A_2) \wedge A_3 \\ \mathsf{F} & \mathsf{T} & \mathsf{F} & (\neg A_1) \wedge A_2 \wedge (\neg A_3) \\ \mathsf{T} & \mathsf{F} & \mathsf{F} & A_1 \wedge (\neg A_2) \wedge (\neg A_3) \\ \mathsf{T} & \mathsf{T} & \mathsf{T} & A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \end{array}\right\} \text{ αυτά είναι τα } \gamma_i$$

Τότε $\phi = ((\neg A_1) \wedge (\neg A_2) \wedge A_3) \vee ((\neg A_1) \wedge A_2 \wedge (\neg A_3)) \vee (A_1 \wedge (\neg A_2) \wedge (\neg A_3)) \vee (A_1 \wedge A_2 \wedge A_3)$. □

Το συμπέρασμα του πιο πάνω θεωρήματος είναι ότι έχουμε αρκετούς (στην πραγματικότητα πιο πολλούς απ' ό,τι χρειαζόμαστε) συνδέσμους στη διάθεσή μας. Γιατί, αν υποθέσουμε ότι στη γλώσσα μας εισάγουμε κάποιους καινούργιους «εξωτικούς» συνδέσμους (όπως τον τριθέσιο #), τότε κάθε πρόταση ψ στην καινούργια γλώσσα θα πραγματοποιεί μια συνάρτηση Boole, $\mathcal{B}_\psi$. Αλλά απ' το πιο πάνω θεώρημα η $\mathcal{B}_\psi$ θα πραγματοποιείται από μια πρόταση ϕ στην αρχική μας γλώσσα δηλαδή $\mathcal{B}_\psi = \mathcal{B}_\phi$. Πράγμα που μας λέει ότι φ και ψ είναι ταυτολογικά ισοδύναμες. (Γιατί;)

Ορισμός 2.18 Διαζευκτική κανονική μορφή *καλείται κάθε μορφή* $\gamma_1 \vee \ldots \vee \gamma_k$ *όπου* $\gamma_i = \beta_{i_1} \wedge \ldots \wedge \beta_{i_{n_i}}$ *και κάθε* β_{i_j} *είναι μία προτασιακή μεταβλητή ή η άρνηση μιας προτασιακής μεταβλητής.*

Αν προσέξουμε την απόδειξη του θεωρήματος 2.17, βλέπουμε ότι ο τύπος τ που κατασκευάσαμε είναι σε διαζευκτική κανονική μορφή.

Θεώρημα 2.19 *Για κάθε προτασιακό τύπο μπορούμε να βρούμε έναν ταυτολογικά ισοδύναμο σε διαζευκτική κανονική μορφή.*

Απόδειξη Έστω ο προτασιακός τύπος ψ. Τότε υπάρχει τύπος ϕ σε διαζευκτική κανονική μορφή που πραγματοποιεί τη $\mathcal{B}_\psi$. Δηλαδή $\mathcal{B}_\psi = \mathcal{B}_\phi$. Αλλά τότε ψ και ϕ είναι ταυτολογικά ισοδύναμοι. □

Ορισμός 2.20 Συζευκτική κανονική μορφή *καλείται κάθε μορφή* $\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_k$ *όπου* $\gamma_i = \beta_{i_1} \vee \ldots \vee \beta_{i_{n_i}}$ *και κάθε* β_{i_j} *είναι μία προτασιακή μεταβλητή ή η άρνηση μιας προτασιακής μεταβλητής.*

Θεώρημα 2.21 *Για κάθε προτασιακό τύπο μπορούμε να βρούμε έναν ταυτολογικά ισοδύναμο σε συζευκτική κανονική μορφή.*

Απόδειξη Στο παράδειγμα της απόδειξης του θεωρήματος 2.17 παίρνουμε τις γραμμές που αντιστοιχούν σε τιμές F. Σε κάθε τέτοια πρίπτωση ορίζουμε τη διάζευξη των αντίστοιχων προτασιακών μεταβλητών ή των αρνήσεών τους ώστε αυτή να γίνεται ψευδής μόνο στην περίπτωση του συνδυασμού αληθοτιμών της γραμμής αυτής. Στη συνέχεια παίρνουμε τη σύζευξη αυτών των διαζεύξεων και οδηγούμαστε στο ζητούμενο. □

Κάθε προτασιακός τύπος και η άρνησή του καλούνται *συμπληρωματικοί* τύποι, ο καθένας εξ αυτών είναι το *συμπλήρωμα* του άλλου. Οι προτασιακές μεταβλητές και οι αρνήσεις προτασιακών μεταβλητών λέγονται *λεκτικά*. Μπορούμε τότε να δούμε ότι ισχύει.

Θεώρημα 2.22 *Μια διαζευκτική κανονική μορφή είναι αντίφαση ανν στην κάθε σύζευξη (από τις διαζεύξεις που τη συγκροτούν) εμφανίζονται συμπληρωματικά λεκτικά.*

Μια συζευκτική κανονική μορφή είναι ταυτολογία ανν στην κάθε διάζευξη (από τις συζεύξεις που τη συγκροτούν) εμφανίζονται συμπληρωματικά λεκτικά.

Άρα, αν η διαζευκτική ή η συζευκτική κανονική μορφή ενός τύπου έχει μια από τις παραπάνω μορφές, τότε ο προτασιακός τύπος θα είναι αντίστοιχα αντίφαση ή ταυτολογία.

Θα δώσουμε τώρα μερικούς κανόνες μετασχηματισμού με την εφαρμογή των οποίων ένας οποιοσδήποτε προτασιακός τύπος μπορεί να μετασχηματιστεί στον ισοδύναμο σε κανονική μορφή. Επαφίεται στον αναγνώστη να περιγράψει το πώς με βάση αυτούς τους μετασχηματισμούς-ισοδυναμίες μπορούμε να οδηγηθούμε στην επιθυμητή κανονική μορφή.

1. $A \to B \models\,\dashv \neg A \vee B$.
2. $A \leftrightarrow B \models\,\dashv (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$.
3. $\neg(A \leftrightarrow B) \models\,\dashv (\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$.
4. $\neg\neg A \models\,\dashv A$.
5. $\neg(A_1 \vee \cdots \vee A_n \models\,\dashv \neg A_1 \wedge \cdots \wedge \neg A_n$.
6. $\neg(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \models\,\dashv \neg A_1 \vee \cdots \vee \neg A_n$.
7. $A \wedge (B_1 \vee \cdots \vee B_n) \models\,\dashv (A \wedge B_1) \vee \cdots \vee (A \wedge B_n)$.
   $(B_1 \vee \cdots \vee B_n) \wedge A \models\,\dashv (B_1 \wedge A) \vee \cdots \vee (B_n \wedge A)$.
8. $A \vee (B_1 \wedge \cdots \wedge B_n) \models\,\dashv (A \vee B_1) \wedge \cdots \wedge (A \vee B_n)$.
   $(B_1 \wedge \cdots \wedge B_n) \vee A \models\,\dashv (B_1 \vee A) \wedge \cdots \wedge (B_n \vee A)$.

Επίσης καταγράφονται και κάποιοι κανόνες απλοποίησης.

- $A \vee A \models\,\dashv A$.
- $A \wedge A \models\,\dashv A$.
- $A \vee (A \wedge A) \models\,\dashv A$.
- $A \wedge (A \vee A) \models\,\dashv A$.
- $A \vee (B \wedge \neg B \wedge C) \models\,\dashv A$.
- $A \wedge (B \vee \neg B \vee C) \models\,\dashv A$.

2.8 Επάρκεια συνδέσμων

Ορισμός 2.23 *Έστω $\mathcal{S}$ ένα σύνολο συνδέσμων, π.χ. $\mathcal{S} = \{\wedge, \vee, \neg\}$. Το $\mathcal{S}$ λέγεται επαρκές αν κάθε συνάρτηση Boole μπορεί να πραγματοποιηθεί από έναν προτασιακό τύπο για το κτίσιμο του οποίου έχουμε μεταχειριστεί συνδέσμους μόνον από το $\mathcal{S}$.*

Είδαμε ότι κάθε συνάρτηση Boole πραγματοποιείται από έναν προτασιακό τύπο στον οποίο εμφανίζονται μόνον οι σύνδεσμοι $\wedge, \vee$ και $\neg$ (διαζευκτική κανονική μορφή). Άρα το σύνολο $\{\neg, \wedge, \vee\}$ και βέβαια, κατά μείζονα λόγο, το σύνολο $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$ της γλώσσας μας είναι επαρκές. Μπορούμε όμως να βελτιώσουμε το αποτέλεσμα:

Θεώρημα 2.24 *Τα σύνολα $\{\neg, \wedge\}$ και $\{\neg, \vee\}$ είναι επαρκή.*

Απόδειξη Αφού το $\{\neg, \wedge, \vee\}$ είναι επαρκές, για να αποδείξουμε ότι το $\{\neg, \wedge\}$ είναι επαρκές αρκεί να εκφράσουμε το σύνδεσμο $\vee$ συναρτήσει των υπολοίπων. Έχουμε

$$(\varphi \vee \psi) \models \dashv \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi).$$

Άρα κάθε χρήση του $\varphi \vee \psi$ μπορούμε να την αντικαταστήσουμε με το ισοδύναμό της. Για να αποδείξουμε ότι $\{\neg, \vee\}$ είναι επαρκές παρατηρούμε ότι $(\varphi \wedge \psi) \models \dashv \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$. $\square$

Άσκηση: $\{\wedge, \rightarrow\}$ δεν είναι επαρκές (υπόδειξη: Δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί η άρνηση).

Για κάθε φυσικό αριθμό n, υπάρχουν 2^{2^n} συναρτήσεις Boole ή σύνδεσμοι n θέσεων.

Σύνδεσμοι 0 *θέσεων*: Συμβατικά εξετάζουμε και την περίπτωση $n = 0$. Έχουμε δύο τέτοιους σύνδεσμους, τον $\mathcal{T}$ και τον $\mathcal{F}$. Μπορούμε να τους μεταφέρουμε και στη γλώσσα θεωρώντας τους σαν προτασιακούς τύπους ατομικούς. Τότε όμως για κάθε απονομή αλήθειας V πρέπει να έχουμε πάντα ότι $V(\mathcal{T}) = \mathsf{T}$ και $V(\mathcal{F}) = \mathsf{F}$.

Π.χ. ο τύπος $A \rightarrow \mathcal{F}$ είναι ταυτολογικά ισοδύναμος με τον $(\neg A)$.

Σύνδεσμοι 1 *θέσης*: Υπάρχουν 4. Μόνον ένας, η άρνηση, έχει ενδιαφέρον.

Σύνδεσμοι 2 *θέσεων*: Υπάρχουν $2^{2^2} = 16$. Εκτός των $\wedge, \vee, \rightarrow$ οι άλλοι είναι:

Σύμβολο	Ισοδυναμία	Παρατηρήσεις
	$\mathcal{T}$	σταθερός με τιμή T
	$\mathcal{F}$	σταθερός με τιμή F
	A	πρώτη προβολή
	B	δεύτερη προβολή
	$\neg A$	
	$\neg B$	
$A \leftrightarrow B$	$(A \to B) \wedge (B \to A)$	ισοδυναμία
$A \leftarrow B$	$B \to A$	αντίστροφη συνεπαγωγή
$A + B$	$(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$	αποκλειστική διάζευξη (xor)
$A \downarrow B$	$\neg(A \vee B)$	ούτε A ούτε B (nor)
$A \mid B$	$\neg(A \wedge B)$	ή όχι A ή όχι B (nand)
$A < B$	$(\neg A) \wedge B$	F $<$ T (διάταξη)
$A > B$	$A \wedge (\neg B)$	T $>$ F

Θεώρημα 2.25 *Τα $\{\mid\}$ και $\{\downarrow\}$ είναι επαρκή.*

Απόδειξη: Οι αληθοπίνακες των $\mid$ και $\downarrow$ είναι:

A	B	$A\mid B$	$A \downarrow B$
T	T	F	F
T	F	T	F
F	T	T	F
F	F	T	T

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \neg A &\models\Dashv (A\mid A) \\ A \vee B &\models\Dashv ((\neg A)\mid(\neg B)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg A &\models\Dashv (A \downarrow A) \\ A\mid B &\models\Dashv \neg((\neg A) \downarrow (\neg B)) \end{aligned}$$

Προκύπτει ότι το σύνολο $\{\mid\}$ είναι επαρκές διότι μέσω του $\mid$ εκφράζονται οι σύνδεσμοι $\neg$ και $\vee$, που συγκροτούν επαρκές σύνολο συνδέσμων. Επίσης επειδή το $\neg$ εκφράζεται μέσω του $\downarrow$ και το $\mid$ μέσω των $\neg$ και $\downarrow$ προκύπτει ότι το σύνολο $\downarrow$ είναι επαρκές, διότι εκφράζει τους συνδέσμους του επαρκούς συνόλου $\{\neg, \mid\}$.

2.9 Ασκήσεις

1. Αποδείξτε ότι $|$ και $\downarrow$ είναι οι μόνοι σύνδεσμοι δύο θέσεων που είναι πλήρεις από μόνοι τους.

2. Μία πρόταση που περιέχει μόνο τον σύνδεσμο $\leftrightarrow$ είναι ταυτολογία αν και μόνον αν κάθε προτασιακό σύμβολο απαντάται έναν άρτιο αριθμό φορών.

3. Οι σύνδεσμοι δύο θέσεων είναι 16 τον αριθμό. Απ' αυτούς μόνον οι 10 είναι πραγματικά διθέσιοι. Οι υπόλοιποι είναι είτε ουσιωδώς μονοθέσιοι (προβολές, $\neg A$, $\neg B$) ή 0 θέσεων (σταθεροί). Από τους 10 ξέρουμε ότι οι $|$ και $\downarrow$ αποτελούν από μόνοι τους (και μόνον αυτοί) επαρκή σύνολα. Από τους 8 που μας μένουν μπορούμε να σχηματίσουμε 28 ζευγάρια. Η ερώτηση είναι: πόσα απ' αυτά τα ζευγάρια αποτελούν επαρκή σύνολα;
(Υπόδειξη: Αποδείξτε ότι $\{\wedge, \vee, \to, \leftarrow, \leftrightarrow\}$ και $\{\wedge, \vee, <, >, +\}$ δεν είναι επαρκή σύνολα. Άρα αποκλείονται 19 ζεύγη! Μετά αποδείξτε ότι $\{\to, \mathcal{F}\}$, $\{\leftarrow, \mathcal{F}\}$ είναι επαρκή και άρα συμπεράνετε ότι $\{\to, <\}$, $\{\to, >\}$, $\{\to, +\}$, $\{\leftarrow, <\}$, $\{\leftarrow, >\}$, $\{\leftarrow, +\}$ είναι επαρκή. Κατόπιν αποδείξτε ότι $\{<, \mathcal{T}\}$, $\{>, \mathcal{T}\}$ είναι επαρκή και συμπεράνετε ότι $\{<, \leftrightarrow\}$, $\{>, \leftrightarrow\}$ είναι επαρκή. (Εδώ $\varphi \to \psi \models\, \dashv \mathcal{T} > (\varphi > \psi)$ και $\{\to, <\}$ επαρκές. Επίσης $\mathcal{T} \models\, \dashv (A \leftrightarrow A)$.) Άρα μας μένει μόνο ένα ζευγάρι να ασχοληθούμε: το $\{+, \leftrightarrow\}$. Αποδείξτε τώρα ότι:
Πρόταση Το $\{\neg, +, \leftrightarrow\}$ δεν είναι επαρκές.)

4. Βρίσκεστε στη χώρα των θαυμάτων όπου όλοι οι κάτοικοι λένε είτε πάντα αλήθεια (οι «καλοί») ή πάντα ψέμματα (οι «κακοί»). Κατευθύνεστε προς το μαγεμένο κάστρο ώσπου ξαφνικά ο δρόμος σχηματίζει μια διχάλα. Εκεί βρίσκεται ένας κάτοικος που δεν ξέρετε αν είναι καλός ή κακός. Με την προϋπόθεση ότι αυτός θα σας απαντήσει σε μια μόνον ερώτηση και μόνο με ένα ναι ή ένα όχι, τι ερώτηση θα του κάνετε για να δείτε ποιος από τους δύο δρόμους της διχάλας πάει στο κάστρο.
(Υπόδειξη: Θεωρήστε τις προτάσεις: φ να σημαίνει «λες την αλήθεια» και ψ «αυτός ο δρόμος πάει στο κάστρο». Σχηματίστε έναν κατάλληλο αληθοπίνακα ώστε η πραγματοποίησή του με βάση τις φ και ψ να σας δίνει την κατάλληλη ερώτηση.)

5. Αποδείξτε ότι κανένας από τους $\varphi \leftrightarrow (\psi \leftrightarrow \tau)$ και $(\varphi \wedge (\psi \wedge \tau)) \vee (\neg\varphi \wedge (\neg\psi \wedge \neg\tau))$ δεν είναι λογική συνέπεια ο ένας του άλλου.

6. Αποδείξτε ή ανταποδείξτε τα ακόλουθα:

(i) αν είτε $\Sigma \models \varphi$ ή $\Sigma \models \psi$, τότε $\Sigma \models \varphi \vee \psi$.

(ii) αν $\Sigma \models \varphi \vee \psi$, τότε είτε $\Sigma \models \varphi$ ή $\Sigma \models \psi$.

7. Αποδείξτε την ακόλουθη πρόταση γνωστή και ως *λήμμα παρεμβολής*: Αν ο προτασιακός τύπος $\varphi \rightarrow \psi$ είναι ταυτολογία ($\models \varphi \rightarrow \psi$), τότε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις αληθεύει:

(1) ο φ είναι αντιλογία ($\models \neg\varphi$),

(2) ο ψ είναι ταυτολογία ($\models \psi$),

(3) υπάρχει προτασιακός τύπος γ τέτοιος ώστε:

- κάθε προτασιακή μεταβλητή του γ εμφανίζεται και στον φ και στον ψ,
- οι $\varphi \rightarrow \gamma$, $\gamma \rightarrow \psi$ είναι ταυτολογίες ($\models \varphi \rightarrow \gamma$, $\models \gamma \rightarrow \psi$).

8. Από την απόδειξη της προηγούμενης άσκησης προκύπτει ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε τον τύπο γ όταν ξέρουμε τα φ και ψ. Έστω $\varphi \equiv ((q \rightarrow p) \vee r) \wedge ((r \rightarrow p) \vee \neg q)$ και $\psi \equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q) \vee s$. Κατασκευάστε τον γ.

9. *Θεώρημα ορισιμότητας*: Έστω $A, B, A_1, \ldots, A_k$ διακεκριμένες μεταξύ τους προτασιακές μεταβλητές και $\varphi \equiv \varphi(A, A_1, \ldots, A_k)$ ένας προτασιακός τύπος του οποίου οι προτασιακές μεταβλητές είναι μεταξύ των $A, A_1, \ldots, A_k$. Αν ο προτασιακός τύπος

$$(\varphi(A, A_1, \ldots, A_k) \wedge \varphi(B, A_1, \ldots, A_k)) \rightarrow (A \leftrightarrow B)$$

είναι ταυτολογία, τότε υπάρχει ένας προτασιακός τύπος $\gamma \equiv \gamma(A_1, \ldots, A_k)$, με προτασιακές μεταβλητές μεταξύ των $A_1, \ldots, A_k$, έτσι ώστε ο τύπος

$$\varphi(A, A_1, \ldots, A_k) \rightarrow (A \leftrightarrow \gamma)$$

να είναι ταυτολογία.
(Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε το λήμμα παρεμβολής.)

2.10 Το θεώρημα της συμπάγειας

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε το θεώρημα της συμπάγειας για τον προτασιακό λογισμό. Το θεώρημα αυτό είναι από τα σπουδαιότερα θεωρήματα της λογικής· θα δούμε πώς σχετίζεται με το θεμελιώδες θεώρημα της πληρότητας. Θα το παρουσιάσουμε εδώ στην περίπτωση του προτασιακού λογισμού διότι έτσι μπορούμε να το αποδείξουμε με απλούστερο τρόπο και να δούμε, χωρίς την παρουσία άλλων περίπλοκων στοιχείων –όπως στην περίπτωση του κατηγορηματικού λογισμού–, τις κύριες ιδέες της απόδειξης.

Ορισμός 2.26 *Έστω Σ ένα σύνολο προτασιακών τύπων. Λέμε ότι το Σ είναι ικανοποιήσιμο αν υπάρχει μια απονομή αλήθειας V τέτοια ώστε για κάθε $\sigma \in \Sigma$ έχουμε ότι $\overline{V}(\sigma) = \mathsf{T}$. Λέμε ότι το Σ είναι* πεπερασμένα ικανοποιήσιμο *(πεπ. ικαν.) αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του Σ είναι ικανοποιήσιμο.*

Θεώρημα 2.27 (θεώρημα της συμπάγειας) *Ένα σύνολο προτασιακών τύπων είναι ικανοποιήσιμο αν και μόνον αν είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο.*

Απόδειξη Το μη προφανές μέρος του θεωρήματος είναι ν' αποδείξουμε ότι αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του Σ είναι ικανοποιήσιμο τότε όλο το σύνολο είναι ικανοποιήσιμο. Θα το αποδείξουμε με διάφορα βήματα.

Ορισμός 2.28 *Ένα σύνολο προτάσεων Σ λέγεται πλήρες αν για οποιονδήποτε προτασιακό τύπο ϕ έχουμε είτε $\phi \in \Sigma$ ή $(\neg\phi) \in \Sigma$.*

Παρατηρούμε ότι αν έχουμε μία απονομή αλήθειας V τότε το σύνολο $\Sigma = \{\sigma \mid \overline{V}(\sigma) = \mathsf{T}\}$ είναι πλήρες και πεπερασμένα ικανοποιήσιμο.

Αλλά και αντιστρόφως κάθε πλήρες και πεπερασμένα ικανοποιήσιμο σύνολο είναι ικανοποιήσιμο. Για να το αποδείξουμε αυτό παρατηρούμε πρώτα ότι ισχύει το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 2.29 *Σε κάθε πλήρες και πεπερασμένα ικανοποιήσιμο σύνολο Σ ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες:*

1. $\phi \in \Sigma \;\Leftrightarrow (\neg\phi) \notin \Sigma$
2. $(\phi \wedge \psi) \in \Sigma \;\Leftrightarrow \phi \in \Sigma$ *και* $\psi \in \Sigma$
3. $(\phi \vee \psi) \in \Sigma \;\Leftrightarrow \phi \in \Sigma$ *ή* $\psi \in \Sigma$
4. $(\phi \rightarrow \psi) \in \Sigma \;\Leftrightarrow \phi \notin \Sigma$ *ή* $\psi \in \Sigma$

Απόδειξη λήμματος: Για το 1. Αν $\phi \in \Sigma$ τότε οπωσδήποτε δεν μπορούμε να έχουμε $(\neg\phi) \in \Sigma$ επειδή το Σ είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο και το σύνολο $\{\phi, \neg\phi\}$ δεν είναι ικανοποιήσιμο. Αντίστροφα, αν $\neg\phi \notin \Sigma$, τότε επειδή το Σ είναι πλήρες θα έχουμε $\phi \in \Sigma$. Για το 2. Έστω $(\phi \wedge \psi) \in \Sigma$. Τότε δεν είναι δυνατόν να έχουμε π.χ. $\neg\phi \in \Sigma$ διότι το σύνολο $\{(\phi \wedge \psi), \neg\phi\}$ δεν είναι ικανοποιήσιμο. Άρα θα είναι $\phi \in \Sigma$ επειδή το Σ είναι πλήρες. Ομοίως για το ψ. Αντίστροφα, αν έχουμε $\phi \in \Sigma$ και $\psi \in \Sigma$ δεν μπορούμε να έχουμε ότι $\neg(\phi \wedge \psi) \in \Sigma$ επειδή το Σ είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο. Άρα από πληρότητα του Σ θα έχουμε $(\phi \wedge \psi) \in \Sigma$. Ομοίως και για τις υπόλοιπες περιπτώσεις.

Με βάση αυτό το λήμμα μπορούμε να αποδείξουμε το ακόλουθο:

Λήμμα 2.30 *Κάθε πλήρες και πεπερασμένα ικανοποιήσιμο Σ είναι ικανοποιήσιμο.*

Απόδειξη λήμματος: Ορίζουμε μία απονομή αλήθειας V ως εξής:

Αν A είναι προτασιακή μεταβλητή, τότε

$$V(A) = \begin{cases} \mathsf{T} & \text{αν } A \in \Sigma \\ \mathsf{F} & \text{αν } \neg A \in \Sigma \end{cases}$$

Είναι προφανές ότι λόγω της πληρότητας του Σ για κάθε προτασιακή μεταβλητή A υπάρχει η τιμή $V(A)$, και ότι λόγω του πεπερασμένα ικανοποιήσιμου η τιμή αυτή είναι μοναδική. Δηλαδή ότι ο ορισμός της V είναι καλός.

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε με επαγωγή στους προτασιακούς τύπους ότι για κάθε τύπο ϕ ισχύει:

$$\phi \in \Sigma \Leftrightarrow \overline{V}(\phi) = \mathsf{T}$$

Για τις προτασιακές μεταβλητές η ισχύς του ανωτέρω είναι προφανής. Για τις άλλες περιπτώσεις ας εξετάσουμε την περίπτωση $\phi = \phi_1 \wedge \phi_2$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} \phi_1 \wedge \phi_2 \in \Sigma &\Leftrightarrow (\text{από προηγ. λήμμα})\ \phi_1 \in \Sigma \text{ και } \phi_2 \in \Sigma \\ &\Leftrightarrow (\text{επαγ. υπόθεση})\ \overline{V}(\phi_1) = \mathsf{T} \text{ και } \overline{V}(\phi_2) = \mathsf{T} \\ &\Leftrightarrow \overline{V}(\phi_1 \wedge \phi_2) = \mathsf{T}. \end{aligned}$$

Ομοίως για όλες τις άλλες περιπτώσεις.

Άρα λοιπόν, τελικά, αν μας δοθεί ένα σύνολο προτασιακών τύπων Σ , για να αποδείξουμε ότι είναι ικανοποιήσιμο αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι δυνατόν να επεκταθεί σε ένα σύνολο $\Sigma' \supseteq \Sigma$ ώστε Σ' να είναι πλήρες και πεπερασμένα ικανοποιήσιμο. Οπότε αρκεί να αποδείξουμε το ακόλουθο σπουδαίο λήμμα.

Λήμμα 2.31 (Lindenbaum) *Κάθε πεπερασμένα ικανοποιήσιμο σύνολο Σ μπορεί να επεκταθεί σε ένα πλήρες και πεπερασμένα ικανοποιήσιμο σύνολο $\Sigma' \supseteq \Sigma$.*

Απόδειξη: Εφόσον το σύνολο των προτασιακών μεταβλητών είναι αριθμήσιμο, το σύνολο όλων των προτασιακών τύπων μπορεί να αριθμηθεί[3]. Έστω

[3] Από τη συνολοθεωρία γνωρίζουμε ότι αν Σ είναι αριθμήσιμο, τότε το σύνολο όλων των πεπερασμένων ακολουθιών από στοιχεία του Σ είναι αριθμήσιμο. Αριθμήσιμο σημαίνει ότι υπάρχει μία 1–1 και επί αντιστοιχία με το σύνολο των φυσικών αριθμών.

$\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \ldots$ μία τέτοια αρίθμηση. Ορίζουμε την ακολουθία συνόλων προτασιακών τύπων $\Sigma_0 \subseteq \Sigma_1 \subseteq \Sigma_2 \subseteq \cdots \subseteq \Sigma_n \subseteq \cdots$ ως εξής:

$$\Sigma_0 = \Sigma$$

$$\Sigma_{n+1} = \begin{cases} \Sigma_n \cup \{\phi_n\} & \text{αν } \Sigma_n \cup \{\phi_n\} \text{ είναι πεπ. ικαν.} \\ \Sigma_n \cup \{\neg\phi_n\} & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Μπορούμε να αποδείξουμε ότι κάθε Σ_n είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο. Το αποδεικνύουμε με (αριθμητική) επαγωγή στο n. Για $n = 0$ ισχύει από τον ορισμό. Υποθέτουμε τώρα ότι ισχύει για n, δηλαδή ότι το Σ_n είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο. Για να αποδείξουμε ότι το Σ_{n+1} είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο, αρκεί να αποδείξουμε ότι για τυχόν ϕ αν το $\Sigma_n \cup \{\phi\}$ δεν είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο, τότε το $\Sigma_n \cup \{\neg\phi\}$ είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο. Έστω λοιπόν $\{\psi_1, \ldots, \psi_k, \neg\phi\}$ τυχόν πεπερασμένο υποσύνολο του $\Sigma_n, \neg\phi$. Επειδή το Σ_n, ϕ δεν είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο υπάρχει υποσύνολό του $\{\psi_1^{'}, \ldots, \psi_l^{'}, \phi\}$ που δεν ικανοποιείται. Επειδή το Σ_n είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο θα υπάρχει μία απονομή, έστω V, που ικανοποιεί το $\{\psi_1, \ldots, \psi_k, \psi_1^{'}, \ldots, \psi_l^{'}\}$. Αλλά τότε η V δεν μπορεί να ικανοποιεί τη ϕ, άρα $\overline{V}(\neg\phi) = \mathsf{T}$, δηλαδή η V ικανοποιεί το $\{\psi_1, \ldots, \psi_k, \neg\phi\}$.

$$\text{Ορίζουμε τώρα το } \Sigma^{'} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Sigma_n.$$

Το $\Sigma^{'}$ είναι πλήρες διότι κάθε προτασιακός τύπος είναι κάποιο ϕ_n στη λίστα της αρίθμησης και για τη δημιουργία του $\Sigma^{'}$ έχουν χρησιμοποιηθεί όλα τα ϕ_n ή $\neg\phi_n$. Το $\Sigma^{'}$ είναι και πεπερασμένα ικανοποιήσιμο διότι αν $\{\phi_1, \ldots, \phi_k\}$ ένα υποσύνολό του θα υπάρχει ένα $n \in \mathbb{N}$ αρκούντως μεγάλο ώστε $\{\phi_1, \ldots, \phi_k\} \subseteq \Sigma_n$, επειδή $\{\phi_1, \ldots, \phi_k\} \subseteq \cup_{n=o}^{\infty} \Sigma_n$, άρα, επειδή το Σ_n είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο, το σύνολο $\{\phi_1, \ldots, \phi_k\}$ θα ικανοποιείται. $\square$

Πόρισμα 2.32 *Αν $\Sigma \models \phi$, τότε υπάρχει πεπερασμένο $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$, ώστε $\Sigma_0 \models \phi$.*

Απόδειξη Η απόδειξη βασίζεται στο ότι $\Sigma \models \phi$ μόνον τότε αν το $\Sigma, \neg\phi$ δεν είναι ικανοποιήσιμο.

Έστω τώρα $\Sigma \models \phi$. Τότε το σύνολο $\Sigma, \neg\phi$ δεν είναι ικανοποιήσιμο, άρα από θεώρημα της συμπάγειας δεν είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο. Άρα υπάρχει ένα πεπερασμένο υποσύνολο $\Sigma_0, \neg\phi$ που δεν είναι ικανοποιήσιμο ($\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ και Σ_0 πεπερασμένο). Άρα $\Sigma_0 \models \phi$. $\square$

Παρατήρηση 2.1 *Το πόρισμα 2.32 μας λέει το εξής: Αν το ϕ είναι λογική συνέπεια ενός απείρου συνόλου «υποθέσεων» Σ, τότε η λογική συνέπεια εκπορεύεται από ένα πεπερασμένο υποσύνολο του Σ δηλαδή δεν συμμετέχουν όλες οι άπειρες υποθέσεις στο συμπέρασμα ϕ αλλά μόνον ένα πεπερασμένο πλήθος αυτών. Το πόρισμα αυτό είναι πολύ ισχυρό, ως ισχυρισμός· στην πραγματικότητα είναι ισοδύναμο με το θεώρημα της συμπάγειας.*

Πρόταση 2.33 *Αν υποθέσουμε ότι ισχύει η εκφώνηση του πορίσματος 2.32, τότε μπορούμε να αποδείξουμε το θεώρημα της συμπάγειας.*

Απόδειξη Έστω Σ πεπερασμένα ικανοποιήσιμο. Αποδεικνύουμε ότι Σ είναι ικανοποιήσιμο διά της εις άτοπον απαγωγής. Έστω λοιπόν Σ μη ικανοποιήσιμο. Τότε $\Sigma \models \psi \wedge \neg\psi$, αφού ως μη ικανοποιήσιμο ταυτολογικά συνεπάγεται κάθε προτασιακό τύπο. Από πόρισμα 2.32 υπάρχει πεπερασμένο $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ ώστε $\Sigma_0 \models \psi \wedge \neg\psi$. Αλλά επειδή Σ είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο υπάρχει V που ικανοποιεί το Σ_0. Αλλά τότε πρέπει να ικανοποιεί και το $\psi \wedge \neg\psi$, πράγμα άτοπο. $\square$

2.11 Ασκήσεις

1. Έστω Σ_1 και Σ_2 (πιθανώς άπειρα) σύνολα προτασιακών τύπων έτσι ώστε $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ δεν είναι ικανοποιήσιμο. Αποδείξτε ότι υπάρχει προτασιακός τύπος ϕ ώστε $\Sigma_1 \models \phi$ και $\Sigma_2 \models \neg\phi$.

2. Έστω Σ σύνολο προτάσεων ώστε για κάθε απονομή V υπάρχει κάποιος $\phi \in \Sigma$ ώστε $\overline{V}(\phi) = T$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα πεπερασμένο υποσύνολο $\{A_1, \ldots, A_n\} \subseteq \Sigma$ έτσι ώστε ο προτασιακός τύπος $A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n$ είναι ταυτολογία.

3. Ορίζουμε μια σχέση $\prec$ στο σύνολο των προτασιακών τύπων ως εξής: $\varphi \prec \psi$ ανν $\models \varphi \to \psi$ και $\not\models \psi \to \varphi$.

   α) Δείξτε ότι για τυχόντες προτασιακούς τύπους φ, ψ, αν $\varphi \prec \psi$, τότε υπάρχει προτασιακός τύπος χ τέτοιος που $\varphi \prec \chi \prec \psi$.

   β) Βρείτε προτασιακούς τύπους $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ τέτοιους που $\varphi_1 \prec \varphi_2 \prec \varphi_3 \ldots$

4. Οι *υποτύποι* ενός προτασιακού τύπου ϕ είναι όλοι οι προτασιακοί τύποι (συμπεριλαμβανομένου του ίδιου του ϕ) που «σχηματίζονται» με βάση τον επαγωγικό ορισμό ώστε να δημιουργηθεί ο τύπος ϕ. Π.χ. οι ϕ_1 και ϕ_2 είναι υποτύποι του $(\phi_1 \wedge \phi_2)$ κλπ. Δείξτε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε προτασιακό τύπο φ, αν στο φ υπάρχουν n εμφανίσεις συνδέσμων, τότε υπάρχουν το πολύ $2n + 1$ υποτύποι του φ.

5. Αποδείξτε ότι $|$ και $\downarrow$ είναι οι μόνοι σύνδεσμοι δύο θέσεων που είναι πλήρεις από μόνοι τους.

Βιβλιογραφία κεφαλαίου 2

Ε3, Ξ1, Ξ2, Ξ8.

(Οι αναφορές παραπέμπουν στη βιβλιογραφία στο τέλος του βιβλίου)

3 Αποδεικτικό σύστημα

Αξιωματικό σύστημα τύπου Hilbert για τον προτασιακό λογισμό.

Θα δώσουμε τον ορισμό ενός τυπικού συστήματος του οποίου σκοπός θα είναι να αποδεικνύει με αυστηρό τρόπο τις αλήθειες του προτασιακού λογισμού, δηλαδή, είτε τις απόλυτες αλήθειες οι οποίες θα είναι οι προτασιακοί τύποι που γίνονται αληθείς σε όλες τις απονομές (ταυτολογίες) ή τις σχετικές αλήθειες (σχετικές σε σχέση με ένα σύνολο υποθέσεων) οι οποίες θα αληθεύουν στις απονομές που ικανοποιούν τις υποθέσεις. Για λόγους οικονομίας της παρουσίασης η γλώσσα μας θα περιλαμβάνει μόνον τους συνδέσμους $\neg$ και $\to$. Η επιλογή αυτή δεν είναι περιοριστική αφού το σύνολο $\{\neg, \to\}$ είναι επαρκές σύνολο συνδέσμων και κάθε εμφάνιση άλλου συνδέσμου μπορεί να θεωρηθεί συντομογραφία έκφρασης που γράφεται αποκλειστικά με $\neg$ και $\to$. Γενικά, ένα αξιωματικό σύστημα αποτελείται από τα αξιώματα, που είναι οι προτάσεις που ανά πάσα στιγμή μπορούμε να επικαλεστούμε και να χρησιμοποιήσουμε στην απόδειξή μας και τους κανόνες απαγωγής που θα μας επιτρέπουν να παράγουμε, από τα ήδη αποδειχθέντα, καινούργια συμπεράσματα.

3.1 Τυπικό αξιωματικό σύστημα

Χρησιμοποιούμε τα ακόλουθα σχήματα λογικών *αξιωμάτων*. Για οποιουσδήποτε τύπους ϕ, ψ, χ οι ακόλουθοι (πιο σύνθετοι) τύποι είναι αξιώματα:

A1 $\phi \to (\psi \to \phi)$

A2 $(\phi \to (\psi \to \chi)) \to ((\phi \to \psi) \to (\phi \to \chi))$

A3 $(\neg\psi \to \neg\phi) \to ((\neg\psi \to \phi) \to \psi)$

Κανόνες απαγωγής: Χρησιμοποιούμε τον κανόνα απαγωγής που είναι γνωστός με το λατινικό όνομα Modus Ponens και τον συμβολίζουμε με MP. Ο κανόνας αυτός μας λέει ότι από τους $\phi \to \psi$ και ϕ απάγουμε (συμπεραίνουμε) τον ψ. Σχηματικά

$$\frac{\phi \to \psi \quad \phi}{\psi} \; MP$$

Ορισμός 3.1 *Μια (τυπική)* Θεωρία *είναι ένα σύνολο προτασιακών τύπων οι οποίοι ονομάζονται* μη λογικά αξιώματα *της θεωρίας. Αντιθέτως, τα αξιώματα που παράγονται από τα σχήματα αξιωμάτων A1–A3 ονομάζονται* λογικά αξιώματα. *Τις θεωρίες τις συμβολίζουμε συνήθως με τα γράμματα $T, \Sigma, \ldots$.*

Παρατήρηση 3.1 *Τα λογικά αξιώματα μαζί με τους κανόνες απαγωγής αποτελούν το λογικό μέρος μιας θεωρίας. Στην περίπτωσή μας μπορούμε να φανταστούμε ότι αποτελούν τη μορφολογική - τυπική εκδοχή των λογικών συσχετισμών που κάνουμε συνήθως όταν δημιουργούμε συλλογισμούς. Κάθε* *λογικός συλλογισμός όμως, όταν δεν είναι λογικά «καθαρός», βασίζεται σε κάποιες εξωλογικές παραδοχές οι οποίες είναι τα μη λογικά αξιώματα. Αν χρησιμοποιήσουμε ως παράδειγμα την αξιωματική γεωμετρία, μπορούμε να πούμε ότι πάντα αναγνωρίζουμε ως λογικό μέρος, δηλαδή ανεξάρτητα από το ότι δουλεύουμε σε μια συγκεκριμένη θεωρία, το γεγονός ότι μπορούμε να δεχτούμε την πρόταση $\phi \to \phi$ ως λογικά (καθολικά) αληθή ή τη δυνατότητα να συμπεραίνουμε το ψ από προηγηθείσες στην απόδειξη πρότάσεις $\phi \to \psi$ και ϕ, αλλά δεν μπορούμε να δεχτούμε ως λογικά αληθείς προτάσεις όπως «από δύο σημεία διέρχεται μόνον μία ευθεία» ή ότι «από σημείο κείμενο εκτός ευθείας άγεται μία παράλληλος». Αυτές είναι προτάσεις που προσιδιάζουν στη φύση των αντικειμένων που εξετάζουμε, είναι δηλαδή μη λογικά αξιώματα. Η πλήρης βέβαια αναλογία με αυτά που αναφέραμε παραπάνω θα παρουσιαστεί στην περίπτωση του κατηγορηματικού λογισμού.*

Ορισμός 3.2 Απόδειξη *στη θεωρία T ονομάζεται κάθε πεπερασμένη ακολουθία $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ προτασιακών τύπων για τους οποίους ισχύουν τα κάτωθι:*

Για κάθε i όπου $1 \leq i \leq n$ ο τύπος ϕ_i είναι, είτε

1. *ένα λογικό αξίωμα $A1$, $A2$ ή $A3$,*

2. *είτε ανήκει στην T, δηλαδή είναι ένα μη λογικό αξίωμα της T,*

3. *είτε υπάρχουν ϕ_j, ϕ_k τύποι της ακολουθίας $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ με $j < i$ και $k < i$ ώστε $\phi_j \equiv \phi_k \to \phi_i$ (δηλαδή ο ϕ_i είναι το συμπέρασμα κανόνα MP με υποθέσεις τύπους με μικρότερο δείκτη, δηλαδή που προηγούνται στην απόδειξη από τον ϕ_i).*

Παρατήρηση 3.2 *Ο ορισμός αντιστοιχεί στον τρόπο που στην καθημερινή μαθηματική πρακτική δομείται μια απόδειξη. Ξεκινώντας, ενδεχομένως, από κάποιες προτάσεις που είναι τα αξιώματα της θεωρίας μας, προχωράμε βήμα βήμα συστηματικά στην παραγωγή συμπερασμάτων, με χρήση συλλογισμών οι οποίοι βασίζονται είτε σε κάποιες καθολικές αλήθειες (λογικά αξιώματα) είτε σε συλλογιστικούς τρόπους παραγωγής συμπερασμάτων (κανόνες απαγωγής). Σε οποιοδήποτε στάδιο βέβαια της διαδικασίας μπορούμε να επικαλεστούμε την ισχύ ενός μη λογικού αξιώματος. Η εξαντλητική καταγραφή του κάθε βήματος αυτής της διαδικασίας δημιουργεί μια ακολουθία όπως η περιγραφόμενη στον ορισμό.*

Ας παρατηρήσουμε επίσης ότι τα αξιώματα, οι κανόνες απαγωγής, οι θεωρίες είναι όλα τυπικά αντικείμενα, δηλαδή συμβολοσειρές χωρίς καμιά a priori σημασιολογία. Ο χαρακτήρας των αποδείξεων είναι μια τυπική-μηχανικού τύπου κατασκευή που προσομοιάζει με ένα τυπικό παγνίδι π.χ. το σκάκι. Για να δημιουργήσεις μια απόδειξη, θα πρέπει να εφαρμόσεις μηχανικά τους αυστηρούς κανόνες δημιουργίας και όχι αναφορές στο τι αυτές μπορεί να σημαίνουν (δες και παράδειγμα 3.4).

Ορισμός 3.3 Θεώρημα *της θεωρίας T ονομάζεται κάθε τύπος ϕ για τον οποίο υπάρχει απόδειξη $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ στη θεωρία T με $\phi_n \equiv \phi$.*

Αν ϕ είναι θεώρημα της T, γράφουμε $T \vdash \phi$. Αν $T = \emptyset$, δηλαδή αν θεωρήσουμε ότι έχουμε μία θεωρία χωρίς μη λογικά αξιώματα, γράφουμε $\vdash \phi$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η απόδειξη είναι στον καθαρό προτασιακό λογισμό. Είναι προφανές ότι οποιαδήποτε απόδειξη που δεν χρησιμοποιεί για την κατασκευή της μη λογικά αξιώματα είναι απόδειξη στον καθαρό προτασιακό λογισμό. Και βέβαια είναι επίσης προφανές ότι $\vdash \phi$ συνεπάγεται $T \vdash \phi$ για οποιοδήποτε T. Τα τυπικά αξιωματικά συστήματα που παρουσιάζονται σ' αυτό το κεφάλαιο ονομάζονται αξιωματικά συστήματα τύπου Hilbert. Το χαρακτηριστικό τους γνώρισμα είναι ότι έχουν πολλά λογικά αξιώματα και λίγους κανόνες απαγωγής.

Παράδειγμα 3.4 *Θα αποδείξουμε ότι για κάθε ϕ ισχύει ότι*
$\vdash \phi \to \phi$.

Αρκεί να κατασκευάσουμε μία ακολουθία $\phi_1, \ldots, \phi_n$, όπως ακριβώς στον ορισμό, έτσι ώστε ο ϕ_n να είναι ο $\phi \to \phi$. Την παρουσιάζουμε παρακάτω γράφοντάς την από πάνω προς τα κάτω, όπου οι αριθμοί αριστερά είναι οι δείκτες της ακολουθίας και όπου δεξιά παρουσιάζεται η αιτιολόγηση του γιατί η ακολουθία ικανοποιεί τις προδιαγραφές του ορισμού. Η αιτιολόγηση δεν είναι μέρος της τυπικής απόδειξης αλλά σχόλια που μας επιτρέπουν να βλέπουμε ότι η απόδειξη συγκροτήθηκε με σωστό τρόπο με βάση τους κανόνες. Στην περίπτωση αυτού του παραδείγματος η αιτιολόγηση παρουσιάζεται με την αντίστοιχη αρίθμηση ακριβώς από κάτω, ενώ αργότερα θα τοποθετείται στον ίδιο πίνακα με την αρίθμηση της ακολουθίας της απόδειξης.

1. $(\phi \to ((\phi \to \phi) \to \phi)) \to ((\phi \to (\phi \to \phi)) \to (\phi \to \phi)$
2. $\phi \to ((\phi \to \phi) \to \phi)$
3. $(\phi \to (\phi \to \phi)) \to (\phi \to \phi)$
4. $\phi \to (\phi \to \phi)$
5. $\phi \to \phi$

με την παρακάτω αντίστοιχη αιτιολόγηση

1. Αξίωμα A2
2. Αξίωμα A1
3. Από 1, 2 και MP
4. Αξίωμα A1
5. Από 3,4 και MP

Παρατήρηση 3.3 *Ας προσθέσουμε ένα σχόλιο για τη χρήση των λέξεων «απόδειξη» «θεώρημα» κλπ. στους ορισμούς που προηγήθηκαν. Είναι πιο σωστό όταν αναφερόμαστε σ' αυτά να λέμε τυπική απόδειξη, τυπικό θεώρημα* *κ.λ.π. Όταν χρησιμοποιούμε τις λέξεις απόδειξη, θεώρημα κλπ. με την καθημερινή μαθηματική τους σημασία δεν πρέπει να τις συγχέουμε με τα αντικείμενα που περιγράφτηκαν με τους προηγηθέντες ορισμούς. Θα μπορούσαμε π.χ. να αποδείξουμε ένα θεώρημα για τα τυπικά θεωρήματα. Σ' αυτή την περίπτωση το θεώρημα αυτό το ονομάζουμε μεταθεώρημα. Δηλαδή ένα θεώρημα που διατυπώνεται στη μεταγλώσσα και αφορά αντικείμενα της τυπικής γλώσσας, θεωρίας κλπ. Ας σημειωθεί επίσης ότι επειδή οι τυπικές θεωρίες (κυρίως αυτές του κατηγορηματικού λογισμού) αντανακλούν υπαρκτές μαθηματικές θεωρίες π.χ. αριθμητική, θεωρία συνόλων, η μαθηματική εξέταση αυτών των τυπικών θεωριών ονομάζεται* Μεταμαθηματικά, *δηλαδή μαθηματικά που εξετάζουν τις τυπικές αναπαραστάσεις των μαθηματικών.*

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ένα (μετα)θεώρημα που θα μας βοηθάει στην εύρεση τυπικών αποδείξεων.

Θεώρημα 3.5 (Το θεώρημα της απαγωγής, Herbrand) *Αν* $T \cup \{\phi\} \vdash \psi$ *(γράφουμε και* $T, \phi \vdash \psi$*), τότε* $T \vdash \phi \to \psi$.

Απόδειξη Το θεώρημα το αποδεικνύουμε με επαγωγή στο μήκος n της απόδειξης $\psi_1, \ldots, \psi_n$ της ψ ($\psi \equiv \psi_n$). Γενικά παρατηρούμε πρώτα ότι αν ψ είναι ένα από τα ακόλουθα:

1. ψ είναι λογικό αξίωμα,
2. $\psi \in T$,
3. $\psi \equiv \phi$,

τότε η πρόταση ισχύει διότι:

Στην πρώτη και στη δεύτερη περίπτωση ισχύει ότι $T \vdash \psi$. Και επειδή ισχύει επίσης ότι $T \vdash \psi \to (\phi \to \psi)$ (επειδή $\psi \to (\phi \to \psi)$ είναι λογικό αξίωμα) θα έχουμε $T \vdash \phi \to \psi$ από εφαρμογή του κανόνα Modus Ponens. Στην τρίτη περίπτωση θα έχουμε βέβαια $T \vdash \phi \to \phi$ επειδή $\vdash \phi \to \phi$, από προηγούμενο παράδειγμα.

Έστω τώρα ότι η ψ είναι αποτέλεσμα ενός κανόνα MP. Τότε έχουν προηγηθεί στην απόδειξη τα ψ_i και $\psi_i \to \psi$. Επειδή αυτά έχουν προηγηθεί οι αποδείξεις τους έχουν μικρότερο μήκος από το n και άρα για αυτά ισχύει η επαγωγική υπόθεση, άρα $T \vdash \phi \to \psi_i$ και $T \vdash \phi \to (\psi_i \to \psi)$. Το αποτέλεσμα προκύπτει επειδή λόγω A2 ισχύει $T \vdash (\phi \to (\psi_i \to \psi)) \to ((\phi \to \psi_i) \to (\phi \to \psi))$. Χρησιμοποιούμε δύο φορές τον κανόνα MP. $\square$

3.2 Ορθότητα και πληρότητα

Θεώρημα 3.6 (Θεώρημα της ορθότητας) *Αν* $T \vdash \phi$*, τότε* $T \models \phi$*. Στην ειδική περίπτωση που* $T = \emptyset$*, έχουμε ότι* $\vdash \phi$ *συνεπάγεται* $\models \phi$*, δηλαδή τα θεωρήματα του καθαρού προτασιακού λογισμού είναι ταυτολογίες.*

Απόδειξη εύκολη διότι η ικανοποιησιμότητα ισχύει για τα αξιώματα (τα λογικά αξιώματα είναι ταυτολογίες) και μεταφέρεται από τις υποθέσεις ενός κανόνα Modus Ponens στο συμπέρασμα.

Το ανωτέρω θεώρημα μας λέει ότι όλα τα θεωρήματα είναι ορθά. Ισχύει όμως και το αντίστροφο; Δηλαδή ισχύει ότι αν έχουμε μία ταυτολογία τότε αυτή θα είναι ένα θεώρημα του τυπικού συστήματος; Ισχύει, με άλλα λόγια, ότι το τυπικό σύστημα έχει τη δυνατότητα να αποδεικνύει όλες τις ταυτολογίες;

Θεώρημα 3.7 (Θεώρημα της πληρότητας) *Αν $\models \phi$, δηλαδή αν ϕ είναι ταυτολογία, τότε $\vdash \phi$.*

Θα αποδείξουμε πρώτα τα ακόλουθα λήμματα:

Λήμμα 3.8 *Οι παρακάτω προτασιακοί τύποι είναι τυπικά θεωρήματα του αποδεικτικού συστήματος τύπου Hilbert (δηλαδή αν τ είναι ένας από τους παρακάτω προτασιακούς τύπους έχουμε $\vdash \tau$).*

(a) $\neg\neg\phi \to \phi$

(b) $\phi \to \neg\neg\phi$

(c) $\neg\phi \to (\phi \to \psi)$

(d) $(\neg\psi \to \neg\phi) \to (\phi \to \psi)$

(e) $(\phi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\phi)$

(f) $\phi \to (\neg\psi \to \neg(\phi \to \psi))$

(g) $(\phi \to \psi) \to ((\neg\phi \to \psi) \to \psi)$

Απόδειξη:
Θα αποδείξουμε πρώτα την ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 3.9 **i)** $\phi \to \psi, \psi \to \chi \vdash \phi \to \chi$

ii) $\phi \to (\psi \to \chi), \psi \vdash \phi \to \chi$

Απόδειξη του 3.9, i).

1.	$\phi \to \psi$	ΥΠ (ΥΠ=Υπόθεση)
2.	$\psi \to \chi$	ΥΠ
3.	ϕ	ΥΠ
4.	ψ	1,3, MP
5.	χ	2,4 MP

Άρα $\phi \to \psi, \psi \to \chi, \phi \vdash \chi$. Άρα, από θεώρημα απαγωγής, $\phi \to \psi, \psi \to \chi \vdash \phi \to \chi$.

Απόδειξη του ii). Εύκολη, με το θεώρημα της απαγωγής.

Απόδειξη του λήμματος 3.8.

(a):

1.	$(\neg\phi \to \neg\neg\phi) \to ((\neg\phi \to \neg\phi) \to \phi)$	Αξίωμα A3
2.	$\neg\phi \to \neg\phi$	γνωστό
3.	$(\neg\phi \to \neg\neg\phi) \to \phi$	1,2,προτ. 3.9, ii
4.	$\neg\neg\phi \to (\neg\phi \to \neg\neg\phi)$	Αξίωμα A1
5.	$\neg\neg\phi \to \phi$	3,4 προτ. 3.9, i

(b):

1.	$(\neg\neg\neg\phi \to \neg\phi) \to ((\neg\neg\neg\phi \to \phi) \to \neg\neg\phi)$	Αξ. A3
2.	$\neg\neg\neg\phi \to \neg\phi$	από (a)
3.	$(\neg\neg\neg\phi \to \phi) \to \neg\neg\phi$	1,2,MP
4.	$\phi \to (\neg\neg\neg\phi \to \phi)$	Αξ. A1
5.	$\phi \to \neg\neg\phi$	3,4, προτ. 3.9, i

(c):

1.	$\neg\phi$	ΥΠ
2.	ϕ	ΥΠ
3.	$\phi \to (\neg\psi \to \phi)$	Αξίωμα A1
4.	$\neg\phi \to (\neg\psi \to \neg\phi)$	Αξίωμα A1
5.	$\neg\psi \to \phi$	2,3,MP
6.	$\neg\psi \to \neg\phi$	1,4,MP
7.	$(\neg\psi \to \neg\phi) \to ((\neg\psi \to \phi) \to \psi)$	Αξίωμα A3
8.	$(\neg\psi \to \phi) \to \psi$	6,7,MP
9.	ψ	5,8,MP

Άρα, από 1-9, $\neg\phi, \phi \vdash \psi$. Κατά συνέπεια, από το θεώρημα της απαγωγής, $\neg\phi \vdash \phi \to \psi$, και, ξανά από το θεώρημα της απαγωγής, $\vdash \neg\phi \to (\phi \to \psi)$.

(d):

1.	$\neg\psi \to \neg\phi$	ΥΠ
2.	ϕ	ΥΠ
3.	$(\neg\psi \to \neg\phi) \to ((\neg\psi \to \phi) \to \psi)$	Αξίωμα A3
4.	$\phi \to (\neg\psi \to \phi)$	Αξίωμα A1
5.	$(\neg\psi \to \phi) \to \psi$	1,3,MP
6.	$\phi \to \psi$	4,5,προτ. 3.9, i
7.	ψ	2,6,MP

Από 1-7, $\neg\psi \to \neg\phi, \phi \vdash \psi$, και δύο εφαρμογές του θεωρήματος της απαγωγής δίνουν το αποτέλεσμα.

(e):

1.	$\phi \to \psi$	ΥΠ
2.	$\neg\neg\phi \to \phi$	Από (a)
3.	$\neg\neg\phi \to \psi$	1,2,προτ. 3.9, i
4.	$\psi \to \neg\neg\psi$	Από (b)
5.	$\neg\neg\phi \to \neg\neg\psi$	3,4,προτ. 3.9, i
6.	$(\neg\neg\phi \to \neg\neg\psi) \to (\neg\psi \to \neg\phi)$	Από (d)
7.	$(\neg\psi \to \neg\phi)$	5,6,MP

Άρα, από 1-7, $\phi \to \psi \vdash \neg\psi \to \neg\phi$, και, από θεώρημα απαγωγής έχουμε το αποτέλεσμα.

(f):

Προφανώς, $\phi, \phi \to \psi \vdash \psi$ από MP. Άρα, $\vdash \phi \to ((\phi \to \psi) \to \psi)$ με δύο εφαρμογές του θεωρήματος της απαγωγής. Από (e) $\vdash ((\phi \to \psi) \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg(\phi \to \psi))$. Άρα χρησιμοποιώντας την πρόταση 3.9, i παίρνουμε το αποτέλεσμα.

(g):

1.	$\phi \to \psi$	ΥΠ
2.	$\neg\phi \to \psi$	ΥΠ
3.	$(\phi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\phi)$	Από (e)
4.	$\neg\psi \to \neg\phi$	1,3,MP
5.	$(\neg\phi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\neg\phi)$	Από (e)
6.	$\neg\psi \to \neg\neg\phi$	2,5,MP
7.	$(\neg\psi \to \neg\neg\phi) \to ((\neg\psi \to \neg\phi) \to \psi)$	Αξίωμα A3
8.	$(\neg\psi \to \neg\phi) \to \psi$	6,7,MP
9.	ψ	4,8,MP

Άρα, $\phi \to \psi, \neg\phi \to \psi \vdash \psi$. Δύο εφαρμογές του θεωρήματος της απαγωγής δίνουν το αποτέλεσμα.

Λήμμα 3.10 *Έστω ότι όλες οι προτασιακές μεταβλητές που εμφανίζονται στον προτασιακό τύπο ϕ είναι ανάμεσα στις $B_1, \ldots, B_k$. Έστω V απονομή αλήθειας (μας ενδιαφέρουν μόνον οι τιμές που παίρνει στα B_i). Ορίζουμε B'_i να είναι B_i αν $V(B_i) = T$ και B'_i να είναι $\neg B_i$ αν $V(B_i) = F$. Ορίζουμε επίσης ϕ' να είναι ϕ αν $\overline{V}(\phi) = T$ και ϕ' να είναι $\neg\phi$ αν $\overline{V}(\phi) = F$. Τότε $B'_1, \ldots, B'_k \vdash \phi'$.*

Παράδειγμα. Έστω $\phi \equiv \neg(\neg A_1 \to A_2)$. Τότε για τις διάφορες απονομές μπορούμε να δημιουργήσουμε τον αληθοπίνακα του ϕ. Έχουμε

A_1	A_2	$\neg(\neg A_1 \to A_2)$
T	T	F
F	T	F
T	F	F
F	F	T

Αν εφαρμόσουμε την πρόταση στην απονομή που αντιστοιχεί στην τρίτη γραμμή έχουμε $A_1, \neg A_2 \vdash \neg\neg(\neg A_1 \to A_2)$ και στην τέταρτη γραμμή $\neg A_1, \neg A_2 \vdash \neg(\neg A_1 \to A_2)$.

Απόδειξη: Με επαγωγή στο ϕ. Αν ο ϕ είναι η προτασιακή μεταβλητή B_1 τότε το ζητούμενο ανάγεται στο $B_1 \vdash B_1$ και $\neg B_1 \vdash \neg B_1$.

Περίπτωση 1. ϕ είναι $\neg\psi$. Τότε η ΕΥ ισχύει για το ψ.

Υποπερίπτωση 1a. Έστω ότι ο ψ παίρνει την τιμή T σε μία απονομή V. Τότε ϕ παίρνει την τιμή F. Άρα, $\psi^{'}$ είναι ψ και $\phi^{'}$ είναι $\neg\phi$. Από ΕΥ για ψ, $B_1', \ldots, B_k' \vdash \psi$. Άρα από λήμμα 3.8 (b) και MP , $B_1', \ldots, B_k' \vdash \neg\neg\psi$. Αλλά $\neg\neg\psi$ είναι $\phi^{'}$.

Υποπερίπτωση 1b. Έστω ψ παίρνει την τιμή F. Τότε $\psi^{'}$ είναι $\neg\psi$ και $\phi^{'}$ είναι ϕ. Από ΕΥ $B_1', \ldots, B_k' \vdash \neg\psi$. Αλλά $\neg\psi$ είναι $\phi^{'}$.

Περίπτωση 2. ϕ είναι $\psi \to \chi$ Τότε για τα ψ και χ ισχύει η ΕΥ, άρα $B_1', \ldots, B_k' \vdash \psi^{'}$ και $B_1', \ldots, B_k' \vdash \chi^{'}$.

Περίπτωση 2a. ψ παίρνει την τιμή F. Άρα ϕ παίρνει την τιμή T. Τότε $\psi^{'}$ είναι $\neg\psi$ και $\phi^{'}$ είναι ϕ. Άρα, $B_1', \ldots, B_k' \vdash \neg\psi$. Από λήμμα 3.8 (c), $B_1', \ldots, B_k' \vdash \psi \to \chi$. Αλλά $\psi \to \chi$ είναι $\phi^{'}$.

Περίπτωση 2b. χ παίρνει την τιμή T. Άρα ϕ παίρνει την τιμή T. Τότε $\chi^{'}$ είναι χ και $\phi^{'}$ είναι ϕ. Ισχύει $B_1', \ldots, B_k' \vdash \chi$. Τότε από αξίωμα A1 $B_1', \ldots, B_k' \vdash \psi \to \chi$. Αλλά $\psi \to \chi$ είναι $\phi^{'}$.

Περίπτωση 2c. ψ παίρνει την τιμή T , χ παίρνει την τιμή F. Τότε ϕ έχει την τιμή F, $\psi^{'}$ είναι ψ, $\chi^{'}$ είναι $\neg\chi$ και $\phi^{'}$ είναι $\neg\phi$. Ισχύει $B_1', \ldots, B_k' \vdash \psi$ και $B_1', \ldots, B_k' \vdash \neg\chi$. Άρα από λήμμα 3.8 (f), $B_1', \ldots, B_k' \vdash \neg(\psi \to \chi)$. Αλλά $\neg(\psi \to \chi)$ είναι $\phi^{'}$.

Αυτό εξαντλεί τις δυνατές περιπτώσεις, επειδή η γλώσσα περιέχει μόνον τους συνδέσμους $\neg$ και $\to$.

Απόδειξη του θεωρήματος της πληρότητας. Θα χρησιμοποιήσουμε το λήμμα 3.10. Έστω ϕ είναι ταυτολογία και έστω $B_1, \ldots, B_k$ είναι οι προτασιακές μεταβλητές που εμφανίζονται στον ϕ. Για *οποιαδήποτε* απονομή αλήθειας (στα $B_1, \ldots, B_k$), από το λήμμα 3.10 έχουμε ότι $B_1', \ldots, B_k' \vdash \phi$. ($\phi^{'}$ είναι ϕ επειδή ϕ παίρνει πάντα την τιμή T.) Άρα, αν B_k πάρει την τιμή T, $B_1', \ldots, B_{k-1}', B_k \vdash \phi$, και αν B_k πάρει την τιμή F, $B_1', \ldots, B_{k-1}', \neg B_k \vdash \phi$. Άρα, από το θεώρημα της απαγωγής, $B_1', \ldots B_{k-1}' \vdash B_k \to \phi$ και $B_1', \ldots, B_{k-1}' \vdash \neg B_k \to \phi$. Τότε από λήμμα 3.8, (g) $B_1', \ldots, B_{k-1}' \vdash \phi$ και βέβαια τα $B_1', \ldots, B_k'$ μπορούν να αντιστοιχούν σε *οποιαδήποτε* απονομή. Ομοίως B_{k-1} μπορεί να είναι T ή F και ξανά εφαρμόζοντας το θεώρημα της απαγωγής και το λήμμα 3.8, (g) μπορούμε να απαλείψουμε το B_{k-1}' όπως ακριβώς απαλείψαμε το B_k'. Μετά από k τέτοια βήματα τελικά παίρνουμε $\vdash \phi$.

Πόρισμα 3.11 *Αν T θεωρία (T μπορεί να είναι άπειρο σύνολο) τότε $T \models \phi$ συνεπάγεται $T \vdash \phi$.*

Απόδειξη Θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα της συμπάγειας. Από το πόρισμα του θεωρήματος της συμπάγειας έχουμε ότι $T_0 \models \phi$, για κάποιο πεπερασμένο υποσύνολο του T το $T_0 = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$. Δηλαδή $\psi_1, \ldots, \psi_n \models \phi$. Αυτό είναι ισοδύναμο με το $\models \psi_1 \to (\cdots \to (\psi_n \to \phi)\cdots)$. Από θεώρημα πληρότητας έχουμε ότι $\vdash \psi_1 \to (\cdots \to (\psi_n \to \phi)\cdots)$. Και βέβαια επειδή κάθε $\phi_i \in T$, εφαρμόζοντας n φορές τον κανόνα MP, παίρνουμε τελικά ότι $T \vdash \phi$. $\square$

3.3 Ασκήσεις

1. Έστω ότι ορίζουμε στον προτασιακό λογισμό ένα τυπικό σύστημα, έστω $\mathcal{Q}$, ως εξής:

Λογικά αξιώματα: Όλοι οι προτασιακοί τύποι της μορφής

α1. $\phi \to (\psi \to \phi)$

α2. $(\neg\phi \to \psi) \to ((\neg\phi \to \neg\psi) \to \phi)$

Κανόνες απαγωγής: Modus Ponens

Στο σύστημα αυτό $\mathcal{Q}$ ορίστε τί είναι απόδειξη από το σύνολο των μη λογικών αξιωμάτων T.

Αποδείξτε ότι αν σ' αυτό το σύστημα το σύνολο T είναι ασυνεπές, δηλαδή υπάρχει ψ ώστε $T \vdash \psi$ και $T \vdash \neg\psi$, τότε για κάθε προτασιακό τύπο ϕ έχουμε ότι $T \vdash \phi$. (εδώ το $\vdash$ σημαίνει «αποδεικνύεται στο $\mathcal{Q}$»)

2. Έστω ϕ προτασιακός τύπος που δεν είναι ταυτολογία. Ονομάζουμε *στιγμιότυπο* του ϕ κάθε προτασιακό τύπο που προκύπτει αν στον ϕ αντικαταστήσουμε τις προτασιακές μεταβλητές του με οποιονδήποτε προτασιακό τύπο, με την προϋπόθεση ότι σε κάθε αντικατάσταση προτασιακής μεταβλητής A στον ϕ, από έναν προτασιακό τύπο ψ, όλες οι εμφανίσεις της A αντικαθίστανται από τον ψ. Έστω T η θεωρία που τα μη λογικά αξιώματά της είναι όλα τα στιγμιότυπα του ϕ. Αποδείξτε ότι T είναι ασυνεπής, δηλαδή υπάρχει προτασιακός τύπος ψ ώστε $T \vdash \psi$ και $T \vdash \neg\psi$.

3. Σε ένα τυπικό αξιωματικό σύστημα, ένα υποσύνολο Z των αξιωμάτων λέγεται *ανεξάρτητο* αν κάποιος τύπος στο Z δεν αποδεικνύεται από τα υπόλοιπα αξιώματα μέσω των κανόνων απαγωγής. Αποδείξτε ότι το καθένα από τα σχήματα αξιωμάτων A1, A2 και A3 είναι ανεξάρτητο. Υπόδειξη για το A1: Θεωρήστε τους ακόλουθους πίνακες.

A	$\neg A$
0	1
1	1
2	0

και

A	B	$A \to B$
0	0	0
1	0	2
2	0	0
0	1	2
1	1	2
2	1	0
0	2	2
1	2	0
2	2	0

Αυτοί λειτουργούν ως αληθοπίνακες, μόνον που τώρα υπάρχει και μία τρίτη τιμή αληθείας, το 2. Μέσω αυτών των πινάκων, για τιμές των προτασιακών μεταβλητών 0, 1 ή 2 (απονομή), κάθε προτασιακός τύπος αποκτά μια τιμή 0, 1 ή 2. Ας ονομάσουμε *μηδενικό* κάθε προτασιακό τύπο ϕ που παίρνει πάντα την τιμή 0 για οποιαδήποτε απονομή. Αποδείξτε ότι όλα τα αξιώματα των σχημάτων Α2 και Α3 είναι μηδενικοί τύποι και ότι ο κανόνας Modus Ponens διατηρεί τη μηδενικότητα. Αλλά ο $A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow A_1)$ δεν είναι μηδενικός. Με παρόμοιο τρόπο αποδείξτε την ανεξαρτησία του Α2 και Α3.

Βιβλιογραφία κεφαλαίου 3

Ε1, Ε2, Ε3, Ξ1, Ξ6, Ξ8.

(Οι αναφορές παραπέμπουν στη βιβλιογραφία στο τέλος του βιβλίου)

4 Πρωτοβάθμια κατηγορηματική Λογική

(Πρωτοβάθμιος κατηγορηματικός λογισμός)

Υπάρχουν είδη λογικών απαγωγών που δεν μπορούν να δικαιολογηθούν με βάση μόνον τη λογική των προτάσεων, π.χ:

α1. Κάθε φίλος του Γιώργου είναι φίλος του Κώστα.

Ο Νίκος δεν είναι φίλος του Κώστα.

Άρα, ο Νίκος δεν είναι φίλος του Γιώργου.

α2. Όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί.

Ο Σωκράτης είναι άνθρωπος.

Άρα, ο Σωκράτης είναι θνητός.

α3. Όλοι οι άνθρωποι είναι ζώα.

Άρα, το κεφάλι ενός ανθρώπου είναι το κεφάλι ενός ζώου.

Η ορθότητα αυτών των συλλογισμών δεν εξαρτάται από την τοποθέτηση των προτάσεων σε σχέση με τους λογικούς συνδέσμους, έτσι ώστε η κατάστρωση ενός αληθοπίνακα να μας έδινε την ορθότητα ή μη του συλλογισμού. Εξαρτάται μάλλον από τη δομή και των «επιμέρους» προτάσεων καθώς και από τη σημασία εκφράσεων όπως όλοι, κάθε, κλπ.

Ας εισαγάγουμε έναν ειδικό συμβολισμό για να κάνουμε πιο διαφανή τη δομή του συλλογισμού. Αν $P(x)$ είναι ένα κατηγόρημα, δηλαδή μας λέει ότι το x έχει την ιδιότητα P, τότε $\forall x P(x)$ μας λέει ότι για κάθε x η ιδιότητα P ισχύει. Επίσης $\exists x P(x)$ μας λέει ότι υπάρχει (τουλάχιστον) ένα x που έχει την ιδιότητα P. Στην έκφραση $\forall x P(x)$ το $\forall x$ είναι ο καθολικός ποσοδείκτης και στην $\exists x P(x)$ το $\exists x$ είναι ο υπαρκτικός ποσοδείκτης.

Αν τώρα $\gamma, \kappa, \nu, \sigma, \Phi(x, y), A(x), \Theta(x), Z(x), k(x)$ σημαίνουν, αντίστοιχα, Γιώργος, Κώστας, Νίκος, Σωκράτης, x είναι φίλος τού y, x είναι άνθρωπος, x είναι θνητός, x είναι ζώο, το κεφάλι τού x, τότε οι 1, 2, 3 πιο πάνω γίνονται:

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x(\Phi(x,\gamma) \to \Phi(x,\kappa)\\ \neg\Phi(\nu,\kappa)\end{array}}{\neg\Phi(\nu,\gamma)} \tag{1}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x(A(x) \to \Theta(x))\\ A(\sigma)\end{array}}{\Theta(\sigma)} \tag{2}$$

$$\frac{\forall x(A(x) \to Z(x))}{\forall x(\exists y(x = k(y) \land A(y)) \to \exists y(x = k(y) \land Z(y)))} \tag{3}$$

Παρατηρούμε ότι η ορθότητα αυτών των συλλογισμών δεν εξαρτάται από την ειδική σημασία των $\gamma, \kappa, \nu, \sigma, \Phi, A, \Theta, Z, k$. Βλέπουμε ότι τα καινούργια στοιχεία που περιέχονται στην καινούργια μας λογική (στον καινούργιο τρόπο παραγωγής ορθών συλλογισμών) είναι τα κατηγορήματα, όπως π.χ. τα Φ, A, Θ κλπ. και οι ποσοδείκτες. Εξού και κατηγορηματικός λογισμός. Οι προτάσεις που σχηματίζονται και η αλήθεια των οποίων μας ενδιαφέρει μιλάνε για ένα πεδίο *αντικειμένων*, για ένα «σύμπαν» της συζήτησης. Είναι το πεδίο των αντικειμένων για τα οποία μιλάμε και για τα οποία μας ενδιαφέρει να ανακαλύψουμε αλήθειες. Π.χ. το σύμπαν της συζήτησης θα μπορούσε να είναι τα σύνολα, οπότε η γλώσσα μας θα ήταν η γλώσσα της συνολοθεωρίας ή οι αριθμοί, οπότε η γλώσσα μας θα ήταν η γλώσσα της αριθμοθεωρίας κλπ. (γλώσσα χονδρικά είναι ο τρόπος σχηματισμού προτάσεων).

Το πώς μεταχειριζόμαστε τους ποσοδείκτες, το πώς ποσοδείχνουμε, αποτελεί το άλλο κύριο χαρακτηριστικό της γλώσσας μας. Όταν αναφερόμαστε με ποσοδείκτες, στο σύμπαν της συζήτησής μας, αναφερόμαστε στα *αντικείμενα*, στα *στοιχεία* του σύμπαντος και όχι σε συλλογές ή συλλογές συλλογών κ.ο.κ. αντικειμένων, στοιχείων. Π.χ. αν το σύμπαν είναι αριθμοί, μπορούμε να πούμε ότι «κάθε αριθμός έχει μία ιδιότητα» (π.χ. $\forall x(x \geq 0)$) αλλά όχι «κάθε σύνολο αριθμών έχει μία ιδιότητα». Για να το πούμε αυτό θα πρέπει στο σύμπαν μας να περιέχονται και τα σύνολα των αριθμών. Αυτός ο τρόπος χρήσης των ποσοδεικτών καθορίζει τις γλώσσες μας ως γλώσσες πρώτου βαθμού, γι' αυτό και ο όρος πρωτοβάθμια λογική.

4.1 Γλώσσα της λογικής των κατηγορημάτων

Μία γλώσσα της λογικής των κατηγορημάτων αποτελείται από:

(I) *Τα λογικά σύμβολα*: Αυτά αποτελούνται από:

- (i) *Μεταβλητές*: Ένα αριθμήσιμο σύνολο από σύμβολα $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ που θα τα ονομάζουμε μεταβλητές.
- (ii) *Λογικούς συνδέσμους*: Θα είναι τα σύμβολα $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.
- (iii) *Κόμμα, παρενθέσεις*: Το σύμβολο , και τα σύμβολα (και).
- (iv) *Ποσοδείκτες*: Τα σύμβολα $\forall$ και $\exists$.

(II) *Τα μη λογικά σύμβολα*: Αυτά αποτελούνται από:

- (i) *Σύμβολα σταθερών*: Ένα σύνολο συμβόλων c_1, c_2, c_3, $\ldots$, c_n, $\ldots$ που θα τα ονομάζουμε σταθερές. Οι σταθερές θα παίζουν τον ρόλο που παίζουν τα κύρια ονόματα στην καθομιλουμένη. Δηλαδή θα συμβολίζουν ένα σταθερό αντικείμενο. Στο παράδειγμά μας στο 2. το σ ήταν μία σταθερά που συμβόλιζε τον Σωκράτη. Σημειώστε ότι το σύνολο των σταθερών μπορεί να είναι ή αριθμήσιμο, δηλαδή το $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ ή πεπερασμένο δηλαδή $c_1, \ldots, c_\kappa$ για κάποιο κ, ή ακόμη και κενό, δηλαδή να μην υπάρχουν καθόλου σταθερές.

(ii) *Σύμβολα κατηγορημάτων*: Για κάθε φυσικό $n > 0$, υπάρχει ένα σύνολο συμβόλων, τα σύμβολα κατηγορημάτων n-θέσεων. Το σύνολο αυτό μπορεί να είναι αριθμήσιμο δηλαδή $Q_1^n, Q_2^n, \dots, Q_i^n, \dots$ ή πεπερασμένο $Q_1^n, Q_2^n, \dots, Q_\kappa^n$, για κάποιο κ, (ή βέβαια ακόμα και κενό)[4].

Τα σύμβολα κατηγορημάτων μιας θέσης θα συμβολίζουν ιδιότητες (των αντικειμένων του σύμπαντός μας) π.χ. $Q^1(x)$ μπορεί να συμβολίζει την ιδιότητα «ο x είναι ρητός». Τα σύμβολα κατηγορημάτων n-θέσεων συμβολίζουν n-μελείς σχέσεις, λ.χ. $Q^2(x, y)$ μπορεί να συμβολίζει «ο x είναι μικρότερος του y».

(iii) *Σύμβολα συναρτήσεων*: Για κάθε φυσικό $n > 0$, ένα σύνολο συμβόλων, τα σύμβολα συναρτήσεων n θέσεων. Αυτά θα συμβολίζουν συναρτήσεις n μεταβλητών στο σύμπαν των αντικειμένων μας A δηλ. συναρτήσεις από το $A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ φορές}}$ στο A.

Το σύνολο αυτό των συμβόλων μπορεί να είναι αριθμήσιμο δηλαδή $f_1^n, f_2^n, \dots, f_i^n, \dots$ ή πεπερασμένο, δηλαδή $f_1^n, \dots, f_\kappa^n$ ή ακόμη και κενό, δηλαδή να μην υπάρχουν καθόλου σύμβολα συναρτήσεων.

Παράδειγμα: Στο παράδειγμα της σελ. 47

Τα $\gamma, \kappa, \nu, \sigma$ είναι σύμβολα σταθερών.

Το Φ είναι σύμβολο κατηγορήματος δύο θέσεων.

Τα A, Θ, Z είναι σύμβολα κατηγορημάτων μιας θέσης.

Το k είναι ένα σύμβολο συνάρτησης μιας θέσης και συμβολίζει μία συνάρτηση από το σύνολο των ζώων στο σύνολο των κεφαλιών των ζώων, έτσι ώστε αν x είναι ένα ζώο, τότε $k(x)$ να είναι το κεφάλι του x.

Οι γλώσσες συμβολίζονται με $\mathcal{L}$ και όταν υπάρχει ανάγκη διαχωρισμού τους γράφουμε $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_A$ κ.τ.λ. Εκείνο που διαφοροποιεί μία γλώσσα από μία άλλη είναι ένα διαφορετικό σύνολο από μη λογικά σύμβολα μια και τα λογικά σύμβολα σε όλες είναι τα ίδια.

Παρατήρηση 4.1 *Στον καθορισμό του συνόλου των λογικών συμβόλων της πρωτοβάθμιας γλώσσας σταθήκαμε αρκετά «γενναιόδωροι» περιλαμβάνοντας τους λογικούς προτασιακούς συνδέσμους $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ καθώς και τους ποσοδείκτες $\forall$ και $\exists$. Η σημασιολογία που θα υιοθετήσουμε πιο κάτω μας επιτρέπει να είμαστε πιο «οικονομικοί». Στην περίπτωση των προτασιακών συνδέσμων θα μπορούσαμε να περιοριστούμε στο σύνολο $\{\neg, \rightarrow\}$, αφού αυτό είναι ένα επαρκές σύνολο συνδέσμων, δηλαδή κάθε χρήση των $\wedge$, $\vee$ ή $\leftrightarrow$ θα μπορούσε*

[4] Απαιτείται να υπάρχει τουλάχιστον ένα σύμβολο κατηγορήματος, ώστε να είναι δυνατή η ύπαρξη τουλάχιστον ενός ατομικού τύπου. Στην περίπτωση της γλώσσας με ισότητα (ορισμός 5.12) θα αρκούσε η ύπαρξη μόνον του συμβόλου $=$.

να αντικατασταθεί με ισοδύναμη χρήση των $\neg$ και $\to$. Για τους ποσοδείκτες θα μπορούσαμε να περιοριστούμε στο $\forall$, αφού, όπως θα δούμε, κάθε $\exists x$ είναι ισοδύναμο με το $\neg\forall x\neg$. Σε ό,τι ακολουθήσει μερικές φορές θα περιοριζόμαστε σε τέτοιες πιο «οικονομικές» λύσεις για τις γλώσσες, χάριν ευκολίας.

Παράδειγμα 4.2 Για να ορίσω μία γλώσσα αρκεί να ορίσω το σύνολο των μη λογικών συμβόλων. Αυτά τα σύμβολα μαζί με τα λογικά θα αποτελούν το *αλφάβητο* της γλώσσας. Ορίζω τη γλώσσα $\mathcal{L}_A$ ως εξής: $\mathcal{L}_A = \{=, <, +, \cdot, 0, 1\}$. Η $\mathcal{L}_A$ είναι μία γλώσσα για την αριθμητική (που μπορεί να εκφράσει ιδιότητες των αριθμών). Εδώ τα $=, <$ είναι σύμβολα κατηγορημάτων δύο θέσεων και συμβολίζουν το ίσον και το μικρότερο. Τα $+$ και $\cdot$ είναι σύμβολα συναρτήσεων δύο θέσεων και συμβολίζουν την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό, και 0 και 1 είναι σύμβολα σταθερών και συμβολίζουν το μηδέν και το ένα.

Εδώ το σύμβολο $=$ χρησιμοποιήθηκε με δύο διαφορετικές σημασίες. Για να εξισώσει το $\mathcal{L}_A$ με το σύνολο των συμβόλων της γλώσσας, δηλαδή χρησιμοποιήθηκε ως σύμβολο της μεταγλώσσας και επίσης ως μέλος του συνόλου αυτού δηλαδή ως σύμβολο της γλώσσας. Αν θέλαμε να είμαστε πιο σωστοί, αλλά και πιο σχολαστικοί, θα χρησιμοποιούσαμε διαφορετικούς συμβολισμούς για τις διαφορετικές περιπτώσεις, π.χ. ως σύμβολο της γλώσσας το σύμβολο $\approx$. Θα παραμείνουμε όμως στην παραδοχή ότι τα συμφραζόμενα μας υποδεικνύουν με ποια έννοια χρησιμοποιούμε ένα σύμβολο.

Παράδειγμα 4.3 $\mathcal{L}_G = \{=, \circ, e\}$ είναι μία γλώσσα για τη θεωρία των ομάδων, όπου $=$ σύμβολο κατηγορήματος δύο θέσεων, $\circ$ σύμβολο συνάρτησης δύο θέσεων και θα συμβολίζει την πράξη $A \times A \to A$, όπου A είναι μία ομάδα (συμβολίζει δηλαδή την εσωτερική πράξη της ομάδας) και e σταθερά που θα συμβολίζει το ουδέτερο στοιχείο.

Έχοντας ορίσει το αλφάβητο μιας γλώσσας, θα θέλαμε να δούμε τι μπορούμε να φτιάξουμε που να «σημαίνει» κάτι δηλαδή τι μπορούμε να «πούμε» με βάση αυτό το αλφάβητο.

Ορισμός 4.4 *Έστω $\mathcal{L}$ μία γλώσσα (δηλαδή μας έχει δοθεί το αλφάβητό της).* Έκφραση *στην $\mathcal{L}$ είναι μία πεπερασμένη ακολουθία συμβόλων της γλώσσας.*

Εμάς βέβαια μας ενδιαφέρουν οι εκφράσεις που έχουν κάποιο νόημα. Πρώτα θα δούμε ποιες εκφράσεις της γλώσσας υποδηλώνουν αντικείμενα.

Ορισμός 4.5 *Ορίζουμε ποιες εκφράσεις είναι* όροι *με τον εξής επαγωγικό ορισμό:*

(i) Οι μεταβλητές και τα σύμβολα σταθερών είναι όροι.

(ii) Αν f_i^n είναι σύμβολο συνάρτησης n θέσεων και $t_1, \ldots, t_n$ είναι όροι τότε $f_i^n(t_1, \ldots, t_n)$ είναι όρος.

Π.χ. όροι στην $\mathcal{L}_A$ είναι οι 0, 1, $+(0,1)$, $+(+(0,1),1)$, $+(0,x_2)$ κλπ.

Ορισμός 4.6 Κλειστός όρος *είναι ο όρος που δεν περιέχει καμιά μεταβλητή. Π.χ.* $+(0,1)$ *είναι κλειστός όρος ενώ ο όρος* $+(0,x_2)$ *δεν είναι.*

Ορισμός 4.7 Ατομικό τύπο *ονομάζουμε κάθε έκφραση της μορφής* $R(t_1,\ldots,t_n)$, *όπου* R *είναι σύμβολο κατηγορήματος* n*-θέσεων και* $t_1,\ldots,t_n$ *είναι όροι. Διαισθητικά μας λέει ότι τα αντικείμενα που υποδηλώνονται από τους όρους* $t_1,\ldots,t_n$ *ικανοποιούν τη σχέση* R.

Ορισμός 4.8 *Ορίζουμε ποιες εκφράσεις είναι* τύποι *(μιας γλώσσας* $\mathcal{L}$*). Ο ορισμός είναι επαγωγικός:*

(i) Κάθε ατομικός τύπος είναι τύπος.

(ii) Αν ϕ_1, ϕ_2 *είναι τύποι, τότε οι εκφράσεις* $(\phi_1\wedge\phi_2)$, $(\phi_1\vee\phi_2)$, $(\phi_1\rightarrow\phi_2)$, $(\phi_1\leftrightarrow\phi_2)$, $(\neg\phi_1)$ *είναι τύποι.*

(iii) Αν x *είναι μεταβλητή και* ϕ *είναι τύπος, τότε οι εκφράσεις* $\exists x\phi$ *και* $\forall x\phi$ *είναι τύποι.*

Και βέβαια τελικά τύποι είναι μόνον οι εκφράσεις που σχηματίζονται σύμφωνα με τους κανόνες 1, 2, 3.

Παρατήρηση: Ό,τι έχουμε πει για τους γενικευμένους επαγωγικούς ορισμούς στη σελ. 10 ισχύει και εδώ. Δηλαδή μπορούμε να ορίσουμε ιδιότητες και να αποδείξουμε προτάσεις με επαγωγή (γενικευμένη) στους όρους, τύπους κλπ. Επίσης όταν γράφουμε τύπους σε μία γλώσσα μπορούμε να χρησιμοποιούμε ανορθογραφίες, π.χ. στην $\mathcal{L}_A$ μπορούμε να γράψουμε $\forall x(x=x)$ αντί για το πιο σωστό $\forall x=(x,x)$. Στον ορισμό των όρων και τύπων (ορισμός 4.5 και 4.8) υιοθετήσαμε τον λεγόμενο prefix συμβολισμό, δηλαδή το σύμβολο να προηγείται των ορισμάτων του. Το $+(x_1,x_2)$ είναι σε prefix συμβολισμό. Πιο οικείος όμως είναι ο infix συμβολισμός, οπότε κατ' αυτόν θα γράφουμε x_1+x_2. Θα χρησιμοποιούμε ελεύθερα και τον infix συμβολισμό για να είναι πιο ευανάγνωστες οι εκφράσεις μας.

Άλλα παραδείγματα τύπων στην $\mathcal{L}_A$ είναι $\forall x\forall y\forall z(x=y\wedge y=z\rightarrow x=z)$, $\forall x\exists y(x\leq y\wedge\neg(x=y))$ κ.ο.κ.

Ας γράψουμε δύο τύπους στη γλώσσα $\mathcal{L}_A$.

$$\forall x_1(x_1<x_2)$$

$$\exists x_1\forall x_2(x_1<x_2)$$

Υπάρχει μία σημαντική διαφορά μεταξύ τους. Ο δεύτερος αν τον μεταφράσουμε λέει «υπάρχει ένας αριθμός έτσι ώστε κάθε αριθμός να είναι μεγαλύτερός του». Ο πρώτος τύπος όμως μπορεί να νοηθεί σαν μετάφραση μιας μη πλήρους πρότασης, της «κάθε αριθμός είναι μικρότερος του __ ». Είμαστε σε αδυναμία να συμπληρώσουμε την πρόταση χωρίς να ξέρουμε τι να κάνουμε με τη μεταβλητή x_2. Σε τέτοιες περιπτώσεις λέμε ότι η x_2 είναι μία ελεύθερη μεταβλητή στην $\forall x_1(x_1 < x_2)$. Ή πιο σωστά ότι η εμφάνιση της x_2 στον τύπο είναι ελεύθερη.

Εμφάνιση ή εγγραφή μιας μεταβλητής σε έναν τύπο είναι η μεταβλητή που απαντάται σ' έναν τύπο σε μια συγκεκριμένη θέση. Π.χ. στον τύπο

$$\begin{array}{c}(\forall \underset{\substack{\uparrow\\1}}{x}(x<y)) \wedge (\underset{\substack{\uparrow\\2}}{x} = y)\end{array}$$

έχουμε δύο εγγραφές[5] της ίδιας μεταβλητής x στη θέση 1 και στη θέση 2.

Στους τύπους $\forall x\phi$ και $\exists x\phi$ ο τύπος ϕ ονομάζεται το *βεληνεκές* του ποσοδείκτη $\forall x$ ή του $\exists x$. Όταν μία εμφάνιση μιας μεταβλητής x βρίσκεται μέσα στο βεληνεκές ενός ποσοδείκτη $\forall x$ ή $\exists x$, τότε η εμφάνιση αυτή είναι *δεσμευμένη*· η εμφάνιση μιας μεταβλητής που δεν είναι δεσμευμένη λέγεται *ελεύθερη*.

Π.χ. στον πιο πάνω τύπο η εμφάνιση 1 της x είναι δεσμευμένη ενώ η εμφάνιση 2 της x είναι ελεύθερη.

Άσκηση 4.1 Δείτε ποιες εγγραφές των μεταβλητών είναι ελεύθερες ή δεσμευμένες στους πιο κάτω τύπους:

α1. $\forall x_3(\forall x_1 R_1^2(x_1, x_2) \to R_1^2(x_3, c_1))$

α2. $\forall x_2 R_1^2(x_3, x_2) \to \forall x_3 R_1^2(x_3, x_2)$

α3. $\forall x_2 \exists x_1 R_1^3(x_1, x_2, f_1^2(x_1, x_2)) \vee (\neg \forall x_1 R_1^2(x_2, f_1^1(x_1)))$

Λέμε ότι η μεταβλητή x εμφανίζεται ελεύθερη στον ϕ αν υπάρχει τουλάχιστον μια ελεύθερη εμφάνιση της x στον ϕ. Το σύνολο των ελεύθερων μεταβλητών του ϕ (συμβολισμός $EM(\phi)$) το ορίζουμε επαγωγικά ως εξής:

Ορισμός 4.9 *Επαγωγικά.*

α1. Αν ϕ είναι ατομικός τύπος, τότε το σύνολο $EM(\phi)$ είναι το σύνολο των μεταβλητών που εμφανίζονται στον ϕ.

α2. Αν $\phi = \neg\psi$, τότε $EM(\phi) = EM(\psi)$.

α3. Αν ϕ είναι $\phi_1 \to \phi_2$ ή $\phi_1 \wedge \phi_2$ ή $\phi_1 \vee \phi_2$ ή $\phi_1 \leftrightarrow \phi_2$ τότε $EM(\phi) = EM(\phi_1) \cup EM(\phi_2)$.

[5] Κάθε εμφάνιση της x στον ϕ αμέσως μετά από ένα $\forall$ ή $\exists$, δηλαδή στην περίπτωση $\forall x$ ή $\exists x$, δεν λογίζεται ως εμφάνιση της μεταβλητής στον ϕ.

α4. Αν ϕ είναι $\forall x\psi$, τότε $EM(\phi) = EM(\psi) \setminus \{x\}$.

Πολλές φορές τις ελεύθερες μεταβλητές $x_1, x_2, \ldots, x_n$ σε έναν τύπο ϕ τις εμφανίζουμε γράφοντας $\phi(x_1, \ldots, x_n)$. Όταν γράφουμε $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ εννοούμε $EM(\phi) \subseteq \{x_1, \ldots x_n\}$. Ο συμβολισμός είναι βολικός γιατί τότε με $\phi(t_1, \ldots, t_n)$ συμβολίζουμε την (ταυτόχρονη) αντικατάσταση των ελεύθερων εμφανίσεων των $x_1, \ldots, x_n$ αντίστοιχα με τους όρους $t_1, \ldots, t_n$. Π.χ. αν $\phi(x_1, x_2) \equiv (x_1 = x_2) \wedge (\forall x_1(x_1 < x_2))$ και $t_1 \equiv c_1$, $t_2 \equiv f(x_3)$, τότε $\phi(t_1, t_2) \equiv (c_1 = f(x_3)) \wedge (\forall x_1(x_1 < f(x_3)))$.

Αν θέλουμε να γράψουμε με μεγαλύτερη ακρίβεια την αντικατάσταση μεταβλητών από όρους, γράφουμε $\phi(t_1/x_1, \ldots, t_n/x_n)$ και εννοούμε ότι ο όρος t_i αντικαθιστά (ταυτόχρονα με τους άλλους) όλες τις ελεύθερες εμφανίσεις της x_i στον ϕ. Έτσι λοιπόν γράφουμε $\phi(t/x)$ όταν ο t αντικαθιστά τις ελεύθερες εμφανίσεις της x. Βέβαια όταν δεν υπάρχει λόγος σύγχυσης γράφουμε απλά $\phi(t_1, \ldots, t_n)$ ή $\phi(t)$, αντίστοιχα. Ας σημειωθεί ότι, διατηρώντας τον ίδιο συμβολισμό και για την αντικατάσταση σε όρους, αν u και t είναι όροι, τότε θα συμβολίζουμε με $u(t/x)$ τον όρο που προκύπτει αν στον όρο u αντικαταστήσουμε όλες τις εμφανίσεις της μεταβλητής x με τον όρο t. Εδώ δεν χρειάζεται να πούμε «τις ελεύθερες εμφανίσεις» αφού στους όρους δεν υπάρχουν τελεστές δέσμευσης ώστε να δημιουργηθούν δεσμευμένες εμφανίσεις μεταβλητών. Επεκτείνοντας το παραπάνω με τον προφανή τρόπο, μπορούμε να γράφουμε και $u(t_1/x_1, \ldots, t_n/x_n)$.

Αν $\phi(x)$ ένας τύπος και t ένας όρος, τότε λέμε ότι η x είναι *αντικαταστάσιμη* από τον t στον $\phi(x)$ αν καμιά ελεύθερη εγγραφή της x στον $\phi(x)$ δεν κείται στο βεληνεκές ενός ποσοδείκτη $\forall y$ ή $\exists y$, όπου y είναι μία μεταβλητή που εμφανίζεται στον t, δηλαδή ισοδύναμα όταν με την αντικατάσταση $\phi(t)$ καμιά μεταβλητή του t δεν δεσμεύεται.

Π.χ. η x δεν είναι αντικαταστάσιμη από τον όρο y στον τύπο $\forall y(x < y)$. Είναι φανερό ότι αν ένας όρος δεν περιέχει μεταβλητές δηλαδή είναι ένας κλειστός όρος, τότε οποιαδήποτε μεταβλητή είναι πάντα αντικαταστάσιμη από τον όρο αυτό σε οποιονδήποτε τύπο. Επίσης ότι κάθε μεταβλητή είναι αντικαταστάσιμη από τον εαυτό της.

Μπορούμε να ορίσουμε την ανωτέρω έννοια επαγωγικά, ως εξής:

Ορισμός 4.10 *x είναι αντικαταστάσιμη από τον t στον ϕ αν*

α1. ϕ είναι ατομικός τύπος.

α2. ϕ είναι της μορφής $\neg\psi$ και x είναι αντικαταστάσιμη από τον t στον ψ.

α3. ϕ είναι της μορφής $\phi_1 \wedge \phi_2$ ή $\phi_1 \vee \phi_2$ ή $\phi_1 \rightarrow \phi_2$ ή $\phi_1 \leftrightarrow \phi_2$ και η x είναι αντικαταστάσιμη από τον t στον ϕ και στον ψ.

α4. ϕ είναι της μορφής $\forall y\psi$ και

- *η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον $\forall y\psi$ ή*

- *η y δεν εμφανίζεται στον t και η x είναι αντικαταστάσιμη από τον t στον ψ.*

Παράδειγμα 4.11 *Στα παρακάτω έχουμε:*

(i) *Η x είναι αντικαταστάσιμη από τον όρο y στον $R_1^1(x)$, αλλά η x δεν είναι αντικαταστάσιμη από τον y στον $\forall y R_1^1(x)$.*

Η x_1 είναι αντικαταστάσιμη από τον όρο $f_1^2(x_1, x_3)$

στον $\forall x_2 R_1^2(x_1, x_2) \to R_1^1(x_1)$ αλλά δεν είναι αντικαταστάσιμη από τον $f_1^2(x_1, x_3)$ στον $\exists x_3 \forall x_2 R_1^2(x_1, x_2) \to R_1^1(x_1)$.

(ii) *Η x είναι αντικαταστάσιμη από την x σε κάθε τύπο.*

Ορισμός 4.12 Πρόταση *είναι κάθε τύπος που δεν έχει ελεύθερες εμφανίσεις μεταβλητών. Θα δούμε ότι πρόταση είναι ένας πλήρης ισχυρισμός που ερμηνευόμενος γίνεται είτε αληθής ή ψευδής.*

4.2 Δομές (Ερμηνείες)

Μια πρωτοβάθμια κατηγορηματική γλώσσα είναι κάτι το τυπικό. Μπορούμε να φανταστούμε τις εκφράσεις της σαν αρθρώσεις συμβόλων που δεν έχουν κανένα νόημα. Μεταξύ αυτών των εκφράσεων έχουν ορισθεί μερικές (οι τύποι και οι προτάσεις) ώστε να είναι επιδεκτές νοήματος (μιας σημασίας ή ερμηνείας). Λέμε επιδεκτές διότι θεωρούμε ότι ως στοιχεία της γλώσσας αυτές είναι σύμβολα (σύνολα συμβόλων) και τίποτε άλλο.

Ορισμός 4.13 Δομή *ή* Ερμηνεία $\mathcal{A}$ *για μία πρωτοβάθμια κατηγορηματική γλώσσα $\mathcal{L}$ είναι ένα σύστημα αποτελούμενο από:*

α1. *Ένα μη κενό σύνολο A, το πεδίο της δομής, που το συμβολίζουμε με $|\mathcal{A}|$. Φανταζόμαστε ότι A είναι το σύμπαν των αντικειμένων στα οποία αναφερόμαστε μέσω της πρωτοβάθμιας γλώσσας.*

α2. *Μία αντιστοίχιση ενός στοιχείου $c^{\mathcal{A}} \in A$ σε κάθε σύμβολο σταθεράς c της γλώσσας $\mathcal{L}$.*

α3. *Μία αντιστοίχιση μιας συνάρτησης με n μεταβλητές $f^{\mathcal{A}} : A^n \to A$ σε κάθε σύμβολο συνάρτησης με n θέσεις f της γλώσσας $\mathcal{L}$.*

α4. *Μία αντιστοίχιση μιας n-μελούς σχέσης $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^n$ για κάθε σύμβολο κατηγορήματος n-θέσεων R της γλώσσας $\mathcal{L}$.*

Μια δομή λοιπόν δίνει νόημα σε μία τυπική γλώσσα (ένα νόημα που μέχρι τώρα το στερούνταν). Το νόημα αυτό το παίρνει με το να αποδοθεί μία πραγματικότητα στα βασικά σύμβολα της γλώσσας δηλαδή στις σταθερές, στις συναρτήσεις και στα κατηγορήματα. Υποθέτουμε ότι τα άλλα σύμβολα της γλώσσας όπως οι σύνδεσμοι και οι ποσοδείκτες έχουν πάντα την κανονική φυσική τους σημασία, πράγμα που θα δούμε πιο κάτω.

Αν $\mathcal{L}$ είναι μία γλώσσα, είδαμε ότι μπορούμε να την παρουσιάσουμε ως $\mathcal{L} = \{R, \ldots, f, \ldots, c, \ldots\}$, όπου με $R, \ldots$ καταγράφουμε όλα τα σύμβολα κατηγορημάτων της γλώσσας, με $f, \ldots$ τα σύμβολα συναρτήσεων και με $c, \ldots$ τα σύμβολα σταθερών. Την ερμηνεία $\mathcal{A}$ για την $\mathcal{L}$ μπορούμε να την παρουσιάσουμε ως $\mathcal{A} = \langle |\mathcal{A}|, R^{\mathcal{A}}, \ldots, f^{\mathcal{A}}, \ldots, c^{\mathcal{A}}, \ldots \rangle$, όπου $\sigma^{\mathcal{A}}$ είναι η αντίστοιχη ερμηνεία (ορισμός 4.13) για κάθε μη λογικό σύμβολο σ της $\mathcal{L}$.

Π.χ. μια ερμηνεία της $\mathcal{L}_A$ του παραδείγματος 4.2 μπορεί να παρουσιαστεί ως $\mathcal{A} = \langle |\mathcal{A}|, =^{\mathcal{A}}, <^{\mathcal{A}}, +^{\mathcal{A}}, \cdot^{\mathcal{A}}, 0^{\mathcal{A}}, 1^{\mathcal{A}} \rangle$. Μία από αυτές τις ερμηνείες της $\mathcal{L}_A$ είναι η συνήθης ερμηνεία $\mathcal{N}_A = \langle \mathbb{N}, =^{\mathcal{N}_A}, <^{\mathcal{N}_A}, \ldots \rangle$, όπου $=^{\mathcal{N}_A}$ είναι η ισότητα και τα υπόλοιπα στοιχεία είναι οι συνήθεις σχέσεις (το μικρότερο), συναρτήσεις (πρόσθεση, πολ/σμός), μηδέν και ένα στους φυσικούς αριθμούς. Μερικές φορές, όταν δεν υπάρχει σύγχυση, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα ίδια σύμβολα και ως σύμβολα της γλώσσας και ως στοιχεία της δομής, π.χ. η δομή $\mathcal{N}_A$ μπορεί να γραφτεί και ως $\mathcal{N}_A = \langle \mathbb{N}, =, <, +, \cdot, 0, 1 \rangle$.

Ορισμός της αλήθειας του Tarski

Για να ορίσουμε πότε μία πρόταση της γλώσσας $\mathcal{L}$ είναι αληθής στην ερμηνεία της $\mathcal{L}$, την $\mathcal{A}$, πρέπει να δώσουμε έναν ορισμό που να «περνάει» μέσα από τους τύπους, και επειδή αυτοί μπορεί να έχουν ελεύθερες μεταβλητές, άρα όχι κάποιο τελικό νόημα, γι' αυτό φανταζόμαστε ότι σε κάθε μεταβλητή έχει αντιστοιχηθεί ένα στοιχείο τής δομής ώστε να κλείνουμε την ανοικτή σημασία των ελεύθερων μεταβλητών:

Ορισμός 4.14 *Έστω $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ το σύνολο των μεταβλητών της γλώσσας $\mathcal{L}$. Και έστω $\mathcal{A}$ μία ερμηνεία της $\mathcal{L}$. Τότε* αποτίμηση *(στην $\mathcal{A}$) ονομάζεται κάθε συνάρτηση $s : V \to |\mathcal{A}|$. Επειδή μέσω μιας αποτίμησης s κάθε μεταβλητή παριστάνει κάποιο στοιχείο της δομής, το ίδιο θα συμβαίνει και για κάθε όρο της γλώσσας. Το στοιχείο της δομής που παριστάνει ο όρος t (μέσω της αποτίμησης) και το οποίο συμβολίζουμε με $\overline{s}(t)$ το ορίζουμε με επαγωγή στους όρους ως εξής:*

(i) Αν t είναι μία μεταβλητή x, θέτουμε $\overline{s}(t) = s(x)$.

(ii) Αν t είναι μία σταθερά c, θέτουμε $\overline{s}(t) = c^{\mathcal{A}}$.

(iii) Αν $t_1, \ldots, t_n$ είναι όροι (για τους οποίους ήδη ξέρουμε τα $\overline{s}(t_1), \ldots, \overline{s}(t_n)$) και f είναι ένα σύμβολο συνάρτησης με n θέσεις τότε $\overline{s}(f(t_1, \ldots, t_n)) = f^{\mathcal{A}}(\overline{s}(t_1), \ldots, \overline{s}(t_n))$.

Βλέπουμε ότι λόγω της 1 η $\overline{s}$ είναι επέκταση της s.

Παράδειγμα 4.15 Έστω $\mathcal{L}_A$ η γλώσσα του παραδείγματος 4.2. Έστω $\mathcal{A}$ μία ερμηνεία της με $|\mathcal{A}| = \mathbb{N}$ = το σύνολο των φυσικών αριθμών, $=^{\mathcal{A}}$ την ισότητα μεταξύ φυσικών, $<^{\mathcal{A}}$ τη σχέση διάταξης στο $\mathbb{N}$, $+^{\mathcal{A}}$ και $\cdot^{\mathcal{A}}$ η πρόσθεση και πολλαπλασιασμός των φυσικών, και $0^{\mathcal{A}}$, $1^{\mathcal{A}}$ αντίστοιχα το μηδέν και το ένα, δηλαδή $\mathcal{A} = \mathcal{N}_A = \langle \mathbb{N}, <, +, \cdot, 0, 1\rangle$. Έστω $s : V \to \mathbb{N}$ η αποτίμηση $s(x_\kappa) = 2\kappa$. Τότε $\overline{s}(x_1 \cdot x_2 + 1) = s(x_1) \cdot^{\mathcal{A}} s(x_2) +^{\mathcal{A}} 1^{\mathcal{A}} = 9$.

Ορισμός 4.16 *Δοθέντων των $\mathcal{A}$ και s όπως πιο πάνω, ορίζουμε τι σημαίνει η $\mathcal{A}$ να ικανοποιεί τον τύπο ϕ με την s, πράγμα που συμβολίζουμε με $\models_{\mathcal{A}} \phi[s]$, με επαγωγή:*

(i) Αν ϕ είναι ατομικός τύπος, έστω $R(t_1, \ldots, t_n)$, τότε

$$\models_{\mathcal{A}} R(t_1, \ldots, t_n)[s] \overset{o\rho}{\iff} \langle \overline{s}(t_1), \ldots, \overline{s}(t_n)\rangle \in R^{\mathcal{A}}$$

(δηλαδή τα αντικείμενα $\overline{s}(t_1), \ldots, \overline{s}(t_n)$ βρίσκονται στη σχέση $R^{\mathcal{A}}$ μεταξύ τους).

(ii) Αν ϕ είναι $\neg\psi$ για κάποιο τύπο ψ (ο οποίος έχει «κτισθεί» πριν από τον ϕ και επομένως ξέρουμε την έννοια του $\models_{\mathcal{A}} \psi[s]$), τότε

$$\models_{\mathcal{A}} \neg\psi[s] \overset{o\rho}{\iff} \textit{όχι} \ \models_{\mathcal{A}} \psi[s] \quad (\textit{ή} \ \not\models_{\mathcal{A}} \psi[s])$$

(iii) Αν ϕ είναι $(\psi_1 \wedge \psi_2)$ ή $(\psi_1 \vee \psi_2)$ ή $(\psi_1 \to \psi_2)$

$$\models_{\mathcal{A}} (\psi_1 \wedge \psi_2)[s] \overset{o\rho}{\iff} \models_{\mathcal{A}} \psi_1[s] \ \textit{και} \ \models_{\mathcal{A}} \psi_2[s]$$

$$\models_{\mathcal{A}} (\psi_1 \vee \psi_2)[s] \overset{o\rho}{\iff} \models_{\mathcal{A}} \psi_1[s] \ \textit{ή} \ \models_{\mathcal{A}} \psi_2[s]$$

$$\models_{\mathcal{A}} (\psi_1 \to \psi_2)[s] \overset{o\rho}{\iff} \not\models_{\mathcal{A}} \psi_1[s] \ \textit{ή} \ \models_{\mathcal{A}} \psi_2[s]$$

(iv) Αν ϕ είναι $\forall x\psi$ (άρα το ψ κτισμένο πριν από το ϕ και άρα ξέρουμε την $\models_{\mathcal{A}} \psi[s]$ όχι μόνο για την s που εξετάζουμε αλλά και για οποιαδήποτε άλλη s διαφορετική), τότε

$$\models_{\mathcal{A}} \forall x\psi \overset{o\rho}{\iff} \models_{\mathcal{A}} \psi[s(x/a)] \ \textit{για όλα τα} \ a \in |\mathcal{A}|, \ \textit{όπου}$$

$$s(x/a) : V \to |\mathcal{A}| \ \textit{είναι η} \ s(x/a)(y) = \begin{cases} s(y) & \textit{αν} \ y \not\equiv x \\ a & \textit{αν} \ y \equiv x \end{cases}$$

Δηλαδή $s(x/a)$ είναι ίδια με την s, με τη διαφορά ότι στη μεταβλητή x παίρνει την τιμή a.

(v) Αν ϕ είναι $\exists x\psi$ τότε

$$\models_{\mathcal{A}} \exists x\psi[s] \overset{o\rho}{\iff} \textit{υπάρχει ένα} \ a \in |\mathcal{A}| \ \textit{ώστε} \ \models_{\mathcal{A}} \psi[s(x/a)]$$

Πρόταση 4.17 *Έστω ϕ τύπος που οι ελεύθερες μεταβλητές του είναι υποσύνολο του $\{y_1, \ldots, y_\kappa\}$, όπου $y_1, \ldots, y_\kappa$ μεταβλητές. Έστω s και s' απονομές για τις οποίες $s(y_1) = s'(y_1), \ldots, s(y_\kappa) = s'(y_\kappa)$. Τότε*

$$\models_{\mathcal{A}} \phi[s] \iff \models_{\mathcal{A}} \phi[s']$$

Απόδειξη Αποδεικνύουμε πρώτα ότι αν t όρος με μεταβλητές μεταξύ των $y_1, \ldots, y_\kappa$ τότε $\overline{s}(t) = \overline{s'}(t)$. [Με επαγωγή στον t.]

- αν t μεταβλητή x τότε $x = y_i$ για κάποιο $i \in \{1, \ldots, \kappa\}$, άρα $s(y_i) = s'(y_i)$.
- Αν t σύμβολο σταθεράς c τότε $\overline{s}(t) = c^{\mathcal{A}} = \overline{s'}(t)$.
- Αν $t = f^n(t_1, \ldots, t_n)$, τότε από την επαγ. υπόθ. $\forall i = 1, \ldots, n$ $\overline{s}(t_i) = \overline{s'}(t_i)$. Άρα $\overline{s}(t) = (f^n)^{\mathcal{A}}(\overline{s}(t_1), \ldots, \overline{s}(t_n)) = (f^n)^{\mathcal{A}}(\overline{s'}(t_1), \ldots, \overline{s'}(t_n)) = \overline{s'}(t)$.

Κατόπιν αποδεικνύουμε την πρόταση με επαγωγή στον ϕ.

- ν ϕ είναι ατομικός, έστω $\phi \equiv R(t_1, \ldots, t_n)$ τότε

$$\begin{aligned} \models_{\mathcal{A}} \phi[s] &\Leftrightarrow \models_{\mathcal{A}} R(t_1, \ldots, t_n) \\ &\Leftrightarrow R^{\mathcal{A}}(\overline{s}(t_1), \ldots, \overline{s}(t_n)) \\ &\Leftrightarrow R^{\mathcal{A}}(\overline{s'}(t_1), \ldots, \overline{s'}(t_n)) \\ &\Leftrightarrow \models_{\mathcal{A}} \phi[s']. \end{aligned}$$

- Το επαγωγικό βήμα σαν άσκηση. □

Παρατηρούμε ότι αν ϕ είναι πρόταση, τότε το σύνολο των ελεύθερων μεταβλητών της ϕ είναι υποσύνολο του κενού συνόλου. Άρα, απ' την πρόταση 4.17 έπεται ότι για κάθε αποτιμήσεις s και s' έχουμε ότι $\models_{\mathcal{A}} \phi[s] \Leftrightarrow \models_{\mathcal{A}} \phi[s']$. Άρα είτε για όλες τις $s : V \to |\mathcal{A}|$ έχουμε $\models_{\mathcal{A}} \phi[s]$ είτε για όλες τις $s : V \to |\mathcal{A}|$ έχουμε $\not\models_{\mathcal{A}} \phi[s]$. Στην πρώτη περίπτωση λέμε ότι η ϕ είναι *αληθής* στην $\mathcal{A}$ και γράφουμε $\models_{\mathcal{A}} \phi$, στη δεύτερη περίπτωση λέμε ότι η ϕ είναι *ψευδής* στην $\mathcal{A}$ και γράφουμε $\not\models_{\mathcal{A}} \phi$. Πολλές φορές, αντί του $\vDash_{\mathcal{A}} \phi$ γράφουμε $\mathcal{A} \vDash \phi$ και αντί του $\nvDash_{\mathcal{A}} \phi$ γράφουμε $\mathcal{A} \nvDash \phi$.

Παράδειγμα 4.18 Έστω $\mathcal{L} = \{<\}$ και $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, < \rangle$ και έστω s με $s(x) = 3$ και $s(y) = 5$. Τότε $\models_{\mathcal{A}} x < y[s]$ διότι $\langle s(x), s(y) \rangle \in <^{\mathcal{A}}$, δηλαδή $3 < 5$.

Παράδειγμα 4.19 Έστω $\mathcal{L} = \{<, +, 0\}$ και ερμηνεία $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, <^{\mathcal{A}}, +^{\mathcal{A}}, 0^{\mathcal{A}} \rangle$. Τότε $\models_{\mathcal{A}} \forall x(0 < x + 1)[s]$, με οποιαδήποτε s, διότι αν $a \in \mathbb{N}$ τότε έχουμε $\models_{\mathcal{A}} 0 < x + 1[s(x/a)]$ διότι αυτό σημαίνει ότι $0^{\mathcal{A}} <^{\mathcal{A}} s(x/a)(x) +^{\mathcal{A}} 1$, δηλαδή $0 < a + 1$, πράγμα ορθό στο $\mathbb{N}$.

Ορισμός 4.20 *Αν ϕ είναι τύπος (που πιθανόν να έχει και ελεύθερες μεταβλητές), τότε λέμε ότι ϕ είναι αληθής στην ερμηνεία $\mathcal{A}$ όταν για κάθε αποτίμηση $s : V \to |\mathcal{A}|$ έχουμε ότι $\models_{\mathcal{A}} \phi[s]$ και τότε γράφουμε επίσης $\models_{\mathcal{A}} \phi$ ή $\mathcal{A} \models \phi$. Αν ένας τύπος ϕ, της γλώσσας $\mathcal{L}$, είναι αληθής σε όλες τις ερμηνείες της $\mathcal{L}$, λέμε ότι ο ϕ είναι έγκυρος τύπος ή λογικά έγκυρος τύπος και γράφουμε $\models \phi$.*

Άμεσα, από τον ορισμό, έχουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 4.21 *Αν $\phi(x_1, \ldots, x_k)$ είναι τύπος τότε ϕ είναι αληθής στην $\mathcal{A}$ αν και μόνον αν $\models_{\mathcal{A}} \forall x_1 \cdots \forall x_k \phi(x_1, \ldots, x_k)$ [η πρόταση $\forall x_1 \cdots \forall x_k \phi(x_1, \ldots, x_k)$ λέγεται και καθολική κλειστότητα του τύπου ϕ].*

Ορισμός 4.22 *Αν Σ είναι ένα σύνολο τύπων της γλώσσας $\mathcal{L}$, τότε η ερμηνεία $\mathcal{A}$ της $\mathcal{L}$ λέγεται μοντέλο του Σ (ή ικανοποιεί το Σ), αν για κάθε $\sigma \in \Sigma$ έχουμε ότι σ είναι αληθής στην ερμηνεία $\mathcal{A}$.*

Είναι προφανές ότι $\mathcal{A}$ είναι μοντέλο του Σ αν και μόνον αν $\mathcal{A}$ είναι μοντέλο του Σ', όπου Σ' είναι το σύνολο των προτάσεων που είναι οι καθολικές κλειστότητες των στοιχείων του Σ.

Ορισμός 4.23 *Έστω $\Sigma \cup \{\phi\}$ σύνολο προτάσεων της $\mathcal{L}$. Γράφουμε $\Sigma \models \phi$ αν ϕ είναι αληθής σε όλα τα μοντέλα του Σ. Ο ορισμός επεκτείνεται και στην περίπτωση που $\Sigma \cup \{\phi\}$ είναι σύνολο τύπων. $\Sigma \models \phi$ σημαίνει και σ' αυτή την περίπτωση ότι ο τύπος ϕ είναι αληθής σε όλα τα μοντέλα του Σ.*

Ορισμός 4.24 *Έστω $\Sigma \cup \{\phi\}$ σύνολο τύπων. Λέμε ότι Σ λογικά συνεπάγεται τον ϕ αν για κάθε $\mathcal{A}$ και κάθε αποτίμηση s στην $\mathcal{A}$, αν αληθεύει ότι $\models_{\mathcal{A}} \psi[s]$ για κάθε $\psi \in \Sigma$, τότε $\models_{\mathcal{A}} \phi[s]$.*

Πρόταση 4.25 *Αν Σ λογικά συνεπάγεται τον ϕ τότε $\Sigma \models \phi$.*

Απόδειξη Έστω $\mathcal{A}$ μοντέλο του Σ και έστω s αποτίμηση στην $\mathcal{A}$. Τότε επειδή κάθε $\psi \in \Sigma$ είναι αληθής στην $\mathcal{A}$, ισχύει ότι $\models_{\mathcal{A}} \psi[s]$, για κάθε $\psi \in \Sigma$. Άρα και $\models_{\mathcal{A}} \phi[s]$, επειδή Σ λογικά συνεπάγεται τον ϕ. □

Η σχέση $\Sigma \models \phi$ μπορεί να νοηθεί ως εξής: Έστω ότι ισχύουν αυτά που διατυπώνονται μέσω των προτάσεων του Σ. Άρα θα ισχύει και ο ϕ, δηλαδή μπορεί να νοηθεί ως ένα είδος έγκυρου «συλλογισμού». Αν ο συλλογισμός αυτός δεν είναι έγκυρος θα πρέπει $\Sigma \not\models \phi$. Ας δούμε ένα παράδειγμα με έναν συλλογισμό στην καθημερινή γλώσσα.

Κανένας σπουδαστής δεν είναι τρομοκράτης.
Μερικοί φανατικοί είναι τρομοκράτες.
ΑΡΑ
Μερικοί σπουδαστές είναι φανατικοί.

Μπορούμε να τυποποιήσουμε αυτόν τον συλλογισμό εισάγοντας σύμβολα μονοθέσιων κατηγορημάτων Σ, T και Φ για τα Σπουδαστής, Τρομοκράτης και Φανατικός, και να διατυπώσουμε τον συλλογισμό αποδεικνύοντας ότι δεν είναι έγκυρος, αποδεικνύοντας δηλαδή ότι $\forall x(\Sigma(x) \to \neg T(x)),\ \exists x(\Phi(x) \wedge T(x)) \not\models \exists x(\Sigma(x) \wedge \Phi(x))$. Αυτό φαίνεται επιλέγοντας μια ερμηνεία $\mathcal{A}$ με $|\mathcal{A}| = \{a, b, c\}$ και $\Sigma^{\mathcal{A}} = \{a\}$, $T^{\mathcal{A}} = \{b\}$, $\Phi^{\mathcal{A}} = \{b, c\}$, η οποία καθιστά τις υποθέσεις αληθείς ενώ το συμπέρασμα ψευδές.

Λήμμα 4.26 *Έστω t και u όροι, s αποτίμηση. Έστω $t' = t(u/x)$ και $s' = s(x/\overline{s}(u))$. Τότε $\overline{s}(t') = \overline{s'}(t)$.*

Μια γραφική απόδοση του λήμματος είναι η παρακάτω:

$$\begin{tikzcd}
t \arrow[rr, "\text{αντικατάσταση}"] \arrow[dr, "\overline{s(x/\overline{s}(u))}"'] & & t(u/x) \arrow[dl, "\overline{s}"] \\
& |\mathcal{A}| &
\end{tikzcd}$$

Απόδειξη Με επαγωγή στον όρο t. Αν $t = x$ τότε $t(u/x) = u$. Άρα $\overline{s}(t(u/x)) = \overline{s}(u)$ το οποίο ισούται με το $\overline{s'}(t)$ διότι $\overline{s'}(t) = \overline{s'}(x) = \overline{s}(u)$, [διότι η τιμή του s' στο x είναι το $\overline{s}(u)$].

Αν $t = y$ και $y \neq x$ τότε $t(u/x) = t$. Άρα $\overline{s}(t(u/x)) = \overline{s}(t) = \overline{s}(y) = \overline{s'}(y)$, [διότι s και s' έχουν διαφορετική τιμή μόνον στο x].

Αν $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ τότε $\overline{s}(t(u/x)) = \overline{s}(f(t_1(u/x), \ldots, t_n(u/x))) \overset{\text{E.Y.}}{=} f^{\mathcal{A}}(\overline{s'}(t_1), \ldots, \overline{s'}(t_n)) = \overline{s'}(f(t_1, \ldots, t_n)) = \overline{s'}(t)$. □

Πρόταση 4.27 $\models_{\mathcal{A}} \phi(t/x)[s] \Leftrightarrow \models_{\mathcal{A}} \phi[s']$, *όπου $s' = s(x/\overline{s}(t))$ και x είναι αντικαταστάσιμη από τον t στον ϕ.*

Απόδειξη Με επαγωγή στον ϕ.

Δύο είναι οι κύριες περιπτώσεις:

Περίπτωση Α: $\phi = \forall y \psi$ και x όχι ελεύθερη στον ϕ.

Τότε s και $s(x/\overline{s}(t))$ συμφωνούν σε όλες τις ελεύθερες μεταβλητές του ϕ και $\phi(t/x) = \phi$.

Περίπτωση Β: $\phi = \forall y \psi$ και x εμφανίζεται ελεύθερη στον ϕ.

Επειδή x αντικαταστάσιμη από τον t στον ϕ, έπεται ότι y δεν εμφανίζεται στον t και βέβαια x αντικαταστάσιμη από τον t στον ψ. Επειδή y δεν εμφανίζεται στον t έχουμε ότι

$$\overline{s}(t) = \overline{s(y/d)}(t), \ \text{ για κάθε } d \in |\mathcal{A}| \ (*)$$

Επειδή $x \neq y$, $\phi(t/x) = \forall y \psi(t/x)$. Άρα

$\models_{\mathcal{A}} \phi(t/x)[s] \Leftrightarrow$ για κάθε d, $\models_{\mathcal{A}} \psi(t/x)[s(y/d)]$

$\overset{\text{E.Y.}}{\Leftrightarrow}$ για κάθε d, $\models_{\mathcal{A}} \psi[s(y/d)(x/\overline{s(y/d)}(t))]$

$\overset{*}{\Leftrightarrow}$ για κάθε d, $\models_{\mathcal{A}} \psi[s(y/d)(x/\overline{s}(t))]$

$\Leftrightarrow\ \models_{\mathcal{A}} \forall y \psi[s(x/\overline{s}(t))]$. □

Πόρισμα 4.1 *Αν* $\models_{\mathcal{A}} \forall x\phi[s]$ *τότε* $\models_{\mathcal{A}} \phi(t/x)[s]$.

Απόδειξη Επειδή $\models_{\mathcal{A}} \forall x\phi[s]$, έχουμε ότι $\models_{\mathcal{A}} \phi[s(x/d)]$, για κάθε $d \in |\mathcal{A}|$. Έστω $d = \overline{s}(t)$. Τότε $\models_{\mathcal{A}} \phi[s(x/\overline{s}(t))]$, οπότε από πρόταση 4.27 $\models_{\mathcal{A}} \phi(t/x)[s]$.

Πόρισμα 4.2 *Ο τύπος* $\forall x\phi \rightarrow \phi(t/x)$ *είναι έγκυρος.*

4.3 Ασκήσεις

1. Αποδείξτε ότι οι τύποι

α1. $\forall x\phi(x) \rightarrow \phi(t)$ [όπου t είναι αντικαταστάσιμος για την x στον $\phi(x)$]

α2. $\forall x(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \forall x\psi)$ [όπου ο ϕ δεν έχει ελεύθερες εγγραφές της x]

είναι αληθείς σε όλες τις ερμηνείες.

2. Λέμε ότι ένας τύπος είναι *στιγμιότυπο ταυτολογίας* όταν έχει προκύψει από έναν προτασιακό τύπο που είναι ταυτολογία μετά από αντικατάσταση όλων των προτασιακών μεταβλητων με τύπους της γλώσσας. Π.χ. για οποιουσδήποτε τύπους ϕ και ψ ο τύπος $\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$ είναι περίπτωση ταυτολογίας μια και έχει προκύψει από την ταυτολογία $A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow A_1)$ όπου έχουμε αντικαταστήσει την A_1 με ϕ και την A_2 με ψ. Αποδείξτε ότι κάθε περίπτωση ταυτολογίας είναι αληθής σε κάθε ερμηνεία $\mathcal{A}$.

3. Αποδείξτε ότι ο τύπος

$$\forall x_2 \exists x_1 R_1^2(x_1, x_2) \rightarrow \exists x_1 \forall x_2 R_1^2(x_1, x_2)$$

δεν είναι λογικά έγκυρος.

4. Δείξτε ότι οι τύποι

$$(\forall x_1 R_1^1(x_1) \rightarrow \forall x_1 R_2^1(x_1)) \rightarrow \forall x_1(R_1^1(x_1) \rightarrow R_1^2(x_1))$$

και

$$\forall x_1(R_1^1(x_1) \vee R_2^1(x_1)) \rightarrow (\forall x_1 R_1^1(x_1) \vee \forall x_1 R_2^1(x_1))$$

δεν είναι λογικά έγκυροι.

5. Δείξτε ότι οι κάτωθι τύποι είναι λογικά έγκυροι.

$$\left.\begin{array}{l} \text{α1. } \forall x\phi \leftrightarrow \neg\exists x\neg\phi \\ \text{α2. } \exists x\phi \leftrightarrow \neg\forall x\neg\phi \end{array}\right\} \text{ Άρα καθένα από τα } \forall \text{ και } \exists \text{ ορίζεται συναρτήσει του άλλου.}$$

α1. $\forall x(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x\phi \rightarrow \forall x\psi)$

α2. $(\forall x\phi \wedge \forall x\psi) \leftrightarrow \forall x(\phi \wedge \psi)$

α3. $(\forall x\phi \vee \forall x\psi) \rightarrow \forall x(\phi \vee \psi)$

α4. $\exists x\exists y\phi \leftrightarrow \exists y\exists x\phi$

α5. $\exists x\forall y\phi \rightarrow \forall y\exists x\phi$

6. Έστω $\mathcal{L}$ μια πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P, ένα διθέσιο συναρτησιακό σύμβολο f και ένα σύμβολο σταθεράς c. Έστω $\mathcal{A}$ μια ερμηνεία της $\mathcal{L}$ με

$$|\mathcal{A}| = \mathbb{Z},\ <m,n> \in P^{\mathcal{A}} \ \text{ ανν } \ m < n,\ f^{\mathcal{A}}(m,n) = m - n,\ c^{\mathcal{A}} = 0.$$

Εξετάστε ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις αληθεύουν στην $\mathcal{A}$:

$$\exists x_2 \forall x_1 P(x_1, f(f(x_1, c), x_2)),\ \ \forall x_1 \forall x_2 P(x_1, f(x_1, x_2)).$$

7. Δείξτε (χρησιμοποιώντας τον ορισμό του Tarski) ότι καμιά από τις ακόλουθες προτάσεις δεν είναι λογική συνέπεια των άλλων δύο (όπου P είναι διμελές κατηγορηματικό σύμβολο):

α1. $\forall x \forall y \forall z [P(x,y) \to (P(y,z) \to P(x,z))]$

α2. $\forall x \forall y [P(x,y) \to (P(y,x) \to x = y)]$

α3. $\forall x \exists y P(x,y) \to \exists y \forall x P(x,y)$.

8. Έστω $\mathcal{L}_1$ γλώσσα χωρίς συναρτησιακά σύμβολα και σύμβολα σταθερών και P μονομελές κατηγορηματικό σύμβολο της $\mathcal{L}_1$. Για τυχόντα τύπο φ, ορίζουμε τη «σχετικοποίηση του φ ως προς P», συμβολικά φ^P, ως εξής:

$\varphi^P = \varphi$,	αν φ ατομικός
$\varphi^P = \neg \psi^P$,	αν φ της μορφής $\neg \psi$
$\varphi^P = \psi^P * \chi^P$,	αν φ της μορφής $\psi * \chi$
	(όπου $*$ είναι διθέσιος σύνδεσμος)
$\varphi^P = \forall x (P(x) \to \psi^P)$,	αν φ της μορφής $\forall x \psi$
$\varphi^P = \exists x (P(x) \wedge \psi^P)$,	αν φ της μορφής $\exists x \psi$.

Για τυχούσα δομή $\mathcal{A}$ για τη $\mathcal{L}_1$ τέτοια που $P^{\mathcal{A}} \neq \emptyset$, θεωρούμε τη δομή $\mathcal{B}$ για τη $\mathcal{L}_1$ που ορίζεται ως εξής:

$|\mathcal{B}| = P^{\mathcal{A}}$

$Q^{\mathcal{B}} = Q^{\mathcal{A}} \cap (P^{\mathcal{A}})^n$ για κάθε n-μελές κατηγορηματικό σύμβολο Q.

α) Δείξτε ότι για κάθε πρόταση φ της $\mathcal{L}_1$ ισχύει

$$\mathcal{B} \models \varphi \ \text{ ανν } \ \mathcal{A} \models {}^6 \varphi^P.$$

β) Ισχύει το ίδιο αν η $\mathcal{L}_1$ έχει συναρτησιακά σύμβολα ή σύμβολα σταθερών;

9. Δείξτε (χρησιμοποιώντας τον ορισμό του Tarski) ότι για κάθε τύπο ϕ ισχύει $\models \exists x (\phi \to \forall x \phi)$ 10. Δείξτε ότι για κάθε δομή $\mathcal{A}$ και αποτίμηση s στην $\mathcal{A}$ τέτοια που $s(x_1) = c^{\mathcal{A}}$ ισχύει:

$$\mathcal{A} \models \forall x_2 Q(x_1, x_2)[s] \ \text{ ανν } \ \mathcal{A} \models \forall x_2 Q(c, x_2)$$

(όπου Q είναι διμελές σύμβολο κατηγορήματος και c σύμβολο σταθεράς).

[6] Θα χρησιμοποιούμε πολλές φορές το $\mathcal{A} \models$ αντί του $\models_{\mathcal{A}}$.

11. Δείξτε ότι α) $\Rightarrow$ β), αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει, όπου:
α) για κάθε δομή $\mathcal{A}$ και αποτίμηση s στην $\mathcal{A}$, αν $\mathcal{A} \models \phi[s]$, τότε $\mathcal{A} \models \psi[s]$.
β) αν $\models \phi$, τότε $\models \psi$.

12. Δείξτε ότι για οποιουσδήποτε τύπους ϕ, ψ:

$$\models (\exists x\phi \to \forall x\psi) \to \forall x(\phi \to \psi).$$

13. Δείξτε ότι για τυχόντες τύπους φ, ψ και μεταβλητή x, αν η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στο φ, ισχύει $\models (\forall x\psi \to \varphi) \leftrightarrow \exists x(\psi \to \varphi)$.

Παραδείγματα 4.28 *Εξετάστε τα παρακάτω:*

α1. *Ο τύπος $Q(x) \to \forall x Q(x)$, όπου $Q(x)$ είναι σύμβολο κατηγορήματος δύο θέσεων, δεν είναι έγκυρος. Αρκεί να βρούμε μία ερμηνεία $\mathcal{A}$ και μία αποτίμηση s έτσι ώστε $\not\models_{\mathcal{A}} Q(x) \to \forall x Q(x)$. Μπορούμε να δοκιμάσουμε την $|\mathcal{A}| = \{a.b\}$, $Q^{\mathcal{A}} = \{a\}$ με οποιαδήποτε s ώστε $s(x) = s$.*

α2. *$\forall x Q(x) \to \exists y Q(y)$ είναι έγκυρος.*

α3. *Ο τύπος $\forall y \exists x R(x,y) \to \exists x \forall y R(x,y)$ δεν είναι έγκυρος. Αρκεί να πάρουμε $|\mathcal{A}| = \mathbb{Z}$ με $R(x,y)$ να είναι $x < y$.*

Βιβλιογραφία κεφαλαίου 4

Ε2, Ε3, Ξ1, Ξ2, Ξ6, Ξ8, Ξ9.

(Οι αναφορές παραπέμπουν στη βιβλιογραφία στο τέλος του βιβλίου)

5 Σύστημα Hilbert

Αξιωματικό σύστημα τύπου Hilbert για τον κατηγορηματικό λογισμό.

Στον προτασιακό λογισμό το ζητούμενο της αποδεικτικής διαδικασίας που ορίστηκε ήταν η παραγωγή των καθολικά ισχυόντων προτασιακών τύπων δηλαδή των ταυτολογιών. Εκεί είδαμε ότι υπάρχουν δύο προσεγγίσεις στο πρόβλημα του αν ένας δοσμένος προτασιακός τύπος ϕ είναι ταυτολογία. Η πρώτη προσέγγιση είναι σημασιολογική, σχηματίζουμε τον αληθοπίνακα που ορίζεται από τον ϕ και αν όλες οι τιμές του αληθοπίνακα είναι T τότε συμπεραίνουμε ότι ο ϕ είναι ταυτολογία. Αυτή η διαδικασία είναι απόλυτα αποτελεσματική (αλγοριθμική) αφού κατασκευαστικά, σε πεπερασμένο χρόνο, έχουμε το αποτέλεσμα. Η δεύτερη διαδικασία είναι η προσπάθεια κατασκευής μιας απόδειξης του ϕ στο τυπικό αξιωματικό σύστημα που ορίσαμε. Αυτή η διαδικασία φαίνεται να είναι λιγότερο αποτελεσματική μια και φαίνεται να εξαρτάται από την εξυπνάδα μας να ανακαλύψουμε μία τέτοια απόδειξη[7]. Το θεώρημα της ορθότητας και της πληρότητας δείχνουν ότι οι δύο διαδικασίες είναι ισοδύναμες.

Αν μεταφέρουμε την ίδια συλλογιστική στην περίπτωση του κατηγορηματικού λογισμού, θα δούμε ότι η προσπάθεια να ανακαλύψουμε με σημασιολογικό τρόπο την εγκυρότητα ενός τύπου ϕ (το ανάλογο της ταυτολογίας) προσκρούει στο γεγονός ότι σ' αυτήν την περίπτωση πρέπει να εξετάσουμε την αλήθεια του ϕ σε όλες τις ερμηνείες της γλώσσας. Και παρόλο που σε ορισμένες ειδικές περιπτώσεις αυτό είναι εφικτό (π.χ. όταν ο ϕ έχει τη μορφή $\psi \to \psi$), στη γενική περίπτωση είναι αδύνατο να σκεφτούμε πώς αυτό μπορεί να γίνει αποτελεσματικά μια και πρέπει να εξετάσουμε άπειρες ερμηνείες της γλώσσας[8]. Εδώ μπορούμε να προσφύγουμε στη δεύτερη προσέγγιση δηλαδή στην προσπάθεια να ανακαλύπτουμε μία απόδειξη σε ένα κατάλληλα ορισμένο αξιωματικό σύστημα. Από τη στιγμή που ανακαλύπτουμε μία τέτοια απόδειξη, θα ξέρουμε ότι ο ϕ είναι έγκυρος. Αργότερα θα δούμε ότι στην περίπτωση του κατηγορηματικού λογισμού δεν υπάρχει αλγόριθμος που να απαντάει αν ο οποιοσδήποτε ϕ είναι έγκυρος τύπος ή όχι.

Ας θεωρήσουμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα $\mathcal{L}$ όπου στα λογικά της σύμβολα έχουμε βάλει (για λόγους απλότητας) μόνον τους συνδέσμους $\neg$ και $\to$ και μόνον τον ποσοδείκτη $\forall$. Μια και το σύνολο $\{\neg, \to\}$ είναι ένα επαρκές σύνολο συνδέσμων, μπορούμε να ορίσουμε όλους τους άλλους μέσω αυτών. Όσον αφορά τον ποσοσδείκτη $\exists$ μπορούμε να τον ορίσουμε μέσω του $\forall$. Ορίζουμε $\exists x\phi$ να είναι $\neg\forall x\neg\phi$. Με αυτούς τους ορισμούς όλα τα οριζόμενα αποκτούν τη συνηθισμένη τους σημασία.

[7]Στην περίπτωση του προτασιακού λογισμού υπάρχει ένας αλγόριθμος που κατασκευάζει μία απόδειξη του ϕ στην περίπτωση που ο ϕ είναι ταυτολογία (άσκηση).

[8]Ας αφήσουμε και το ότι στην κάθε συγκεκριμένη ερμηνεία είναι δύσκολο να φανταστούμε τον έλεγχο της αλήθειας, μια και η ερμηνεία μπορεί να είναι άπειρη, δηλαδή το σύμπαν της να είναι άπειρο σύνολο.

5.1 Τυπικό αξιωματικό σύστημα

Θα προσπαθήσουμε να ορίσουμε ένα τυπικό αξιωματικό σύστημα με το οποίο θα αποδεικνύουμε όλες τις μαθηματικές (και λογικές) αλήθειες.

Χρησιμοποιούμε τα ακόλουθα σχήματα λογικών *αξιωμάτων*. Για οποιουσδήποτε τύπους ϕ, ψ, χ οι ακόλουθοι (πιο σύνθετοι) τύποι είναι αξιώματα:

A1 $\phi \to (\psi \to \phi)$

A2 $(\phi \to (\psi \to \chi)) \to ((\phi \to \psi) \to (\phi \to \chi))$

A3 $(\neg\psi \to \neg\phi) \to ((\neg\psi \to \phi) \to \psi)$

A4 $\forall x\phi(x) \to \phi(t)$, με την προϋπόθεση ότι x είναι αντικαταστάσιμη από τον t στον $\phi(x)$.

A5 $\forall x(\phi \to \psi) \to (\phi \to \forall x\psi)$, με την προϋπόθεση ότι ο ϕ δεν περιέχει καμία ελεύθερη εμφάνιση της x.

Κανόνες Απαγωγής: Χρησιμοποιούμε δύο κανόνες απαγωγής:

Τον Modus Ponens (MP). Ο κανόνας αυτός μας λέει ότι από τους $\phi \to \psi$ και ϕ απάγουμε (συμπεραίνουμε) τον ψ. Σχηματικά

$$\frac{\phi \to \psi \quad \phi}{\psi}\, MP$$

Τον κανόνα της Γενίκευσης (Gen): Από τον ϕ απάγουμε τον $\forall x\phi$. Σχηματικά

$$\frac{\phi}{\forall x\phi}\, Gen$$

Παρατήρηση: Ο Gen έχει την εξής έννοια. Πώς συμπεραίνουμε ότι για κάθε x ένας ισχυρισμός $\phi(x)$ ισχύει; Δηλαδή πώς $\forall x\phi(x)$; Αρκεί ν' αποδείξουμε τον $\phi(x)$ για τυχόν x.

Ορισμός 5.1 *Μία* θεωρία *(στη γλώσσα $\mathcal{L}$) είναι ένα σύνολο τύπων της γλώσσας $\mathcal{L}$, οι οποίες ονομάζονται* μη λογικά αξιώματα *της θεωρίας. Αντιθέτως, τα αξιώματα που παράγονται από τα σχήματα αξιωμάτων A1–A5 ονομάζονται* λογικά αξιώματα. *Τις θεωρίες τις συμβολίζουμε συνήθως με τα γράμματα T,Σ,. . . .*

Ορισμός 5.2 (Τυπική) Απόδειξη *στη θεωρία T ονομάζεται κάθε πεπερασμένη ακολουθία $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ τύπων για τους οποίους ισχύουν τα κάτωθι:*

Για κάθε i όπου $1 \leq i \leq n$ ο τύπος ϕ_i είναι, είτε

α1. ένα λογικό αξίωμα A1, A2 ,A3 ,A4, ή A5,

α2. είτε ανήκει στην T, δηλαδή είναι ένα μη λογικό αξίωμα *της T,* *α3. είτε υπάρχουν ϕ_j, ϕ_k τύποι της ακολουθίας $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ με $j < i$ και $k < i$ ώστε $\phi_j \equiv \phi_k \to \phi_i$ (δηλαδή ο ϕ_i είναι το συμπέρασμα κανόνα MP με υποθέσεις τύπους με μικρότερο δείκτη, δηλαδή που προηγούνται στην απόδειξη από τον ϕ_i),*

α4. είτε υπάρχει ϕ_j με $j < i$ και ϕ_i έχει τη μορφή $\forall x \phi_j$

(δηλαδή είναι το συμπέρασμα κανόνα Gen με υπόθεση που προηγείται στην απόδειξη από τον ϕ_i).

Παρατήρηση 5.3 *Για να είναι μια ακολουθία τύπων απόδειξη θα πρέπει να υπάρχει μια «αιτιολογία» ότι σε κάθε βήμα ικανοποιείται η προδιαγραφή που επιβάλλει ο ορισμός 8.5. Όταν παρουσιάζουμε μια απόδειξη, καταγράφουμε ως σχόλιο σε κάθε βήμα αυτήν την αιτιολογία, οπότε ο έλεγχος ότι όντως η ακολουθία είναι απόδειξη να γίνεται πολύ εύκολα. Όταν σε μια απόδειξη υπάρχει μια εφαρμογή του κανόνα της γενίκευσης με συμπέρασμα της μορφής $\forall x \phi$ λέμε ότι έχουμε εφαρμογή του κανόνα της γενίκευσης με μεταβλητή x. Όταν αναφερόμαστε σε μια απόδειξη ως ακολουθία τύπων, θα χρησιμοποιούμε τον όρο* τυπική απόδειξη.

Ορισμός 5.4 Θεώρημα *της θεωρίας T ονομάζεται κάθε τύπος ϕ για τον οποίο υπάρχει απόδειξη $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ στη θεωρία T με $\phi_n \equiv \phi$.*

Αν ϕ είναι θεώρημα της T, γράφουμε $T \vdash \phi$. Αν $T = \emptyset$, δηλαδή αν θεωρήσουμε ότι έχουμε μία θεωρία χωρίς μη λογικά αξιώματα, γράφουμε $\vdash \phi$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η απόδειξη είναι στον καθαρό κατηγορηματικό λογισμό. Είναι προφανές ότι όποια απόδειξη δεν χρησιμοποιεί για την κατασκευή της μη λογικά αξιώματα είναι απόδειξη στον καθαρό κατηγορηματικό λογισμό. Και βέβαια είναι επίσης προφανές ότι $\vdash \phi$ συνεπάγεται $T \vdash \phi$ για οποιοδήποτε T.

Ορισμός 5.5 *Ο τύπος ϕ είναι* στιγμιότυπο ταυτολογίας *αν έχει προκύψει από έναν προτασιακό τύπο που είναι ταυτολογία με την αντικατάσταση των προτασιακών του μεταβλητών από τύπους. Εννοείται ότι όταν αντικαθιστούμε μία προτασιακή μεταβλητή A με έναν τύπο αντικαθιστούμε όλες τις εμφανίσεις της A με τον τύπο αυτό.*

π.χ. Οι τύποι $\phi \to \phi$, $(\phi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\phi)$, κ.λ.π. έναι στιγμιότυπα ταυτολογίας.

Παρατήρηση 5.6 *Το τυπικό σύστημα που ορίσαμε περιλαμβάνει τα σχήματα αξιωμάτων A1, A2, A3, του αντίστοιχου συστήματος του προτασιακού λογισμού, καθώς και τον κανόνα Modus Ponens. Είναι λοιπόν επέκταση αυτού του συστήματος. Άρα είναι φανερό ότι κάθε στιγμιότυπο ταυτολογίας* *είναι θεώρημα του συστήματος τύπου Hilbert για τον κατηγορηματικό λογισμό. Διότι, αν ένας τύπος είναι στιγμιότυπο ταυτολογίας, η ταυτολογία από την οποία προέκυψε θα αποδεικνύεται από το σύστημα του προτασιακού λογισμού. Άρα χρησιμοποιώντας την ίδια ακριβώς απόδειξη, όπου όμως αντί των προτασιακών τύπων έχουμε τώρα τα στιγμιότυπα που προκύπτουν από την αντικατάσταση των προτασιακών μεταβλητών από τους αντίστοιχους τύπους, δημιουργούμε μια απόδειξη στο σύστημα του κατηγορηματικού λογισμού.*

Παρατήρηση 5.7 *Για τους περιορισμούς που έχουμε θέσει στα αξιώματα A4 και A5. Θέλουμε όλα τα λογικά αξιώματα να είναι έγκυροι λογικοί τύποι. Γι' αυτό οι περιορισμοί στα A4 και A5 είναι απαραίτητοι.*

Π.χ. στο αξίωμα A4. Έστω $\phi(x)$ *το* $\neg\forall y R(x,y)$ *και έστω* t *το* y. *Εδώ η* x *δεν είναι αντικαταστάσιμη από τον* t *στον* $\phi(x)$. *Θεωρήστε τώρα μια περίπτωση του αξιώματος A4 (χωρίς τον περιορισμό)* $\forall x(\neg\forall y R(x,y)) \to \neg\forall y R(y,y)$. *Πάρτε τώρα σαν ερμηνεία ένα πεδίο με δύο στοιχεία και έστω* R *να ερμηνεύεται με την ισότητα δηλαδή* $R^{\mathcal{A}}(a,b)$ *να σημαίνει* $a = b$. *Τότε η υπόθεση της πρότασης είναι αληθής ανώ το συμπέρασμα ψευδές.*

Στην περίπτωση του A5, έστω ϕ *και* ψ *είναι αμφότερα το* $R(x)$. *Τότε* x *είναι ελεύθερη στο* ϕ. *Μια περίπτωση του A5 θα είναι* $\forall x(R(x) \to R(x)) \to (R(x) \to \forall x R(x))$. *Αλλά η υπόθεση της πρότασης είναι λογικά έγκυρη (αληθής) ενώ το συμπέρασμα όχι, διότι αν πάρουμε μία δομή όπου η* $R^{\mathcal{A}}$ *να αληθεύει για κάποια αλλά όχι για όλα τα στοιχεία του* $\mid \mathcal{A} \mid$ *τότε το συμπέρασμα δεν είναι αληθές.*

Θεώρημα 5.8 (Θεώρημα κλειστότητας) *Αν* ϕ' *είναι η καθολική κλειστότητα του* ϕ, *τότε*

$$T \vdash \phi \Leftrightarrow T \vdash \phi'$$

Απόδειξη $\Rightarrow$: Προφανές από τον κανόνα Gen.

$\Leftarrow$: Έστω ϕ' η πρόταση $\forall x_1 \cdots \forall x_n \phi$. Μπορούμε να βγάλουμε τους ποσοδείκτες με διαδοχικές εφαρμογές των A_4 και MP. □

Θεώρημα 5.9 (Το θεώρημα της απαγωγής) *Αν* $T, \phi \vdash \psi$ *και αν στην απόδειξη του* ψ *από το* T, ϕ *δεν υπάρχει εφαρμογή του κανόνα της γενίκευσης με μεταβλητή που εμφανίζεται ελεύθερη στον* ϕ, *τότε* $T \vdash \phi \to \psi$.

Απόδειξη Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή στο μήκος n της τυπικής απόδειξης $\phi_1, \ldots, \phi_n \equiv \psi$ του ψ από το T, ϕ. Είναι προφανές ότι, αν σε μία τυπική απόδειξη δεν έχουμε εφαρμογή κανόνα γενίκευσης με κάποια μεταβλητή x, τότε και σε κανένα αρχικό τμήμα της τυπικής απόδειξης (η οποία είναι απόδειξη με μικρότερο μήκος) δεν έχουμε εφαρμογή του κανόνα της γενίκευσης με μεταβλητή x. Άρα θα μπορούμε να εφαρμόζουμε την επαγωγική υπόθεση.

Υπάρχουν τρεις περιπτώσεις όπου το θεώρημα ισχύει άμεσα. Είναι οι περιπτώσεις όπου ο ψ είναι ϕ ή ανήκει στο T ή είναι λογικό αξίωμα. Στην πρώτη περίπτωση το θεώρημα ισχύει επειδή $\phi \to \phi$ είναι στιγμιότυπο ταυτολογίας, στη δεύτερη και τρίτη περίπτωση από Modus Ponens, επειδή $T \vdash \phi \to (\psi \to \phi)$

(στιγμιότυπο ταυτολογίας) και προφανώς $T \vdash \phi$. Οι περιπτώσεις αυτές καλύπτουν την περίπτωση $n = 1$, καθώς και την περίπτωση όπου $n > 1$ και η αιτιολόγηση για το $\psi \equiv \phi_n$ είναι ότι εμπίπτει σε μία από τις τρείς ως άνω περιπτώσεις. Έστω τώρα $n > 1$. Υπάρχουν δύο εναπομείνασες περιπτώσεις.

Περίπτωση 1. Ο ψ προκύπτει με εφαρμογή κανόνα MP με υποθέσεις ϕ' και $\phi' \to \psi$. Στους ϕ' και $\phi' \to \psi$ αντιστοιχούν τυπικές αποδείξεις με μήκος μικρότερο του n. Από Ε.Υ. έχουμε ότι $T \vdash \phi \to \phi'$ και $T \vdash \phi \to (\phi' \to \psi)$. Οπότε με χρήση του αξιώματος A3 και εφαρμογές του MP, παίρνουμε το ζητούμενο $T \vdash \phi \to \psi$.

Περίπτωση 2. Ο ψ έχει τη μορφή $\forall x \psi_1$ και προκύπτει με εφαρμογή κανόνα γενίκευσης με μεταβλητή x. Τότε η μεταβλητή x δεν μπορεί να εμφανίζεται ελεύθερη στον ϕ. Η τυπική απόδειξη που αντιστοιχεί στον ψ_1 έχει μήκος μικρότερο του n και βέβαια δεν μπορεί να έχει εφαρμογή κανόνα γενίκευσης με μεταβλητή που εμφανίζεται ελεύθερη στον ϕ. Άρα από Ε.Υ. έχουμε $T \vdash \phi \to \psi_1$. Από κανόνα γενίκευσης παίρνουμε $T \vdash \forall x(\phi \to \psi_1)$. Επειδή η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον ϕ, έχουμε ότι $T \vdash \forall x(\phi \to \psi_1) \to (\phi \to \forall x \psi_1)$ (αξίωμα A5). Με MP παίρνουμε το ζητούμενο. □

Ως άμεση εφαρμογή του θεωρήματος της απαγωγής παίρνουμε το ακόλουθο πόρισμα:

Πόρισμα 5.1 *Αν $T, \phi \vdash \psi$ και ϕ είναι πρόταση, τότε $T \vdash \phi \to \psi$.*

Παράδειγμα 5.10 Θα αποδείξουμε ότι $\vdash \forall x(\phi \to \psi) \to (\forall x \phi \to \forall x \psi)$. Από το θεώρημα της απαγωγής αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\forall x(\phi \to \psi), \forall x \phi \vdash \forall x \psi$$

Κατασκευάζουμε την απόδειξη ως εξής:

1.	$\forall x(\phi \to \psi)$	Υπόθεση
2.	$\phi \to \psi$	1,A4
3.	$\forall x \phi$	Υπόθεση
4.	$\forall x \phi \to \phi$	A4
5.	ϕ	3,4,MP
6.	ψ	2,5,MP
7.	$\forall x \psi$	6,Gen

Παρατηρούμε ότι, στην τυπική απόδειξη που κατασκευάσαμε, έχουμε εφαρμογή του κανόνα της γενίκευσης με μεταβλητή x που βέβαια δεν εμφανίζεται ελεύθερη στους τύπους $\forall x(\phi \to \psi), \forall x \phi$. Άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα της απαγωγής.

Παραδείγματα 5.11 *Θα δώσουμε και κάποια άλλα παραδείγματα τυπικών αποδείξεων. Στις τυπικές αποδείξεις θα πρέπει να μην εφαρμόζουμε τον κανόνα Gen με μεταβλητή που εμφανίζεται ελεύθερη σε κάποια από τις υποθέσεις, ώστε να μπορούμε να εφαρμόζουμε το θεώρημα της απαγωγής.*

$\vdash \forall x \forall y \phi \to \forall y \forall x \phi$, *διότι*

1.	$\forall x \forall y \phi$	*Υπόθεση*
2.	$\forall x \forall y \phi \to \forall y \phi$	*A4*
3.	$\forall y \phi$	*1, 2, MP*
4.	$\forall y \phi \to \phi$	*A4*
5.	ϕ	*3, 4, MP*
6.	$\forall x \phi$	*5, Gen*
7.	$\forall y \forall x \phi$	*6, Gen*

$\vdash \forall x(\phi \to \psi) \to (\forall x \phi \to \forall x \psi)$

1.	$\forall x(\phi \to \psi)$	*Υπόθεση*
2.	$\forall x(\phi \to \psi) \to (\phi \to \psi)$	*A4*
3.	$\phi \to \psi$	*1,2, MP*
4.	$\forall x \phi$	*Υπόθεση*
5.	$\forall x \phi \to \phi$	*A4*
6.	ϕ	*4,5, MP*
7.	ψ	*3,6, MP*
8.	$\forall x \psi$	*7, Gen*

$\vdash \forall x(\phi \to \psi) \to (\exists x \phi \to \exists x \psi)$

Ας θυμηθούμε ότι $\exists x$ *είναι το* $\neg \forall x \neg$. *Έχουμε την ακόλουθη απόδειξη.*

1.	$\forall x(\phi \to \psi)$	*Υπόθεση*
2.	$\forall x(\phi \to \psi) \to (\phi \to \psi)$	*A4*
3.	$\phi \to \psi$	*1,2, MP*
4.	$\neg \psi \to \neg \phi$	*Από στιγμ. ταυτ.* $(\phi \to \psi) \to (\neg \psi \to \neg \phi)$, *MP*
5.	$\forall x \neg \psi$	*Υπόθεση*
6.	$\forall x \neg \psi \to \neg \psi$	*A4*
7.	$\neg \psi$	*5,6, MP*
8.	$\neg \phi$	*4, 7, MP*
9.	$\forall x \neg \phi$	*8, Gen*

Οπότε από θεώρημα απαγωγής $\vdash \forall x(\phi \to \psi) \to \forall x \neg \psi \to \forall x \neg \phi$. *Από την ταυτολογία* $(C \to (A \to B)) \to (C \to\to (\neg B \to \neg A)$ *και MP παίρνουμε* $\vdash \forall x(\phi \to \psi) \to (\neg \forall x \neg \phi \to \neg \forall x \neg \psi)$, *το οποίο είναι και το ζητούμενο.*

5.2 Πρωτοβάθμιες θεωρίες, Ισότητα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΩΝ ΘΕΩΡΙΩΝ

I. **Μερική διάταξη:** Η γλώσσα έχει ως μη λογικά σύμβολα ένα μόνο σύμβολο κατηγορήματος δύο θέσεων R_1^2 και δεν έχει σύμβολα σταθερών ή συναρτήσεων. Γράφουμε $x_i < x_j$ αντί για $R_1^2(x_i, x_j)$ και $x_i \not< x_j$ αντί για $\neg(x_i < x_j)$. Έχουμε δύο μη λογικά αξιώματα, τα εξής:

α1. $\forall x_1(x_1 \not< x_1)$ (μη αυτοπαθής),

α2. $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3((x_1 < x_2 \wedge x_2 < x_3) \to (x_1 < x_3))$ (μεταβατική).

Ένα μοντέλο αυτών των αξιωμάτων ή όπως λέμε ένα μοντέλο της θεωρίας θα ονομάζεται μερικώς διατεταγμένη δομή.

II. **Θεωρία ομάδων:** Η γλώσσα θα περιλαμβάνει ένα σύμβολο κατηγορήματος R_1^2, ένα σύμβολο συναρτήσεως f_1^2 και ένα σύμβολο σταθεράς c_1. Θα γράφουμε $t = s$ αντί για $R_1^2(t,s)$, $t+s$ αντί για $f_1^2(t,s)$ και 0 αντί για c_1. Τα μη λογικά αξιώματα θα είναι:

α1. $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3(x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3)$, (προσεταιριστική ιδιότητα)

α2. $\forall x_1(0 + x_1 = x_1)$ (ουδέτερο στοιχείο),

α3. $\forall x_1 \exists x_2(x_2 + x_1 = 0)$ (αντίθετο),

α4. $\forall x_1(x_1 = x_1)$,

α5. $\forall x_1 \forall x_2(x_1 = x_2 \to x_2 = x_1)$,

α6. $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3(x_1 = x_2 \to (x_2 = x_3 \to x_1 = x_3))$,

α7. $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3(x_2 = x_3 \to (x_1 + x_2 = x_1 + x_3 \wedge x_2 + x_1 = x_3 + x_1))$.

Τα αξιώματα 4,5,6,7 είναι αξιώματα που περιγράφουν τις ιδιότητες της ισότητας $=$. Κάθε μοντέλο αυτής της θεωρίας καλείται (προσθετική) ομάδα. Αν αυτό το μοντέλο ικανοποιεί επιπρόσθετα και την $\forall x_1 \forall x_2(x_1 + x_2 = x_2 + x_1)$ καλείται αβελιανή ομάδα.

Παρατήρηση: Τα αξιώματα 4,5,6, και 7 είναι αξιώματα τα οποία περιγράφουν τις ιδιότητες της σχέσης $=$ όταν την ερμηνεύουμε ως ισότητα (δηλαδή αν $\mathcal{A}$ ερμηνεία της γλώσσας, τότε $=^{\mathcal{A}} = \{(a,a) \mid a \in A\}$). Τα αξιώματα αυτά διατυπώνονται στα πλαίσια της συγκεκριμένης θεωρίας. Μπορούμε όμως να τα γενικεύσουμε έτσι ώστε να έχουμε τις βασικές ιδιότητες της ισότητας σε οποιαδήποτε θεωρία.

Ορισμός 5.12 *Μία θεωρία T (δηλαδή ένα σύνολο τύπων) θα λέγεται* θεωρία με ισότητα *αν στη γλώσσα της θεωρίας υπάρχει ένα σύμβολο κατηγορήματος δύο θέσεων $=$ και οι ακόλουθοι τύποι περιλαμβάνονται στα λογικά αξιώματα της θεωρίας (ονομάζονται και αξιώματα της ισότητας. Το σύνολο αυτών των αξιωμάτων το ονομάζουμε $A\xi I$).*

α1. $\forall x_1(x_1 = x_1)$

α2. $x = y \to (\phi(x,x) \to \phi(x,y))$ *(αντικαταστασιμότητα της ισότητας), όπου x, y οποιεσδήποτε μεταβλητές, $\phi(x,x)$ τυχαίος τύπος και $\phi(x,y)$ προκύπτει από τον $\phi(x,x)$ με αντικατάσταση κάποιων, αλλά όχι αναγκαστικά όλων, ελεύθερων εμφανίσεων της x από την y, με τον περιορισμό ότι η εμφάνιση της x είναι αντικαταστάσιμη από τη μεταβλητή y που την αντικαθιστά.*

Στην περίπτωση αυτή ένας τύπος ϕ είναι θεώρημα μιας θεωρίας T με ισότητα αν στην τυπική απόδειξη του ϕ από το T μπορούμε να χρησιμοποιούμε και αξιώματα από το ΑξΙ, δηλαδή αν $T, \text{Αξ}I \vdash \phi$. Γράφουμε τότε $T \vdash_I \phi$. Όταν είναι σαφές ότι βρισκόμαστε σε μια θεωρία με ισότητα, μπορούμε, χάριν ευκολίας, να γράφουμε απλώς $T \vdash \phi$.

Άσκηση: Αποδείξτε ότι σε κάθε θεωρία με ισότητα ισχύουν τα κάτωθι:

α1. Για κάθε όρο t, $\vdash t = t$,

α2. $\vdash x = y \rightarrow y = x$,

α3. $\vdash x = y \rightarrow (y = z \rightarrow x = z)$.

Σύμβαση: Από δω και στο εξής, όταν στη γλώσσα της θεωρίας υπάρχει το σύμβολο $=$, θα υποθέτουμε ότι έχουμε μία θεωρία με ισότητα, με $=$ το σύμβολο της ισότητας. Σ' αυτήν την περίπτωση η ερμηνεία της ισότητας θα είναι standard δηλαδή αν $\mathcal{A}$ ερμηνεία της γλώσσας, τότε $=^{\mathcal{A}} = \{(a, a) \mid a \in A\}$. Στην περίπτωση που δεν απαιτούμε η ερμηνεία $\mathcal{A}$ να είναι η standard ερμηνεία, δηλαδή στην περίπτωση που $=^{\mathcal{A}}$ είναι ένα οποιοδήποτε υποσύνολο του $|\mathcal{A}|^2$, η ερμηνεία ονομάζεται *ψευδοερμηνεία* της $=$.

III. **Αριθμητική:** Η γλώσσα περιλαμβάνει τη σταθερά 0, το σύμβολο συνάρτησης μιας θέσης S (που συμβολίζει τον επόμενο), τα σύμβολα συναρτήσεων $+$ και $\cdot$ καθώς και τα σύμβολα κατηγορημάτων $=$ και $<$. Τα αξιώματα (μη λογικά) γραφόμενα ανορθόγραφα για να γίνουν πιο κατανοητά είνα τα ακόλουθα:[9]

S1. $Sx \neq 0$

S2. $Sx = Sy \rightarrow x = y$

S3. $x + 0 = x$

S4. $x + Sy = S(x + y)$

S5. $x \cdot 0 = 0$

S6. $x \cdot Sy = (x \cdot y) + x$

S7. $\neg(x < 0)$

S8. $x < Sy \leftrightarrow x < y \vee x = y$

S9. $x < y \vee x = y \vee y < x$

[9] Βεβαίως στη θεωρία αυτή, όπως απαιτεί η σύμβαση, περιλαμβάνονται και τα αξιώματα της ισότητας.

Η θεωρία αυτή ονομάζεται και αριθμητική του Robinson και θα τη συμβολίζουμε με S_0.

IV. **Αριθμητική του Peano:** Αν επιπλέον στην αριθμητική του Robinson προσθέσουμε το αξίωμα (πιο σωστά σχήμα αξιώματος)

$$(\phi(0) \wedge \forall x(\phi(x) \to \phi(S(x)))) \to \forall x \phi(x)$$

όπου $\phi(x)$ είναι ένας τυχαίος τύπος της γλώσσας, τότε η θεωρία αυτή ονομάζεται αριθμητική του Peano και το επιπλέον αυτό αξίωμα ονομάζεται αξίωμα (ή αρχή) της μαθηματικής επαγωγής.

5.3 Ορθότητα, Πληρότητα, Συμπάγεια

Ορισμός 5.13 *Έστω Σ ένα σύνολο τύπων και ϕ ένας τύπος (όλα στη γλώσσα $\mathcal{L}$). Γράφουμε $\Sigma \models \phi$ αν για κάθε μοντέλο $\mathcal{A}$ του Σ έχουμε ότι $\models_{\mathcal{A}} \phi$. Δηλαδή αν σε κάθε ερμηνεία $\mathcal{A}$, στην οποία είναι αληθείς όλοι οι τύποι του Σ, ο τύπος ϕ είναι αληθής. Αν $\Sigma = \emptyset$ γράφουμε $\models \phi$ που σημαίνει ότι ϕ είναι λογικά έγκυρος.*

Σημείωση: $\Sigma \models \phi$ είναι ισοδύναμο με το $\Sigma' \models \phi'$, όπου για κάθε $\psi \in \Sigma \cup \{\phi\}$, ψ' είναι η καθολική κλειστότητα του ψ.

Θεώρημα 5.14 (Θεώρημα της ορθότητας) *Αν T είναι μία θεωρία τότε $T \vdash \phi$ συνεπάγεται ότι $T \models \phi$. Δηλαδή αν ϕ είναι θεώρημα της T τότε η ϕ αληθεύει σε όλες τις δομές που είναι μοντέλα της T.*

Απόδειξη Αποδεικνύουμε ότι αν ϕ είναι λογικό αξίωμα, τότε $\models \phi$, άρα και $T \models \phi$. Αυτό ισχύει για τα αξιώματα A1, A2 και A3 διότι είναι στιγμιότυπα ταυτολογιών. Για το A4 ισχύει λόγω του 4.2 και για το A5 λόγω του **??**. Κατόπιν αποδεικνύουμε εύκολα ότι $T \models \phi$ και $T \models \phi \to \psi$ συνεπάγεται $T \models \psi$. Για τον κανόνα Gen έστω $T \models \phi(x)$ και έστω $\mathcal{A}$ μοντέλο του T. Αυτό σημαίνει ότι $\models_{\mathcal{A}} \phi[u]$ για κάθε αποτίμηση u στην $\mathcal{A}$. Έστω τώρα s οποιαδήποτε αποτίμηση στην $\mathcal{A}$ και a οποιοδήποτε στοιχείο του $|\mathcal{A}|$. Η $s(x/a)$ είναι αποτίμηση στην $\mathcal{A}$ και άρα, λόγω της προηγούμενης παρατήρησης, $\models_{\mathcal{A}} \phi[s(x/a)]$. Άρα, τελικά $\models_{\mathcal{A}} \forall x \phi$, δηλαδή $T \models \forall x \phi$. $\square$

Ορισμός 5.15 Αντίφαση *ονομάζεται κάθε τύπος ο οποίος είναι στιγμιότυπο ενός προτασιακού τύπου που, κάτω από οποιαδήποτε απονομή, παίρνει την τιμή* T. *Στη γλώσσα με προτασιακούς συνδέσμους μόνον τους $\neg, \to$ μπορεί να έχει τη μορφή $\neg(\phi \to \phi)$, ενώ αν διαθέτουμε και τη σύζευξη μπορεί να έχει τη μορφή $\phi \wedge \neg\phi$. Μια αντίφαση δεν αληθεύει ποτέ σε καμία δομή.*

Ένα σύνολο τύπων Σ λέγεται συνεπές *όταν δεν είναι δυνατόν να έχουμε $\Sigma \vdash \phi$ και $\Sigma \vdash \neg\phi$. Ισοδύναμα όταν το Σ δεν μπορεί να αποδείξει μία αντίφαση. (Γιατί;) Μία θεωρία T λέγεται συνεπής όταν το σύνολο T είναι συνεπές.*

Ένα σύνολο Σ λέγεται ικανοποιήσιμο *όταν υπάρχει ένα μοντέλο του Σ.*

Είναι προφανές ότι για καμία δομή $\mathcal{A}$ δεν είναι δυνατόν να έχουμε ότι $\models_{\mathcal{A}} \phi \wedge \neg\phi$. Άρα λόγω του θεωρήματος της ορθότητας:

Θεώρημα 5.16 *Αν Σ είναι ικανοποιήσιμο, τότε Σ είναι συνεπές.*

Απόδειξη Επειδή Σ είναι ικανοποιήσιμο, τότε υπάρχει $\mathcal{A}$ μοντέλο του Σ. Αν Σ δεν ήταν συνεπές, τότε θα είχαμε $\Sigma \vdash \phi \wedge \neg\phi$. Αλλά λόγω του θεωρήματος της ορθότητας θα ήταν $\Sigma \models \phi \wedge \neg\phi$, άρα και $\models_{\mathcal{A}} \phi \wedge \neg\phi$, πράγμα αδύνατο. $\square$

Είδαμε ότι Σ είναι συνεπές όταν δεν είναι δυνατόν με βάση το Σ να αποδείξουμε μια αντίφαση. Είναι δυνατόν να δώσουμε έναν χαρακτηρισμό των μη συνεπών (ασυνεπών) συνόλων;

Θεώρημα 5.17 *Ένα σύνολο προτάσεων Σ στη γλώσσα $\mathcal{L}$ είναι ασυνεπές όταν και μόνον όταν για κάθε πρόταση ψ της $\mathcal{L}$ έχουμε ότι $\Sigma \vdash \psi$.*

[Δηλαδή μία ασυνεπής θεωρία είναι χωρίς ενδιαφέρον αφού αποδεικνύει όλες τις προτάσεις!]

Απόδειξη $\Rightarrow$: Έστω Σ ασυνεπές. Τότε $\Sigma \vdash \phi$ και $\Sigma \vdash \neg\phi$. Για την οποιαδήποτε πρόταση ψ, από στιγμιότυπο ταυτολογίας έχουμε ότι $\Sigma \vdash (\phi \rightarrow (\neg\phi \rightarrow \psi))$ και άρα, με εφαρμογή MP, $\Sigma \vdash \psi$.

$\Leftarrow$: Αν $\Sigma \vdash \psi$ για κάθε πρόταση ψ, τότε για κάθε τύπο ϕ έχουμε ότι $\Sigma \vdash (\phi \wedge \neg\phi)'$, όπου $(\phi \wedge \neg\phi)'$ είναι η καθολική κλειστότητα του $\phi \wedge \neg\phi$. Αλλά αν το Σ αποδεικνύει την καθολική κλειστότητα ενός τύπου, τότε αποδεικνύει και τον τύπο. Άρα και $\Sigma \vdash \phi \wedge \neg\phi$. $\square$

Θεώρημα 5.18 *Αν Σ είναι σύνολο τύπων, ϕ πρόταση και $\Sigma \nvdash \phi$, τότε $\Sigma, \neg\phi$ είναι συνεπές σύνολο.*

Απόδειξη Έστω $\Sigma, \neg\phi$ ασυνεπές. Τότε $\Sigma, \neg\phi \vdash (\neg\psi \wedge \neg\psi)$. Από θεώρημα απαγωγής 5.1, $\Sigma \vdash \neg\phi \rightarrow (\neg\psi \wedge \psi)$ και επειδή $(\neg\phi \rightarrow (\neg\psi \wedge \psi)) \rightarrow \phi$ είναι στιγμιότυπο ταυτολογίας, τελικά έχουμε $\Sigma \vdash \phi$ (άτοπο). $\square$

Είδαμε, με το θεώρημα της ορθότητας, πως ό,τι αποδεικνύεται από μία θεωρία είναι ορθό –δηλαδή αληθεύει– σε όλα τα μοντέλα της θεωρίας (έχει δηλαδή γενική ισχύ). Μπορούμε να ελπίζουμε ότι ισχύει το αντίστροφο; Δηλαδή αν μια πρόταση έχει αυτή τη γενική ισχύ μπορούμε να αναμένουμε ότι αυτή αποδεικνύεται από τα αξιώματα της θεωρίας; Δηλαδή οι αποδεικτικές δυνατότητες θα είναι ακριβώς ίσες ή θα υπολείπονται του συνόλου των προτάσεων που έχουν γενική ισχύ; Στο παρακάτω θεώρημα βλέπουμε πως για τα αξιωματικά μας συστήματα ισχύει μια πληρότητα, δηλαδή αυτά που μπορούμε να αποδείξουμε σε μια θεωρία είναι ακριβώς αυτά που αληθεύουν σε όλα τα μοντέλα της θεωρίας. Το θεώρημα αυτό, ένα από τα θεμελιώδη της μαθηματικής λογικής, οφείλεται στον μεγάλο λογικό Kurt Gödel.

Θεώρημα 5.19 (Θεώρημα πληρότητας, Gödel 1930) *Αν $\Sigma \models \phi$, τότε $\Sigma \vdash \phi$.*

Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να αποδείξουμε το θεώρημα της πληρότητας.

Ορισμός 5.20 *Η θεωρία T είναι πλήρης αν για κάθε πρόταση ϕ είτε $T \vdash \phi$ είτε $T \vdash \neg\phi$. Αλλιώς η θεωρία είναι μη πλήρης. Η θεωρία T είναι επέκταση της S αν $T \subseteq S$.*

Λήμμα 5.2 (Το λήμμα του Lindenbaum) *Έστω S μια συνεπής θεωρία στη γλώσσα $\mathcal{L}$. Τότε υπάρχει πλήρης και συνεπής επέκταση της S.*

Απόδειξη Έστω $\phi_1, \phi_2, \ldots \phi_n, \ldots$ μια αρίθμηση όλων των προτάσεων της γλώσσας $\mathcal{L}$. Ορίζουμε μια ακολουθία θεωριών $T_0, T_1, \ldots, T_n, \ldots$, ως ακολούθως:

$$T_0 = S$$

$$T_{n+1} = \begin{cases} T_n \cup \{\neg\phi_{n+1}\} & \text{αν } T_n \nvdash \phi_{n+1} \\ T_n & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Είναι προφανές ότι $T_0 \subseteq T_1 \subseteq \cdots$ και επίσης από το 5.18 με επαγωγή ότι κάθε T_n είναι συνεπές. Έστω τώρα $T = \cup_{n=0}^{\infty} T_n$.

T είναι συνεπές: Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι $T \vdash \psi$ και $T \vdash \neg\psi$, για κάποιο ψ. Τότε, επειδή οι αποδείξεις των ψ και $\neg\psi$ χρησιμοποιούν μόνον πεπερασμένο πλήθος αξιωμάτων, θα έχουμε $T_n \vdash \psi$ και $T_n \vdash \neg\psi$, για κάποιο n, πράγμα που αντιβαίνει στη συνέπεια του T_n.

T είναι πλήρες: Είναι προφανές διότι κάθε πρόταση της $\mathcal{L}$ είναι μια ϕ_n, για κάποιο n, άρα έχει χρησιμοποιηθεί, αυτή ή η άρνησή της, σε κάποιο T_n. $\square$

Ο αναγνώστης καλείται να συγκρίνει την παραπάνω απόδειξη με την απόδειξη της πρότασης 2.31 και να διαπιστώσει ότι βασίζονται στην ίδια ακριβώς ιδέα.

Ορισμός 5.21 *Ονομάζουμε τη θεωρία T* θεωρία Henkin *αν για κάθε τύπο της γλώσσας $\phi(x)$, με ακριβώς μια ελεύθερη μεταβλητή x, υπάρχει ένα σύμβολο σταθεράς c για το οποίο ισχύει ότι $T \vdash \exists x\phi(x) \to \phi(c)$.*

Για μια τέτοια θεωρία, με την προϋπόθεση ότι είναι πλήρης και συνεπής, βγαίνει ότι εύκολα μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα μοντέλο $\mathcal{A}$. Για την κατασκευή χρησιμοποιούμε το συντακτικό - αποδεικτικό υλικό της θεωρίας.

Πρόταση 5.22 *Κάθε πλήρης και συνεπής θεωρία Henkin T έχει μοντέλο.*

Απόδειξη Ορίζουμε μια ερμηνεία $\mathcal{A}$ της γλώσσας $\mathcal{L}$ της θεωρίας T ως εξής:

Θέτουμε $|\mathcal{A}| = \{t |\ t$ είναι κλειστός όρος της γλώσσας$\}$ και ορίζουμε $R^{\mathcal{A}} = \{< t_1, \ldots, t_n > |\ T \vdash R(t_1, \ldots, t_n)\}$ για κάθε σύμβολο κατηγορήματος n-θέσεων R, ορίζουμε $f^{\mathcal{A}}(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_2)$ για κάθε σύμβολο συνάρτησης n-θέσεων f και $c^{\mathcal{A}} = c$ για κάθε σύμβολο σταθεράς c. Θα αποδείξουμε (και αυτό αποτελεί το κλειδί στην απόδειξη του θεωρήματος της πληρότητας) ότι

$$T \vdash \phi \Leftrightarrow \mathcal{A} \vDash \phi$$

Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο μήκος του τύπου ϕ, δηλαδή στον αριθμό των συνδέσμων και ποσοδεικτών που εμφανίζονται στον ϕ.

Παρατηρούμε πρώτα ότι, λόγω του θεωρήματος της κλειστότητας, αρκεί να το αποδείξουμε για τις προτάσεις. Διότι, αν ισχύει για τις προτάσεις, θα ισχύει ότι $T \vdash \phi' \Leftrightarrow \mathcal{A} \vDash \phi'$, όπου ϕ' είναι η καθολική κλειστότητα του ϕ. Οπότε, από το θεώρημα της κλειστότητας, $T \vdash \phi' \Leftrightarrow T \vdash \phi$ και βέβαια $\mathcal{A} \models \phi' \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \phi$. Παρατηρούμε επίσης ότι για κάθε κλειστό όρο t έχουμε ότι $t^{\mathcal{A}} = t$. Κατά συνέπεια, η επαγωγική υπόθεση ισχύει, λόγω του ορισμού του $\mathcal{A}$, όταν ο ϕ είναι ατομικός. Χωρίζουμε τώρα την επαγωγή σε τρεις περιπτώσεις:

Περίπτωση 1. ϕ είναι $\neg\psi$. Τότε
$\mathcal{A} \vDash \phi \Leftrightarrow \mathcal{A} \nvDash \psi$
$\Leftrightarrow T \nvdash \psi$, από την Ε.Υ. (Επαγωγική Υπόθεση)
$\Leftrightarrow T \vdash \neg\psi$, από πληρότητα και συνέπεια του T
$\Leftrightarrow T \vdash \phi$

Περίπτωση 2. ϕ είναι $\psi_1 \to \psi_2$. Τότε
$\mathcal{A} \nvDash \phi \Leftrightarrow \mathcal{A} \vDash \psi_1$ και $\mathcal{A} \nvDash \psi_2$
$\Leftrightarrow T \vdash \psi_1$ και $T \nvdash \psi_2$, από Ε.Υ.
$\Leftrightarrow T \vdash \psi_1$ και $T \vdash \neg\psi_2$, από πληρότητα και συνέπεια του T.

Άρα $\mathcal{A} \nvDash \phi \Leftrightarrow T \vdash \psi_1$ και $T \vdash \neg\psi_2$
$\Rightarrow T \vdash \neg(\psi_1 \to \psi_2)$, λόγω της ταυτολογίας $\psi_1 \to (\neg\psi_2 \to \neg(\psi_1 \to \psi_2))$ και του κανόνα MP
$\Rightarrow T \nvdash \phi$, λόγω της συνέπειας του T.

Αντιστρόφως $T \nvdash \phi \Rightarrow T \vdash \neg(\psi_1 \to \psi_2)$, από την πληρότητα του T
$\Rightarrow T \vdash \psi_1$ και $T \vdash \neg\psi_2$ από τις ταυτολογίες $\neg(\psi_1 \to \psi_2) \to \psi_1$, $\neg(\psi_1 \to \psi_2) \to \neg\psi_2$ και τον κανόνα MP
$\Rightarrow \mathcal{A} \nvDash \phi$ (όπως πιο πάνω).

Περίπτωση 3. ϕ είναι $\forall x\psi$ (για κάποια μεταβλητή x).

[Μπορεί να υποθέσουμε ότι ο ψ έχει την x ως μοναδική υπαρκτή ελεύθερη μεταβλητή, επειδή διαφορετικά η ψ θα είναι πρόταση και προφανώς θα ισχύει $\mathcal{A} \vDash \phi \Leftrightarrow \mathcal{A} \vDash \psi \Leftrightarrow T \vdash \psi \Leftrightarrow T \vdash \phi$.]

Ας σημειώσουμε επίσης ότι από την συνθήκη του Henkin θα έχουμε ότι $T \vdash \exists x \neg\psi(x) \to \neg\psi(d)$, για κάποια σταθερά d. Τώρα

$\mathcal{A} \vDash \phi \Leftrightarrow \mathcal{A} \vDash \forall x\psi(x)$
$\Leftrightarrow \mathcal{A} \vDash \forall x\psi(x)[s]$, για μία αποτίμηση s, επειδή $\forall x\psi(x)$ είναι πρόταση
$\Leftrightarrow \mathcal{A} \vDash \psi[s(x/t)]$, για κάθε $t \in |\mathcal{A}|$
$\Leftrightarrow \mathcal{A} \vDash \psi[s(x/\overline{s}(t))]$, για κάθε $t \in |\mathcal{A}|$, επειδή $\overline{s}(t) = t$
$\Leftrightarrow \mathcal{A} \vDash \psi(t/x)[s]$, για κάθε $t \in |\mathcal{A}|$, από την πρόταση 4.27

$\Leftrightarrow \mathcal{A} \models \psi(t/x)$, για κάθε $t \in |\mathcal{A}|$, επειδή $\psi(t/x)$ πρόταση

$\Leftrightarrow T \vdash \psi(t/x)$, για κάθε $t \in |\mathcal{A}|$ (από Ε.Υ. επειδή $\psi(t/x)$ έχει κατά ένα λιγότερο ποσοδείκτη από τον $\forall x\psi$)

$\Rightarrow T \nvdash \exists x\neg\psi(x)$ επειδή διαφορετικά από τα αξιώματα Henkin και τον MP θα είχαμε $T \vdash \neg\psi(t)$, για κάποιο t, πράγμα που θα αντέκρουε τη συνέπεια.

$\Rightarrow T \nvdash \neg\forall x\neg\neg\psi(x)$

$\Rightarrow T \vdash \forall x\neg\neg\psi(x)$, από την πληρότητα του T

$\Rightarrow T \vdash \neg\neg\psi(x)$, από το A4 και MP

$\Rightarrow T \vdash \psi(x)$, από την ταυτολογία $\neg\neg\psi \rightarrow \psi$ και τον MP

$\Rightarrow T \vdash \forall x\psi(x)$, από τον Gen

$\Rightarrow T \vdash \phi$.

Αντιστρόφως $T \vdash \phi \Rightarrow T \vdash \forall x\psi(x)$

$\Rightarrow T \vdash \psi(t)$, για όλα τα $t \in |\mathcal{A}|$, από A4 και MP

$\Rightarrow \mathcal{A} \models \phi$, όπως και πιο πάνω.

Και με αυτό τελειώνει η επαγωγή.

Άρα $\mathcal{A} \models \phi \Leftrightarrow T \vdash \phi$ για όλες τις προτάσεις και άρα και για όλους τους τύπους ϕ. Ειδικότερα, όλα τα αξιώματα του T είναι αληθή στην $\mathcal{A}$, όθεν $\mathcal{A}$ είναι μοντέλο του T. □

Για να αποδείξουμε ότι κάθε συνεπής θεωρία S έχει μοντέλο αρκεί να αποδείξουμε ότι S έχει μια επέκταση T η οποία είναι θεωρία Henkin. Τώρα, δεν μπορούμε γενικά να βρούμε μια τέτοια επέκταση T στην $\mathcal{L}$ και γι' αυτόν τον λόγο επεκτείνουμε τη γλώσσα $\mathcal{L}$ σε μια γλώσσα $\mathcal{L}^*$, προσθέτοντας ένα αριθμήσιμο σύνολο από ειδικές καινούργιες σταθερές (καινούργια σύμβολα σταθερών)

$$d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots$$

Τα λογικά αξιώματα για την $\mathcal{L}^*$ ορίζονται ακριβώς όπως και για τη γλώσσα $\mathcal{L}$ (για τους τύπους, όρους κλπ. της $\mathcal{L}^*$). Παρ' όλα αυτά χρειάζεται να κατοχυρώσουμε το διαισθητικά προφανές γεγονός ότι επεκτείνοντας τη γλώσσα από την $\mathcal{L}$ στην $\mathcal{L}^*$ δεν αυξάνουμε τους τύπους της $\mathcal{L}$ που είναι θεωρήματα του κατηγορηματικού λογισμού.

Λήμμα 5.3 *Έστω T μια θεωρία στη γλώσσα $\mathcal{L}$ και T^* η θεωρία στη γλώσσα $\mathcal{L}^*$ η οποία έχει τα ίδια μη λογικά αξιώματα με την T. Τότε για κάθε τύπο ϕ της γλώσσας $\mathcal{L}$*

$$T \vdash \phi \iff T^* \vdash \phi$$

Απόδειξη Η κατεύθυνση $\Rightarrow$ είναι προφανής.

$\Leftarrow$: Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια απόδειξη του ϕ στη θεωρία T^*. Τότε αν αντικαταστήσουμε κάθε καινούργια σταθερά d_n που εμφανίζεται στην απόδειξη με μια (ξεχωριστή) μεταβλητή x_{i_n} η οποία δεν εμφανίζεται στην απόδειξη, αποκτούμε μια απόδειξη του ϕ στη θεωρία T. □

Λήμμα 5.4 *Κάθε συνεπής θεωρία T στη γλώσσα $\mathcal{L}$ έχει μια συνεπή επέκταση Henkin T_H στη γλώσσα $\mathcal{L}^*$.*

Απόδειξη Έστω $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \ldots$ μια αρίθμηση του αριθμήσιμου συνόλου των τύπων της γλώσσας $\mathcal{L}^*$ που έχουν ακριβώς μία ελεύθερη μεταβλητή. Για κάθε $n \geq 1$ ορίζουμε μια πρόταση ψ_n να είναι η πρόταση

$$\exists x \phi_n(x) \to \phi_n(d_{i_n})$$

όπου x δηλώνει την ελεύθερη μεταβλητή της ϕ_n και i_n είναι ο ελάχιστος ακέραιος τέτοιος, ώστε d_{i_n} δεν εμφανίζεται σε κανένα από τα $\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}$, άρα λόγω κατασκευής και σε κανένα από τα $\phi_1, \ldots, \phi_{n-1}$.

Έστω T_0 η θεωρία της $\mathcal{L}^*$ της οποίας τα (μη λογικά) αξιώματα είναι τα αξιώματα της T. Από λήμμα 5.3 η T_0 είναι συνεπής.

Έστω τώρα $T_n = T_0 \cup \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ για $n \geq 1$ και $T_H = \cup_{n=0}^{\infty} T_n$.

Ισχυρισμός: T_H είναι συνεπής.

Διότι ας υποθέσουμε ότι όχι. Τότε για κάποιο n, T_n πρέπει να είναι ασυνεπής (επειδή οι αποδείξεις κάποιων χ και $\neg\chi$ μπορούν να χρησιμοποιούν μόνον πεπερασμένο πλήθος από τα ψ_n). Έστω n ο ελάχιστος ακέραιος τ.ω. T_n είναι ασυνεπής (προφανώς $n \geq 1$). Από 5.17 κάθε τύπος αποδεικνύεται στην T_n, άρα $T_n \vdash \neg\psi_n$ και $T_n, \psi_n \vdash \neg\psi_n$, άρα από θεώρημα απαγωγής 5.1 $T_{n-1} \vdash \psi_n \to \neg\psi_n$ και άρα επειδή $T_{n-1} \vdash (\psi_n \to \neg\psi_n) \to \neg\psi_n$ (από στιγμιότυπο ταυτολογίας) έχουμε ότι $T_{n-1} \vdash \neg\psi_n$, δηλαδή $T_{n-1} \vdash \neg(\exists x \phi_n(x) \to \phi_n(d_{i_n}))$.

Κατά συνέπεια, χρησιμοποιώντας τα στιγμιότυπα ταυτολογίας $\neg(A \to B) \to A$ και $\neg(A \to B) \to \neg B$ καθώς και τον MP παίρνουμε ότι

$$T_{n-1} \vdash \exists x \phi_n(x) \quad \text{και} \quad T_{n-1} \vdash \neg\phi_n(d_{i_n}).$$

Τώρα, στην απόδειξη του $\neg\phi_n(d_{i_n})$ μπορούμε να αντικαταστήσουμε το d_{i_n} με μια μεταβλητή y η οποία δεν εμφανίζεται στην απόδειξη για να αποκτήσουμε το $T_{n-1} \vdash \neg\phi_n(y)$ και άρα το $T_{n-1} \vdash \forall y \neg\phi_n(y)$. Αλλάζοντας μεταβλητή[10] παίρνουμε το $T_{n-1} \vdash \forall x \neg\phi_n(x)$. Άρα T_{n-1} είναι ασυνεπής, αντίθετο με την υπόθεσή μας, επειδή ήδη έχουμε ότι $T_{n-1} \vdash \neg\forall\neg\phi_n(x)$ (επειδή $T_{n-1} \vdash \exists x \phi_n(x)$). Η T_H είναι λοιπόν μια συνεπής επέκταση της T, η οποία είναι προφανώς και θεωρία Henkin. □

Θεώρημα 5.23 *Κάθε συνεπής θεωρία T στη γλώσσα $\mathcal{L}$ έχει μοντέλο.*

Απόδειξη Ξεκινάμε από τη συνεπή θεωρία T. Η γλώσσα της θεωρίας T είναι η $\mathcal{L}$. Από το λήμμα 5.4 υπάρχει μια συνεπής επέκταση T_H, η οποία είναι και θεωρία Henkin. Από το λήμμα του Lindenbaum 5.2 η T_H έχει μια πλήρη και

[10] Αλλάζω (το όνομα σε μια δεσμευμένη) μεταβλητή στον τύπο $\forall y \phi(y)$ σημαίνει ότι, στον τύπο $\phi(y)$, αντικαθιστώ τις ελεύθερες εμφανίσεις της y με μια (φρέσκια) μεταβλητή x, η οποία δεν εμφανίζεται στον $\phi(y)$, οπότε παίρνω τον $\phi(x/y) = \phi(x)$. Δηλαδή ο $\forall y \phi(y)$ γίνεται $\forall x \phi(x)$. Ο τύπος αυτός, που τον ονομάζουμε variant του $\forall y \phi(y)$, έχει ακριβώς τις ίδιες ιδιότητες (αποδεικτικές, σημασιολογικές) μέχρι του σημείου να θεωρείται ότι κάθε τύπος ταυτίζεται με τον variant.

συνεπή επέκταση T_H^*. Είναι προφανές ότι κάθε επέκταση μιας θεωρίας Henkin παραμένει θεωρία Henkin. Άρα η T_H^* είναι θεωρία Henkin. Από πρόταση 5.22 η T_H^* έχει μοντέλο, έστω το μοντέλο $\mathcal{A}^*$. Το $\mathcal{A}^*$ είναι ερμηνεία της γλώσσας $\mathcal{L}^*$, δηλαδή έχει και μια ερμηνεία $d^{\mathcal{A}^*}$ για κάθε καινούργια σταθερά d που έχει προστεθεί στην $\mathcal{L}$ για να αποκτηθεί η $\mathcal{L}^*$. Στην $\mathcal{A}^*$ αληθεύει κάθε στοιχείο της T, το οποίο βέβαια γράφεται στη γλώσσα $\mathcal{L}$ και δεν περιέχει καμιά από τις σταθερές d. Αν στην ερμηνεία $\mathcal{A}^*$ διατηρήσουμε όλες τις ερμηνείες των συμβόλων της $\mathcal{L}$ όπως έχουν και καταργήσουμε τις ερμηνείες των σταθερών $d_1, \ldots, d_n$, τότε αυτό που προκύπτει (έστω $\mathcal{A}$) είναι μια ερμηνεία της $\mathcal{L}$ η οποία διατηρεί βέβαια τις αλήθειες της $\mathcal{L}$, επειδή αυτές δεν επηρεάζονται από τις ερμηνείες των «ξένων» στοιχείων $d^{\mathcal{A}^*}$. Άρα η $\mathcal{A}$ (την ονομάζουμε *περιορισμό* της $\mathcal{A}^*$) είναι μοντέλο της θεωρίας T. $\square$

Σημείωση: Επειδή $\mathcal{L}$ είναι αριθμήσιμο, το μοντέλο $\mathcal{A}$ είναι, από τον τρόπο που ορίστηκε, και αυτό αριθμήσιμο. Άρα κάθε συνεπής αριθμήσιμη θεωρία (δηλαδή με αριθμήσιμο πλήθος συμβόλων άρα και σύνολο τύπων) έχει αριθμήσιμο μοντέλο (δηλαδή το πεδίο της ερμηνείας που είναι μοντέλο είναι αριθμήσιμο σύνολο).

Απόδειξη του θεωρήματος πληρότητας 5.19 του Gödel.

Αρκεί να αποδείξουμε το θεώρημα για την περίπτωση που ϕ είναι πρόταση. Διότι αν το θεώρημα ισχύει για τις προτάσεις και ϕ είναι τύπος, τότε $T \vdash \phi$ είναι ισοδύναμο με το $T \vdash \phi'$, όπου ϕ' είναι η καθολική κλειστότητα του ϕ και βέβαια είναι πρόταση. Άρα από θεώρημα για τις προτάσεις θα έχουμε $T \vdash \phi'$ και από 5.8 $T \vdash \phi$.

Άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι ϕ είναι πρόταση. Αν $T \vDash \phi$ τότε το σύνολο $T, \neg\phi$ δεν είναι ικανοποιήσιμο. Άρα από 5.23 δεν είναι συνεπές. Άρα θα έχουμε ότι $T \vdash \phi$, διότι αν $T \nvdash \phi$ τότε από 5.18 το σύνολο $T, \neg\phi$ θα ήταν συνεπές.

Παρατηρήσεις για την απόδειξη του θεωρήματος της πληρότητας

Στην απόδειξη του θεωρήματος της πληρότητας κάναμε δύο υποθέσεις οι οποίες μπορούν να τροποποιηθούν.

1. Στην απόδειξη υποθέσαμε ότι η $\mathcal{L}$ δεν περιέχει το σύμβολο της ισότητας $=$. Τώρα ας υποθέσουμε ότι η $\mathcal{L}$ περιέχει το σύμβολο $=$. Τότε αν T είναι μια συνεπής θεωρία έπεται από το 5.23 ότι η $\mathcal{L}$ έχει μια ψευδοερμηνεία $\mathcal{A}$ η οποία ικανοποιεί τα αξιώματα της T.

Θέλουμε να αποδείξουμε ένα θεώρημα πληρότητας που να αναφέρεται σε θεωρίες με ισότητα, δηλαδή σε θεωρίες που περιλαμβάνουν στα λογικά τους αξιώματα τα αξιώματα ΑξΙ της ισότητας. Διατυπωμένο με όρους που έχουν οριστεί στον ορισμό 5.12, το θεώρημα αυτό μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: Αν T θεωρία με ισότητα και ϕ τύπος στη γλώσσα της θεωρίας, τότε

$$T \models_I \phi \;\Leftrightarrow\; T \vdash_I \phi$$

όπου $T \models_I \phi$ σημαίνει ότι ϕ είναι αληθής σε κάθε standard ερμηνεία της $\mathcal{L}$ η οποία είναι μοντέλο του T. Ας δούμε πώς μπορούμε να τροποποιήσουμε το αποδειχθέν θεώρημα πληρότητας ώστε να καλύπτεται και αυτή η απαίτηση.

Είναι σχετικά εύκολο να μετατρέψουμε μια ψευδοερμηνεία $\mathcal{A}$, της γλώσσας $\mathcal{L}$, σε μια (standard) ερμηνεία $\overline{\mathcal{A}}$ η οποία να ικανοποιεί τις ίδιες προτάσεις με την $\mathcal{A}$. Η $\overline{\mathcal{A}}$ θα είναι «ομομορφική» εικόνα της $\mathcal{A}$.

Ας σημειωθεί, κατά πρώτον, ότι από τα αξιώματα I1 και I2 και τις ιδιότητες της ισότητας στη σελίδας 71 η $=^{\mathcal{A}}$ θα είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο $\mathcal{A}$.

Τώρα, για κάθε $a \in |\mathcal{A}|$, έστω $[a]$ συμβολίζει την κλάση ισοδυναμίας του a ως προς τη σχέση $=^{\mathcal{A}}$.

Έστω ότι $|\overline{\mathcal{A}}| = \{[a] \mid a \in \mathcal{A}\}$.

Στην πραγματικότητα έπεται από τα αξιώματα της ισότητας ότι $=^{\mathcal{A}}$ δεν είναι μόνο σχέση ισοδυναμίας αλλά ότι ικανοποιεί και την εξής ιδιότητα: Αν

$$a_1 =^{\mathcal{A}} a_1', \ldots, a_n =^{\mathcal{A}} a_n'$$

και $R^{\mathcal{A}}$ είναι η ερμηνεία του συμβόλου κατηγορήματος n-θέσεων R, τότε

$$< a_1, \ldots, a_n > \in R^{\mathcal{A}} \;\Leftrightarrow\; < a_1', \ldots, a_n' > \in R^{\mathcal{A}}$$

και αν $f^{\mathcal{A}}$ είναι η ερμηνεία του συμβόλου n-θέσεων f, τότε

$$f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) = f^{\mathcal{A}}(a_1', \ldots, a_n').$$

Αυτό μας επιτρέπει να ορίσουμε χωρίς αμφισημία τα ακόλουθα:

- $R^{\overline{\mathcal{A}}} = \{< [a_1], \ldots, [a_n] > \;\mid\; < a_1, \ldots, a_n > \in R^{\mathcal{A}}\}$
- $f^{\overline{\mathcal{A}}}([a_1], \ldots, [a_n]) = [f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)]$
- $c^{\overline{\mathcal{A}}} = [c^{\mathcal{A}}]$.

Προφανώς, εκ κατασκευής, στην ειδική περίπτωση που το R είναι $=$, παίρνουμε ότι $=^{\overline{\mathcal{A}}}$ είναι η ταυτοτική σχέση στο $|\overline{\mathcal{A}}|$. Έτσι το $\overline{\mathcal{A}}$ είναι μια standard ερμηνεία της $\mathcal{L}$. Είναι σχετικά εύκολο, αλλά μακρόσυρτο, να αποδείξουμε με επαγωγή στον ϕ ότι

$$\mathcal{A} \models \phi \;\Leftrightarrow\; \overline{\mathcal{A}} \models \phi.$$

Άρα $\overline{\mathcal{A}}$ είναι μοντέλο του S.

Έστω T θεωρία ισότητας και συνεπής δηλαδή $T, A\xi I \nvdash \phi \wedge \neg\phi$. Τότε από 5.23 υπάρχει μια ψευδοερμηνεία $\mathcal{L}$ που είναι μοντέλο του $T, A\xi I$, δηλαδή η $\mathcal{A}$ είναι ψευδοερμηνεία που ικανοποιεί τα αξιώματα της ισότητας. Από την προηγούμενη κατασκευή βλέπουμε ότι η $\overline{\mathcal{A}}$ είναι μια standard ερμηνεία της $\mathcal{L}$ που ικανοποιεί την T. Άρα η θεωρία T δέχεται standard μοντέλο. Επανερχόμαστε στο θεώρημα πληρότητας για την ισότητα. Η κατεύθυνση $T \vdash_I \phi \;\Rightarrow\; T \models_I \phi$

είναι προφανής. Έστω τώρα $T \models_I \phi$. Αν θεωρήσουμε ένα οποιοδήποτε μοντέλο $\mathcal{A}$ (ψευδοερμηνεία) που ικανοποιεί τα αξιώματα της ισότητας, τότε $\mathcal{A}$ είναι μοντέλο του $T, A\xi I$. Από τα παραπάνω $\overline{\mathcal{A}}$ είναι standard μοντέλο του T, άρα ικανοποιεί το ϕ, άρα και το $\mathcal{A}$ ικανοποιεί το ϕ δηλαδή έχουμε $T, A\xi I \models \phi$, που από το θεώρημα πληρότητας μας δίνει το ζητούμενο, δηλαδή $T \vdash_I \phi$.

2. Δεν είναι απαραίτητο να υποθέσουμε ότι η γλώσσα $\mathcal{L}$ είναι αριθμήσιμη. Η υπόθεση αυτή χρησιμοποιείται μόνον στις αποδείξεις των 5.2 και 5.4. Και στις δύο περιπτώσεις αν αντί αυτού υποθέσουμε ότι το σύνολο των τύπων της $\mathcal{L}$ μπορούν να διαταχθούν καλώς, μπορούμε να τροποποιήσουμε το επιχείρημα και να έχουμε την απόδειξη με υπερπεπερασμένη[11] επαγωγή ή εναλλακτικά με το λήμμα του Zorn και σ' αυτήν την περίπτωση. Βέβαια αυτό προϋποθέτει το αξίωμα της επιλογής.

Οι παραπάνω παρατηρήσεις και αποδείξεις μας επιτρέπουν να διατυπώσουμε τα ακόλουθα:

Όταν έχουμε γλώσσα και θεωρία με ισότητα, τότε έχουμε πάντα ως ερμηνεία της γλώσσας τη standard ερμηνεία, οπότε κάθε μοντέλο θα είναι standard μοντέλο. Θα γράφουμε $T \vdash \phi$, $T \models \phi$ ακόμα και στην περίπτωση των θεωριών με ισότητα. Τα θεωρήματα πληρότητας, συμπάγειας και όλα όσα θα διατυπώσουμε ισχύουν και στην περίπτωση των θεωριών με ισότητα.

Θεώρημα 5.24 *Έστω T θεωρία σε αριθμήσιμη γλώσσα. Τότε:*

α1. Αν η T είναι συνεπής, τότε δέχεται αριθμήσιμο μοντέλο.

α2. Αν ϕ είναι αληθής σε όλα τα αριθμήσιμα μοντέλα του T, τότε $T \vdash \phi$.

Θεώρημα 5.25 (Θεώρημα της συμπάγειας) *Αν T είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο, τότε είναι ικανοποιήσιμο.*

Απόδειξη Με την απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτουμε ότι το T δεν είναι ικανοποιήσιμο, τότε $T \models \phi \wedge \neg\phi$. Από θεώρημα 9.14 έχουμε $T \vdash \phi \wedge \neg\phi$ και άρα για ένα πεπερασμένο $T_0 \subseteq T$ θα έχουμε $T_0 \vdash \phi \wedge \neg\phi$. Αλλά το T_0 έχει μοντέλο στο οποίο, από το θεώρημα της ορθότητας, το $\phi \wedge \neg\phi$ θα ήταν αληθές (άτοπο). □

[11] Η υπερπεπερασμένη επαγωγή είναι η αρχή της επαγωγής εφαρμοζόμενη στις καλές διατάξεις.

5.4 Ασκήσεις

1. Για τυχόντα τύπο φ που δεν περιέχει τα σύμβολα $\rightarrow, \leftrightarrow$, έστω φ^* ο τύπος που παίρνουμε αντικαθιστώντας κάθε ατομικό υποτύπο με την άρνησή του, εναλλάσσοντας το $\wedge$ με το $\vee$ και εναλλάσσοντας το $\forall$ με το $\exists$. Δείξτε ότι ισχύει: $\vdash \varphi$ ανν $\vdash \neg\varphi^*$.

2. Χρησιμοποιώντας τυπικές αποδείξεις, δείξτε ότι για κάθε μεταβλητή x και οποιουσδήποτε τύπους φ, ψ ισχύει:

$$\vdash \forall x \neg\psi \rightarrow [\exists x\varphi \rightarrow \exists x \neg(\varphi \rightarrow \psi)].$$

3. Αποδείξτε τα ακόλουθα:

α1. Κάθε τύπος μιας πρωτοβάθμιας θεωρίας T, ο οποίος είναι στιγμιότυπο ταυτολογίας, είναι θεώρημα της T και μάλιστα μπορεί να αποδειχθεί με τη χρήση μόνον των αξιωμάτων A1–A3 και του κανόνα MP.

α2. Έστω $\mathcal{L}$ πρωτοβάθμια γλώσσα. Αποδείξτε, χωρίς τη χρήση του θεωρήματος της πληρότητας του κατηγορηματικού λογισμού, ότι για κανέναν τύπο ϕ της $\mathcal{L}$ δεν είναι δυνατόν να έχουμε $\vdash \phi$ και $\vdash \neg\phi$, δηλαδή ο καθαρός πρωτοβάθμιος κατηγορηματικός λογισμός (θεωρία T στην $\mathcal{L}$ χωρίς μη λογικά αξιώματα, δηλαδή $T = \emptyset$) είναι συνεπής.

[Υπόδειξη: Θεωρήστε τον τελεστή $h(\phi)$, ο οποίος σε κάθε τύπο ϕ της $\mathcal{L}$ απαλείφει όλους τους ποσοδείκτες και τους όρους του ϕ – μαζί και τις αντίστοιχες παρανθέσεις και κόμματα. Δείτε πώς ο h επενεργεί στα θεωρήματα της T, δηλαδή αν $\vdash \phi$, τότε $h(\phi)$ τι είναι;]

4. Έστω T σύνολο τύπων και ϕ τύπος και έστω $\phi_1, \ldots, \phi_n$ απόδειξη στη θεωρία T. Η ακολουθία $\phi_1, \ldots, \phi_n$ συγκροτεί μια απόδειξη επειδή σε κάθε βήμα i $(1 \leq i \leq n)$ υπάρχει μια *αιτιολογία* για το ϕ_i ($\phi_i \in T$ ή είναι συμπέρασμα ενός κανόνα απαγωγής - δες ορισμό στις σημειώσεις). Λέμε ότι ο ϕ_i *εξαρτάται από* τον ϕ (στην απόδειξη αυτή) εάν

α1. ϕ_i ταυτίζεται με τον ϕ και η αιτιολογία για τον ϕ_i είναι ότι ανήκει στο T, ή

α2. η αιτιολογία για τον ϕ_i είναι ότι είναι συμπέρασμα κανόνα MP ή Gen με υποθέσεις προηγηθέντες τύπους που τουλάχιστον ένας από αυτούς εξαρτάται από τον ϕ.

Αποδείξτε ότι: Αν $T, \phi \vdash \psi$ και στην απόδειξη του ψ από το T, ϕ καμία εφαρμογή του Gen, σε τύπο που εξαρτάται από τον ϕ, δεν χρησιμοποιεί μεταβλητή που είναι ελεύθερη στον ϕ, τότε $T \vdash \phi \rightarrow \psi$.

5. Αν x είναι αντικαταστάσιμη από τον t στον $\phi(x)$, τότε $\vdash \phi(t/x) \to \exists x \phi(x)$. Όθεν $\phi(t/x) \vdash \exists x \phi(x)$.

6. [Κανόνας επιλογής σταθεράς ή κανόνας C.]
   Η απαγωγή $T \vdash_C \phi$ ορίζεται ως εξής:
   $T \vdash_C \phi \Leftrightarrow$ υπάρχει ακολουθία $\phi_1, \ldots, \phi_n \equiv \phi$ ώστε για κάθε i

   α1. ϕ_i είναι λογικό αξίωμα, ή

   α2. $\phi_i \in T$, ή

   α3. ϕ_i είναι συμπέρασμα κανόνα MP ή Gen, με υποθέσεις προηγηθέντες τύπους ή

   α4. υπάρχει προηγηθείς τύπος ϕ_j $(j < i)$ της μορφής $\exists x \psi(x)$ με $\phi_i \equiv \psi(d)$, όπου d είναι μια καινούργια σταθερά (άρα υπάρχει και επέκταση της γλώσσας). [Κανόνας C]

Επιπροσθέτως, ισχύουν και οι κάτωθι προδιαγραφές για τη δημιουργία τέτοιων αποδείξεων (αποδείξεων με κανόνα C).

- Στην κατασκευή των αποδείξεων μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ως λογικά αξιώματα και αυτά που χρησιμοποιούν σταθερές που έχουν ήδη εισαχθεί.
- Δεν επιτρέπεται εφαρμογή του Gen με μεταβλητή η οποία είναι ελεύθερη σε κάποιο $\exists x \phi(x)$ και στο οποίο ο κανόνας C έχει προηγουμένως εφαρμοστεί.
- Ο ϕ δεν περιέχει καμία από τις εισαχθείσες σταθερές.

Αν όλα αυτά ικανοποιούνται, αποδείξτε ότι:

$$T \vdash_C \phi \ \Rightarrow \ T \vdash \phi$$

Επαληθεύστε επίσης, στην απόδειξη που θα δώσετε, ότι αν υπάρχει, στην καινούργια τυπική απόδειξη $T \vdash \phi$, εφαρμογή Gen με κάποια μεταβλητή που εφαρμόζεται σε τύπο που εξαρτάται από κάποιο τύπο του T, τότε υπάρχει μια τέτοια εφαρμογή του Gen και στην αρχική απόδειξη $T \vdash_C \phi$.

Κατόπιν, χρησιμοποιώντας τον κανόνα C, δώστε πιο «εύκολες» αποδείξεις των κάτωθι:

$\exists x(\phi \to \psi),\ \forall x \phi \vdash \exists x \psi$
$\vdash \exists x(\phi(x) \to \psi(x)) \to (\forall x \phi(x) \to \exists x \psi(x))$
$\vdash (\forall x \phi(x) \lor \forall x \psi(x)) \to \forall x(\phi(x) \lor \psi(x))$.

Βιβλιογραφία κεφαλαίου 5

Ε2, Ε3, Ε4, Ξ1, Ξ2, Ξ8.

(Οι αναφορές παραπέμπουν στη βιβλιογραφία στο τέλος του βιβλίου)

6 Υπολογισιμότητα, αναδρομικές συναρτήσεις

6.1 Το πρόβλημα της απόφανσης ή απόκρισης - Υπολογισιμότητα.

Μια μέθοδος απόφανσης ή απόκρισης για ένα τυπικό σύστημα T είναι μια μέθοδος βάσει της οποίας μπορούμε να αποφασίσουμε, με έναν πεπερασμένο αριθμό βημάτων, αν ένας τύπος ϕ, της γλώσσας της T, είναι θεώρημα της T ή όχι. Ο τρόπος με τον οποίο θα εφαρμόζεται αυτή η μέθοδος πρέπει να είναι απόλυτα κατασκευαστικός-μηχανικός. Δηλαδή η μέθοδος θα πρέπει να συνίσταται σε απόλυτα προκατασκευασμένους μηχανικούς κανόνες που θα εκτελούνται βήμα προς βήμα, ώσπου η διαδικασία να τερματιστεί και να δοθεί η τελική απάντηση. Θα αποτελεί λοιπόν αυτή η μέθοδος –θα την αποκαλούμε και αλγόριθμο– μια κατασκευαστική, μηχανική συνταγή επίλυσης του προβλήματος.

Ένα πρόβλημα απόφανσης ή απόκρισης για ένα τυπικό σύστημα T είναι το ακόλουθο: να βρούμε μια μέθοδο απόκρισης για το T ή να αποδείξουμε ότι τέτοια μέθοδος δεν υπάρχει. Αυτό αποτελούσε ουσιαστικά το περίφημο Entscheidungsproblem του Hilbert και η αναζήτηση της λύσης του οδήγησε σε συγκλονιστικά μαθηματικά αποτελέσματα, κατά το πρώτο ήμισυ του 20ού αιώνα και τελικά στη δημιουργία της επιστήμης της πληροφορικής.

Ας πάρουμε το παράδειγμα της προτασιακής λογικής. Ένα πρόβλημα απόφανσης στην περίπτωση αυτή θα ήταν να βρούμε μια μέθοδο που θα αποφαίνεται π.χ. αν ένας προτασιακός τύπος ϕ είναι θεώρημα της θεωρίας χωρίς μη λογικά αξιώματα, δηλαδή αν $\vdash \phi$. Ξέρουμε όμως ότι αυτό συμβαίνει αν και μόνον αν ο ϕ είναι ταυτολογία. Οπότε η μέθοδος θα είναι να σχηματίσουμε τον αληθοπίνακα για τον ϕ και να δούμε αν η τιμή που υπολογίζουμε είναι κάθε φορά T. Αν αυτό συμβαίνει, τότε η απάντηση είναι ναι, ενώ αν βρούμε τουλάχιστον μια τιμή F η απάντηση είναι όχι. Επειδή οι δυνατοί συνδυασμοί είναι πεπερασμένοι (2^n, αν n είναι το πλήθος των προτασιακών μεταβλητών στον ϕ) η διαδικασία αυτή, που βέβαια μπορεί να εκτελεστεί με απόλυτα μηχανικό τρόπο, θα περατωθεί σε πεπερασμένο χρόνο και θα έχουμε την απάντηση.

Αντίθετα, στον κατηγορηματικό λογισμό, μια τέτοια μέθοδος δεν φαίνεται εφικτή. Για να ελέγξουμε αν π.χ. ένας τύπος ϕ είναι θεώρημα της θεωρίας χωρίς μη λογικά αξιώματα, δηλαδή αν $\vdash \phi$, θα πρέπει, σύμφωνα με το θεώρημα πληρότητας, ο τύπος να είναι έγκυρος, άρα θα πρέπει να ελέγξουμε την αλήθειά του σε όλες τις ερμηνείες της γλώσσας, που είναι άπειρες, συν το γεγονός ότι και σε μία άπειρη δομή δεν είναι φανερό ότι μπορούμε, με πεπερασμένα βήματα, να ελέγξουμε την αλήθεια σ' αυτήν τη δομή. Με δεδομένη αυτήν την αδυναμία εύρεσης μιας τέτοιας μεθόδου, αρχίζουμε να σκεφτόμαστε και το δεύτερο σκέλος του προβλήματος της απόκρισης, δηλαδή να αποδείξουμε ότι τέτοια μέθοδος δεν υπάρχει.

Το πρόβλημα της απόκρισης είναι γενικότερο, δηλαδή δεν περιορίζεται μόνο στο ζήτημα του αν ένας τύπος είναι θεώρημα μιας θεωρίας ή όχι. Ήδη, από την αρχή του 20ού αιώνα, ο Hilbert είχε θέσει το πρόβλημα του να βρεθεί μια αποτελεσματική - μηχανική μέθοδος που να αποφασίζει αν μια διοφαντική εξίσωση έχει λύση ή όχι. Και βέβαια μπορούμε να συναντήσουμε πλήθος ανάλογων προβλημάτων στα μαθηματικά.

Στην επίλυση ενός προβλήματος απόκρισης, αν προσδοκούμε σε μια θετική απάντηση, θα αναζητήσουμε μια μέθοδο που θα επιλύει το πρόβλημα. Δηλαδή θα παρουσιάσουμε (αν τελικά το καταφέρουμε) ένα σύνολο κανόνων, τη μέθοδο της απόκρισης, που θα επιλύει το πρόβλημα. Άπαξ και παρουσιαστεί ένας τέτοιος αλγόριθμος, ο καθένας μπορεί να ελέγξει αν όντως αυτός είναι ένας αλγόριθμος που επιλύει με κατασκευαστικό τρόπο το πρόβλημα. Πώς όμως θα μπορέσουμε να δώσουμε μια αρνητική απάντηση σε ένα πρόβλημα απόκρισης; Θα πρέπει τότε να αποδείξουμε ότι τέτοιος αλγόριθμος δεν υπάρχει. Αυτό βέβαια απαιτεί και κάτι παραπάνω. Το ότι πρέπει να περιγράψουμε τον αλγόριθμο ως μαθηματικό αντικείμενο και να αποδείξουμε ότι, για το συγκεκριμένο πρόβλημα, τέτοιο αντικείμενο δεν υπάρχει.

Το ενδιαφέρον στην περίπτωση αυτή είναι ότι όλες οι μηχανικές, αλγοριθμικές διαδικασίες επί μαθηματικών αντικειμένων, π.χ. τύπων της γλώσσας, μπορούν να αναχθούν, μέσω κάποιας κωδικοποίησης (δες κεφάλαιο 7.3), σε συναρτήσεις επί των φυσικών αριθμών. Οπότε το όλο ζήτημα ανάγεται στο αν μια αριθμητική συνάρτηση, δηλαδή μια συνάρτηση με ορίσματα και τιμές φυσικούς αριθμούς, έχει μια μέθοδο απόκρισης· αυτό σημαίνει ότι θα υπάρχει ή δεν θα υπάρχει μια μηχανική μέθοδος που υπολογίζει, για κάθε σύνολο ορισμάτων της συνάρτησης, αποτελεσματικά την τιμή της. Τότε θα λέμε ότι η συνάρτηση είναι υπολογίσιμη.

Με το θέμα αυτό ασχολήθηκαν μεγάλοι μαθηματικοί, κυρίως τη δεκατία του 1930, όπως οι Turing, Church, Gödel, Herbrand, Kleene και άλλοι. Ο Turing έδωσε τον ορισμό του υπολογίσιμου μέσω της περιγραφής μιας θεωρητικής μηχανής (Μηχανή Turing) η οποία λειτουργώντας με βάση κάποιους προκαθορισμένους κανόνες (το πρόγραμμα) υπολογίζει τιμές συναρτήσεων. Ο Church ανέπτυξε ένα γενικό πλαίσιο υπολογισμού, με βάση τη λειτουργική έννοια της συνάρτησης, τον λάμβδα λογισμό. Οι Gödel και Herbrand, εκκινώντας από μια κλάση συναρτήσεων που χρησιμοποίησε ο Gödel στην απόδειξη των θεωρημάτων μη πληρότητας, μελέτησαν την έννοια του υπολογίσιμου με βάση την έννοια της αναδρομής, πράγμα που συμπλήρωσε και ανέπτυξε ο Kleene. Έτσι λοιπόν η έννοια του υπολογίσιμου ταυτίστηκε τελικά με την έννοια της αναδρομικής συνάρτησης.

6.2 Αναδρομικές συναρτήσεις

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε κάποιες κύριες ιδιότητες που αφορούν τις αναδρομικές συναρτήσεις.

Συμβολισμοί: Με $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots, n \ldots\}$ συμβολίζουμε το σύνολο των φυσικών αριθμών. Τα $x, y, z, \ldots, a, b, c, \ldots$ δέχονται τιμές από το $\mathbb{N}$. Με

F, G, H θα συμβολίζουμε τις αριθμητικές συναρτήσεις, δηλαδή, για κάποιο n, τις συναρτήσεις απ' το $\mathbb{N}^n$ στο $\mathbb{N}$ και με P, Q, R τα αριθμητικά κατηγορήματα ή σχέσεις, δηλαδή υποσύνολα του $\mathbb{N}^n$. Με $\vec{x}$ θα συμβολίζουμε τη n-άδα $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ (το n θα τεκμαίρεται πολλές φορές από τα συμφραζόμενα), με $\forall \vec{x}$ το $\forall x_1 \ldots \forall x_n$ και αντίστοιχα με $\exists \vec{x}$ το $\exists x_1 \ldots \exists x_n$.

Ορισμός 6.1 *Η συνάρτηση $F : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ είναι* υπολογίσιμη *εάν υπάρχει ένας (μηχανικός) αλγόριθμος ο οποίος αν τον τροφοδοτήσουμε με τους αριθμούς $a_1, \ldots, a_n$ να μας προμηθεύει, σε πεπερασμένο χρόνο, την τιμή $F(a_1, \ldots, a_n)$· δηλαδή αν υπάρχει μια αποτελεσματική, μηχανική συνταγή υπολογισμού των τιμών της συνάρτησης.*

Παρατήρηση 6.2 *Ο ανωτέρω ορισμός δεν είναι ένας αυστηρός μαθηματικός ορισμός. Αναφέρεται σε έννοιες, όπως αλγόριθμος, για τις οποίες δεν έχουν δοθεί μαθηματικοί ορισμοί. Αργότερα θα δούμε πώς μπορούμε να δώσουμε ένα αυστηρό μαθηματικό ανάλογο της έννοιας «υπολογίσιμη συνάρτηση».*

Ορισμός 6.3 *Για $P \subset \mathbb{N}^n$, η* χαρακτηριστική συνάρτηση *του P, η C_P, ορίζεται ως εξής:*

$$C_P = \begin{cases} 0 & \text{αν } P(\vec{x}) \\ 1 & \text{αν } \neg P(\vec{x}) \end{cases}$$

Ορισμός 6.4 *Ένα κατηγόρημα P είναι* υπολογίσιμο *αν η χαρακτηριστική του συνάρτηση C_P είναι υπολογίσιμη.*

Ορισμός 6.5 *Για κάθε n και κάθε i με $1 \leq i \leq n$, ορίζουμε τη συνάρτηση $I_i^n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ να είναι η $I_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i$. Η I_i^n λέγεται* συνάρτηση προβολής.

Θα ορίσουμε κλάσεις αριθμητικών συναρτήσεων Σ, χρησιμοποιώντας τους ακόλουθους κανόνες:

(**R1**) Οι *βασικές συναρτήσεις* $Z, \sigma, +, \cdot, C_<$ και I_i^n (για κάθε i, n με $1 \leq i \leq n$), ανήκουν στο Σ, όπου $+$ και $\cdot$ είναι αντιστοίχως οι γνωστές συναρτήσεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και
η $C_<$ είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση της σχέσης $<$ στο $\mathbb{N}$,
$Z : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, με $Z(x) = 0$, για κάθε x, δηλαδή η μηδενική συνάρτηση, και
$\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, με $\sigma(x) = x + 1$ (η συνάρτηση του επόμενου).

Οι βασικές συναρτήσεις είναι από τις απλούστερες δυνατές συναρτήσεις που μπορεί κάποιος να φανταστεί, αν θέλει να κάνει στοιχειώδεις αριθμητικές πράξεις.

(**R2**)[Αντικατάσταση]. Αν $G, H_1, \ldots, H_k \in \Sigma$ και $F(\vec{x}) = G(H_1(\vec{x}), \ldots, H_k(\vec{x}))$, τότε $F \in \Sigma$.

(**R3**)[Αναδρομή]. Αν $G, H \in \Sigma$ και η F ορίζεται από τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} &F(0, \vec{x}) = G(\vec{x}) \\ &F(y+1, \vec{x}) = H(F(y, \vec{x}), y, \vec{x}) \end{aligned}$$

τότε η F ανήκει στο Σ.

Ορισμός 6.6 *Η κλάση των πρωτογενών αναδρομικών συναρτήσεων είναι η μικρότερη κλάση αριθμητικών συναρτήσεων που είναι κλειστή για τους κανόνες R1, R2 και R3. Δηλαδή είναι η μικρότερη κλάση συναρτήσεων που περιέχει τις βασικές συναρτήσεις και είναι κλειστή για τους κανόνες σχηματισμού συναρτήσεων (σχήματα) R2 και R3.*

Σημειωτέον ότι μια συνάρτηση είναι πρωτογενής αναδρομική, μόνον αν μπορούμε να την ορίσουμε ξεκινώντας από τις βασικές συναρτήσεις και εφαρμόζοντας τα βήματα R1 και R2. Η ανάλογη παρατήρηση βέβαια ισχύει για κάθε επαγωγικό ορισμό.

Παράδειγμα 6.7 Η εκθετική συνάρτηση $x^y = \mathrm{Exp}(y, x)$ είναι πρωτογενής αναδρομική, διότι

$$\begin{aligned} &\mathrm{Exp}(0, x) = 1 = \sigma(Z(x)) \\ &\mathrm{Exp}(y+1, x) = \mathrm{Exp}(y, x) \cdot x = H(\mathrm{Exp}(y, x), y, x) \end{aligned}$$

όπου $H(a, b, c,) = \cdot(I_1^3(a, b, c,), I_3^3(a, b, c))$.

Λήμμα 6.8 *Έστω ότι η κλάση Σ ικανοποιεί τα R1 και R2 και έστω $G \in \Sigma$. Τότε, αν $x_1, \ldots, x_n$ είναι ξεχωριστές μεταβλητές και αν $z_1, \ldots, z_k$ ακολουθία μεταβλητών ώστε $z_i \in \{x_1, \ldots, x_n\}$, $(1 \leq i \leq k)$ και αν η F ορίζεται από $F(x_1, \ldots, x_n) = G(z_1, \ldots, z_k)$ (είναι δυνατόν να έχουμε και $k > n$), τότε $F \in \Sigma$.*

Απόδειξη Έστω $z_i = x_{j_i}$ για $(1 \leq i \leq k)$. Τότε έχουμε

$$F(x_1, \ldots, x_n) = G(I_{j_1}^n(x_1, \ldots, x_n), \ldots, I_{j_k}^n(x_1, \ldots, x_n))$$

$\square$

Το λήμμα μας επιτρέπει, σε ορισμούς συναρτήσεων, για κλάσεις συναρτήσεων που ικανοποιούν τα R1, R2, να ταυτίζουμε, αντιμεταθέτουμε και να προσθέτουμε εικονικές μεταβλητές χωρίς να οδηγούμαστε εκτός της κλάσης Σ. Για παράδειγμα, αν $G(x_1, x_2, x_3) \in \Sigma$, τότε όλες οι συναρτήσεις που ορίζονται με $F_1(x_1, x_2) = G(x_1, x_2, x_1)$, $F_2(x_2, x_1, x_3) = G(x_1, x_2, x_3)$ και $F_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = G(x_1, x_2, x_3)$ ανήκουν στο Σ.

Ορισμός 6.9 *Έστω $P(\vec{x}, y)$ κατηγόρημα και έστω ότι ισχύει[12] η $\forall \vec{x}\, \exists y P(\vec{x}, y)$, τότε*

$$\mu y P(\vec{x}, y) = \text{ το ελάχιστο } y \text{ τέτοιο ώστε } P(\vec{x}, y).$$

[12] Όταν εδώ λέμε ότι μια πρόταση ισχύει θα εννοούμε ότι είναι αληθής στη δομή των φυσικών αριθμών.

Ας σημειωθεί ότι για κάθε $\vec{x}$, υπάρχει τουλάχιστον ένα y ώστε να ισχύει η $P(\vec{x}, y)$. Ο τελεστής μy επιλέγει το ελάχιστο τέτοιο. Άρα το $\mu y P(\vec{x}, y)$ ορίζει μια συνάρτηση.

(**R4**) [Τελεστής ελαχιστοποίησης] Αν $G \in \Sigma$ και αν $\forall\vec{x}\exists y(G(\vec{x}, y) = 0)$, τότε $\mu y(G(\vec{x}, y) = 0) \in \Sigma$.

Ορισμός 6.10 *Η κλάση των αναδρομικών συναρτήσεων είναι η μικρότερη κλάση αριθμητικών συναρτήσεων που είναι κλειστή για τους κανόνες R1, R2 και R4. Αν μια συνάρτηση ανήκει στην κλάση αυτή λέμε ότι η συνάρτηση είναι (ολική) αναδρομική συνάρτηση.*

Ορισμός 6.11 *Το κατηγόρημα P είναι* αναδρομικό κατηγόρημα *αν η χαρακτηριστική συνάρτηση C_P είναι αναδρομική συνάρτηση. Είναι πρωτογενές αναδρομικό κατηγόρημα αν η C_P είναι πρωτογενής αναδρομική συνάρτηση.*

Παρατήρηση 6.12 *Είναι φανερό ότι κάθε αναδρομική συνάρτηση ή κατηγόρημα είναι υπολογίσιμη, με την έννοια ότι υπάρχει αλγόριθμος που υπολογίζει αποτελεσματικά την τιμή της συνάρτησης (στην περίπτωση του κατηγορήματος επιβεβαιώνει αν ισχύει ή όχι). Η περιγραφή αυτού του αλγορίθμου είναι ο αναδρομικός ορισμός της συνάρτησης ή του κατηγορήματος, αφού οι βασικές συναρτήσεις είναι υπολογίσιμες και τα σχήματα R2, R3 και R4 οδηγούν από υπολογίσιμες συναρτήσεις σε υπολογίσιμες συναρτήσεις (το αντίστοιχο για τα κατηγορήματα). Για παράδειγμα, στο σχήμα R4, αν ξέρουμε ότι η $G(\vec{x}, y)$ είναι υπολογίσιμη, τότε υπολογίζουμε τη $\mu y(G(\vec{x}, y) = 0)$ ως εξής: Υπολογίζουμε διαδοχικά τα $G(\vec{x}, 0)$, $G(\vec{x}, 1)$, $G(\vec{x}, 3)$ κλπ. Λόγω της συνθήκης $\forall\vec{x}\,\exists y(G(\vec{x}, y) = 0)$, κάποτε θα βρούμε για πρώτη φορά ένα n ώστε να ισχύει η $G(\vec{x}, n) = 0$. Αυτό το n τότε θα είναι η τιμή της συνάρτησης.*

6.3 Ρητοί ορισμοί

Στη συνέχεια θα δώσουμε κάποιους κανόνες κατασκευής νέων αναδρομικών συναρτήσεων και κατηγορημάτων.

(**C1**) Αν Q αναδρομικό κατηγόρημα και $F_1, \ldots, F_k$ αναδρομικές συναρτήσεις και αν $P(\vec{x}) \leftrightarrow Q(F_1(\vec{x}), \ldots, F_k(\vec{x}))$, τότε το P είναι αναδρομικό κατηγόρημα.

Απόδειξη Επειδή $C_P(\vec{x}) = C_Q(F_1(\vec{x}), \ldots, F_k(\vec{x}))$. □

(**C2**) Έστω P αναδρομικό κατηγόρημα και έστω ότι ισχύει η $\forall\vec{y}\,\exists x P(\vec{y}, x)$. Τότε η συνάρτηση $F(\vec{y}) = \mu x P(\vec{y}, x)$ είναι αναδρομική.

Απόδειξη Επειδή $F(\vec{y}) = \mu x(C_P(\vec{y}, x) = 0)$. □

Ορισμός 6.13 *Ο ορισμός μιας συνάρτησης ή ενός κατηγορήματος λέγεται* ρητός ορισμός *από τα $F_1, \ldots, F_k$ και $P_1, \ldots, P_l$, αν ξεκινώντας από αυτά* *δίνουμε τον ορισμό χρησιμοποιώντας μόνον την αντικατάσταση και τον μ-τελεστή, δηλαδή στις συναρτήσεις μπορούμε να προσθέσουμε το C2 και στα κατηγορήματα το C1.*

Λήμμα 6.14 *Αν $F_1, \ldots, F_k$, $P_1, \ldots, P_l$ αναδρομικά, τότε κάθε ρητός ορισμός από αυτά δίνει αναδρομική συνάρτηση ή κατηγόρημα.*

Απόδειξη Από τα C1, C2, R2, R4. □

(**C3**) Κάθε σταθερή συνάρτηση είναι αναδρομική.

Απόδειξη Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έστω $F_k(\vec{x}) = k$ η σταθερή συνάρτηση n μεταβλητών. Αποδεικνύουμε ότι κάθε F_k είναι αναδρομική με επαγωγή στο k.

$$F_0(\vec{x}) = \mu y(I^{n+1}_{n+1}(\vec{x}, y) = 0).$$

$$F_{k+1}(\vec{x}) = \mu y(F_k(\vec{x}, y) < y).$$

□

Ορισμός 6.15 *Αν P και Q κατηγορήματα, ορίζουμε με προφανή τρόπο τα κατηγορήματα $\neg P$, $P \rightarrow Q$, $P \vee Q$, $P \wedge Q$ κλπ. που προκύπτουν χρησιμοποιώντας τους λογικούς προτασιακούς συνδέσμους (συνδυασμοί Boole).*

(**C4**) Αν P και Q αναδρομικά κατηγορήματα τότε όλοι οι συνδυασμοί Boole των P και Q είναι αναδρομικά κατηγορήματα.

Απόδειξη

$$\begin{aligned} C_{\neg P}(\vec{x}) &= C_<(0, C_P(\vec{x})) \\ C_{P \vee Q}(\vec{x}) &= C_P(\vec{x}) \cdot C_Q(\vec{x}) \end{aligned}$$

Τα υπόλοιπα μπορούν να οριστούν συναρτήσει των $\neg$ και $\vee$, επειδή αυτά αποτελούν επαρκές σύνολο συνδέσμων. □

Ας σημειωθεί ότι εδώ τα $\neg$, $\wedge$ κλπ. δεν είναι σύμβολα κάποιας τυπικής γλώσσας, αλλά είναι βολικοί συμβολισμοί στη μεταγλώσσα των, αντίστοιχα, όχι, και κλπ.

(**C5**) Τα κατηγορήματα $<$, $\leq$, $>$, $\geq$, $=$ είναι αναδρομικά.

Απόδειξη Το $<$ είναι αναδρομικό, από ορισμό. Για τα υπόλοιπα υπάρχουν οι ακόλουθοι ρητοί ορισμοί.

$$\begin{aligned} & x \leq y \leftrightarrow \neg(y < x) \\ & x > y \leftrightarrow y < x \\ & x \geq y \leftrightarrow y \leq x \\ & x = y \leftrightarrow x \leq y \wedge y \leq x \end{aligned}$$

□

(**C6**) Η συνάρτηση $\dot{-}$ που ορίζεται ως κάτωθι

$$x\dot{-}y = \begin{cases} x - y & \text{αν } x \geq y \\ 0 & \text{διαφορετικά, δηλαδή αν } x < y \end{cases}$$

είναι αναδρομική.

Απόδειξη Διότι έχει τον ρητό ορισμό, $x\dot{-}y = \mu z(y + z = x \vee x < y)$. □

Ορισμός 6.16 (Φραγμένος τελεστής) *Έστω $P(\vec{y}, x)$ οποιοδήποτε κατηγόρημα. Τότε ορίζουμε τη συνάρτηση $\mu x_{x<z} P(\vec{y}, x)$ ως εξής:*

$$\mu x_{x<z} P(\vec{y}, x) = \mu x(P(\vec{y}, x) \vee x = z)$$

Ας σημειωθεί ότι η συνάρτηση αυτή είναι πάντα ορισμένη και ότι το z ανήκει στις μεταβλητές της συνάρτησης. Η τιμή της συνάρτησης είναι το μικρότερο x, γνησίως μικρότερο του z, για το οποίο ισχύει $P(\vec{y}, x)$, με την προϋπόθεση ότι υπάρχει ένα τέτοιο x, διαφορετικά η τιμή είναι το z.

Είναι προφανές ότι αν $P(\vec{y}, x)$ είναι αναδρομικό τότε η συνάρτηση $\mu x_{x<z} P(\vec{y}, x)$ είναι αναδρομική. Οπότε ισχύει και το παρακάτω.

(**C7**) Έστω $P(\vec{y}, x)$ αναδρομικό (το x είναι διαφορετικό από τα $\vec{y}$) και έστω $H(\vec{y})$ είναι αναδρομική συνάρτηση. Τότε η συνάρτηση $F(\vec{y}) = \mu x_{x<H(\vec{y})} P(\vec{y}, x)$ είναι αναδρομική.

Ορισμός 6.17 (Φραγμένοι ποσοδείκτες) *Έστω $P(x)$ μια ιδιότητα, ένα κατηγόρημα, που αναφέρεται στο x. Τότε οι* φραγμένοι ποσοδείκτες *ορίζονται ως ακολούθως:*

$\exists x_{x<z} P(x) \leftrightarrow$ *υπάρχει x, γνησίως μικρότερο του z, ώστε το $P(x)$ να ισχύει.*
$\forall x_{x<z} P(x) \leftrightarrow$ *για κάθε x, γνησίως μικρότερο του z, το $P(x)$ ισχύει.*

(**C8**) Έστω $P(\vec{y}, x)$ αναδρομικό κατηγόρημα (το x είναι διαφορετικό από τα $\vec{y}$) και έστω $H(\vec{y})$ αναδρομική συνάρτηση.

Αν το Q_1 ορίζεται μέσω του ορισμού $Q_1(\vec{y}) \leftrightarrow \exists_{x<H(\vec{y})} P(\vec{y}, x)$, τότε είναι αναδρομικό διότι έχει τον ρητό ορισμό $\mu x_{x<H(\vec{y})}(P(\vec{y}, x) < H(\vec{y}))$.

Αν το Q_2 ορίζεται μέσω του ορισμού $Q_2(\vec{y}) \leftrightarrow \forall x_{x<H(\vec{y})} P(\vec{y}, x)$, τότε είναι αναδρομικό διότι έχει τον ρητό ορισμό $\mu x_{x<H(\vec{y})}(\neg P(\vec{y}, x)) = H(\vec{y})$.

(**C9**)[Ορισμός με περιπτώσεις] Έστω $G_1(\vec{x}), \ldots, G_k(\vec{x})$ αναδρομικές συναρτήσεις και έστω $R_1(\vec{x}), \ldots, R_k(\vec{x})$ αναδρομικά κατηγορήματα ώστε για κάθε $\vec{x}$ ένα και μόνον ένα από τα $R_1(\vec{x}), \ldots, R_k(\vec{x})$ είναι αληθές. Τότε η συνάρτηση F που ορίζεται ως

$$F(\vec{x}) = \begin{cases} G_1(\vec{x}) & \text{αν } R_1(\vec{x}) \\ G_2(\vec{x}) & \text{αν } R_2(\vec{x}) \\ \vdots & \vdots \\ G_k(\vec{x}) & \text{αν } R_k(\vec{x}) \end{cases}$$

είναι αναδρομική.

Απόδειξη Διότι $F(\vec{x}) = G_1(\vec{x}) \cdot C_{\neg R_1}(\vec{x}) + \cdots + G_k(\vec{x}) \cdot C_{\neg R_k}(\vec{x})$. □

Αυτό μας επιτρέπει να δίνουμε αναδρομικούς ορισμούς του τύπου

$$F(\vec{x}) = \begin{cases} G_1(\vec{x}) & \text{αν } R_1(\vec{x}) \\ G_2(\vec{x}) & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

διότι το «διαφορετικά» σημαίνει $\neg R_1$. Γενικότερα, και στην περίπτωση του C9 μπορούμε αντί του $R_k(\vec{x})$ να βάζουμε «διαφορετικά» διότι τότε το $R_k(\vec{x})$ σημαίνει $\neg(R_1(\vec{x}) \vee R_2(\vec{x}) \vee \cdots R_{k-1}(\vec{x}))$.

(**C10**) Έστω $P_1(\vec{x}), \ldots, P_k(\vec{x})$ αναδρομικά κατηγορήματα και έστω $R_1(\vec{x}), \ldots, R_k(\vec{x})$ αναδρομικά κατηγορήματα ώστε για κάθε $\vec{x}$ ένα και μόνον ένα από τα $R_1(\vec{x}), \ldots, R_k(\vec{x})$ ισχύει. Τότε το κατηγόρημα Q που ορίζεται ως

$$Q(\vec{x}) \leftrightarrow \begin{cases} P_1(\vec{x}) & \text{αν } R_1(\vec{x}) \\ P_2(\vec{x}) & \text{αν } R_2(\vec{x}) \\ \vdots & \vdots \\ P_k(\vec{x}) & \text{αν } R_k(\vec{x}) \end{cases}$$

είναι αναδρομικό.

6.4 Αριθμοί ακολουθίας

Στη συνέχεια θα αναπτύξουμε κάποιες τεχνικές, που οφείλονται στον Gödel, οι οποίες θα μας επιτρέψουν, με κατάλληλες κωδικοποιήσεις, να χειριζόμαστε με αριθμητικό – αναδρομικό τρόπο ζητήματα που αφορούν τις αναδρομικές συναρτήσεις.

Λήμμα 6.18 *Υπάρχει αναδρομική συνάρτηση* $Pair : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ *η οποία είναι ένα προς ένα (μονομορφισμός).*

Απόδειξη Ορίζουμε $Pair(x, y) = (x+y)(x+y)+x+1$. Η συνάρτηση είναι προφανώς αναδρομική. Θα αποδείξουμε ότι είναι και ένα προς ένα. Έστω $Pair(x, y) = Pair(x', y')$. Θέλουμε $x = x'$ και $y = y'$. Ας υποθέσουμε ότι $x + y < x' + y'$. Τότε $Pair(x, y) = (x + y)^2 + x + 1 \leq (x + y + 1)^2 \leq (x' + y')^2 < Pair(x', y')$. Άρα θα πρέπει $x + y = x' + y'$, εκ του οποίου $x = x'$ και βέβαια $y = y'$. □

Λήμμα 6.19 (Η β-συνάρτηση του Gödel.) *Υπάρχει συνάρτηση δύο μεταβλητών $\beta(x,y)$ τέτοια ώστε:*

α1. $\beta(x,y) \leq x \dot{-} 1$

α2. Για κάθε n και κάθε ακολουθία $a_0, \ldots, a_{n-1}$ υπάρχει a ώστε $\beta(a,i) = a_i, \ \forall\, i < n$.

Απόδειξη Στη σελίδα 95

Στη συνέχεια θα υποθέσουμε ότι η συνάρτηση β υπάρχει. Τότε

$$\begin{aligned}&\beta(0,y) = 0\\ &\beta(x,y) < x, \ \ \forall\, x > 0.\end{aligned}$$

Ορισμός 6.20 *Για κάθε n ορίζουμε συνάρτηση $\langle \cdots \rangle : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, ως εξής:*

$$\langle y_0, \ldots, y_{n-1} \rangle = \mu x(\beta(x,0) = n \wedge \beta(x,1) = y_0 \wedge \cdots \wedge \beta(x,n) = y_{n-1})$$

Ο αριθμός $\langle y_0, \ldots, y_{n-1} \rangle$ ονομάζεται αριθμός ακολουθίας της n-άδας $y_0, \ldots, y_{n-1}$ και δίνει έναν μοναδικό «κωδικό» σε κάθε τέτοια πεπερασμένη ακολουθία αριθμών.

.

Λήμμα 6.21 *Οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι αναδρομικές.*

α1. Το «μήκος του x», $lh(x) = \beta(x,0)$.

α2. Η «$i+1$ συνιστώσα του x», $(x)_i = \beta(x, i+1)$.

α3. Το κατηγόρημα $Seq(x)$, όπου

$Seq(x) \leftrightarrow x$ είναι αριθμός ακολουθίας κάποιων $a_0, \ldots, a_{n-1}$.

Απόδειξη του 3: Για κάθε x και για $\beta(x,0) = n = lh(x)$, ικανοποιείται η εξίσωση

$$\beta(x,0) = n \wedge \beta(x,1) = (x)_0 \wedge \cdots \wedge \beta(x,n) = (x)_{n-1}. \ \ (*)$$

Για να είναι το x ένας αριθμός ακολουθίας, δηλαδή να είναι
$x = \langle (x)_0, \ldots, (x)_{n-1} \rangle$, θα πρέπει να είναι ο μικρότερος x που ικανοποιεί την εξίσωση (*). Άρα μπορούμε να δώσουμε τον ακόλουθο ρητό ορισμό:

$$seq(x) \leftrightarrow \forall y_{y<x}(lh(y) = lh(x) \to \exists i_{i<lh(x)}((y)_i \neq (x)_i))$$

□

Το κατηγόρημα Seq μας επιτρέπει να αποφασίζουμε αν ένας τυχαίος αριθμός είναι αριθμός ακολουθίας (κωδικός) μιας πεπερασμένης ακολουθίας αριθμών. Έχουμε πάντα $lh(\langle a_0, \ldots, a_{n-1} \rangle) = n$, δηλαδή μέσω της lh βρίσκουμε το μήκος της ακολουθίας που αντιπροσωπεύει ένας αριθμός ακολουθίας και μέσω της $(\langle a_0, \ldots, a_{n-1}\rangle)_i = a_i$ $(i < n)$, τις επιμέρους συνιστώσες που απαρτίζουν αυτήν την ακολουθία.

Επιτρέπουμε (για το μήκος της κενής ακολουθίας) $n = 0$. Τότε θα έχουμε $\langle\varnothing\rangle = \langle\ \rangle = 0$.

Επίσης αν $a \neq \langle\ \rangle$, τότε $lh(a) < a$ και $(a)_i < a$.

Ορισμός 6.22 *Ορίζουμε αναδρομική συνάρτηση $Red(x, y)$ ώστε να έχει τη χαρακτηριστική ιδιότητα $Red(\langle y_0, \ldots, y_{n-1}\rangle, i) = \langle y_0, \ldots, y_{i-1}\rangle$, $i \leq n$. Ο ρητός ορισμός είναι*

$$Red(x, i) = \mu y(lh(y) = i \wedge \forall j_{j<i}((y)_j = (x)_j))$$

Σημείωση: $Seq(x) \wedge lh(x) = n \rightarrow x = \langle (x)_0, \ldots, (x)_{n-1}\rangle$

Ορισμός 6.23 *Για κάθε συνάρτηση $F(y, \vec{x})$ ορίζουμε την $\overline{F}$, τη* συνάρτηση ιστορίας *της F, ως εξής:*

$$\overline{F}(y, \vec{x}) = \langle F(0, \vec{x}), F(1, \vec{x}), \ldots, F(y-1, \vec{x})\rangle$$

Θα είναι $\overline{F}(0, \vec{x}) = \langle\ \rangle = 0$.

Η $\bar{F}$ μας επιτρέπει, όταν την εφαρμόσουμε σε ένα όρισμα n, να έχουμε όλη την πληροφορία για τις τιμές της F σε όλα τα ορίσματα τα μικρότερα του n.

Λήμμα 6.24 *Η $F(y, \vec{x})$ είναι αναδρομική αν και μόνο αν η $\overline{F}(y, \vec{x})$ είναι αναδρομική.*

Απόδειξη $\Rightarrow$: $\overline{F}(y, \vec{x}) = \mu z(lh(z) = y \wedge \forall i_{i<y}((z)_i = F(i, \vec{x})$ (ρητός ορισμός).

$\Leftarrow$: Η F έχει το ρητό ορισμό $F(y, \vec{x}) = (\overline{F}(y+1, \vec{x}))_y$.

□

Θεώρημα 6.25 (Θεώρημα της αναδρομής) *Αν G αναδρομική και η F ορίζεται από $F(y, \vec{x}) = G(\overline{F}(y, \vec{x}), y, \vec{x})$, τότε η F είναι αναδρομική.*

Απόδειξη Γράφουμε έναν ρητό ορισμό για τη συνάρτηση H.

$$H(y, \vec{x}) = \mu z(Seq(z) \wedge lh(z) = y \wedge \forall i_{i<y}((z)_i = G(Red(z, i), i, \vec{x})))$$

Θα αποδείξουμε ότι η $H(y, \vec{x})$ ταυτίζεται με την $\overline{F}(y, \vec{x})$. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή. Υποθέτουμε ότι (Ε.Υ.), για κάθε $i < y$ ισχύει $\overline{F}(i, \vec{x}) = H(i, \vec{x})$, δηλαδή $H(i, \vec{x}) = \langle F(0, \vec{x}), \ldots, F(i-1, \vec{x})\rangle$. Θα αποδείξουμε ότι τότε $\overline{F}(y, \vec{x}) = H(y, \vec{x})$.

Έστω $\overline{F}(y, \vec{x}) = \langle F(0, \vec{x}), \ldots, F(y-1, \vec{x})\rangle = z$. Από Ε.Υ. $Red(z, i) = H(i, \vec{x})$, για κάθε $i < y$. Το z είναι ο μικρότερος αριθμός ο οποίος είναι αριθμός ακολουθίας, έχει $lh(z) = y$ και για κάθε $i < y$ ισχύει ότι $(z)_i = F(i, \vec{x})$. Αλλά από τον ορισμό του F, $F(i, \vec{x}) = G(\overline{F}(i, \vec{x}), i, \vec{x})$ και από την

Ε.Υ., $G(\overline{F}(i,\vec{x}),i,\vec{x}) = G(H(i,\vec{x}),i,\vec{x}) = G(Red(z,i),i,\vec{x})$, δηλαδή έχουμε $(z)_i = G(Red(z,i),i,\vec{x})$, για κάθε $i < y$. Αυτό σημαίνει ότι το z είναι ο μικρότερος αριθμός που ικανοποιεί τις απαιτήσεις του αναδρομικού ορισμού του $H(y,\vec{x})$ και συνεπώς έχουμε ότι $z = H(y,\vec{x}) = \overline{F}(y,\vec{x})$. □

Το ανωτέρω θεώρημα είναι πολύ σημαντικό ως προς το εξής: μας επιτρέπει να ορίσουμε συναρτήσεις αναδρομικά, δηλαδή αναφερόμενοι σε τιμές της συνάρτησης μικρότερες από αυτήν που θέλουμε να ορίσουμε. Αν κοιτάξουμε με φορμαλιστικό τρόπο τον ορισμό της F στο 6.25, τότε βλέπουμε ότι φαινομενικά ο ορισμός αυτός είναι κυκλικός, αφού και στο αριστερό και στο δεξιό μέρος του εμφανίζεται το F. Ο ορισμός όμως «διασώζεται» από το γεγονός ότι το F, δεξιά, αναφέρεται σε τιμές ορισμάτων μικρότερων του y, αφού $\overline{F}(y,\vec{x}) = \langle F(0,\vec{x}), F(1,\vec{x}), \ldots, F(y-1,\vec{x})\rangle$. Μπορούμε να δεχτούμε διαισθητικά ότι μια έτσι οριζόμενη συνάρτηση F υπάρχει, αλλά το θεώρημα μας λέει, επιπλέον, ότι η έτσι οριζόμενη F είναι και αναδρομική.

Πόρισμα 6.26 *Η κλάση των αναδρομικών συναρτήσεων είναι κλειστή για το σχήμα R3, δηλαδή αν G και H είναι αναδρομικές, τότε η F που ορίζεται από*

$$\begin{aligned} &F(0,\vec{x}) = G(\vec{x}) \\ &F(y+1,\vec{x}) = H(F(y,\vec{x}),y,\vec{x}) \end{aligned}$$

είναι αναδρομική.

Απόδειξη Η F έχει τον εξής ρητό ορισμό.

$$F(y,\vec{x}) = \begin{cases} G(\vec{x}) & \text{αν } y=0 \\ H((\overline{F}(y,\vec{x}))_{y \dot{-} 1}, y, \vec{x}) & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

□

Παράδειγμα 6.27 Η ακολουθία Fibonacci, η u_n, που ορίζεται ως

$$\begin{aligned} &u_0 = u_1 = 1 \\ &u_{n+2} = u_n + u_{n+1} \end{aligned}$$

είναι αναδρομική συνάρτηση $F(n) = u_n$, διότι έχει τον αναδρομικό ορισμό

$$F(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x = 0 \vee x = 1 \\ (\overline{F}(x))_{x \dot{-} 1} + (\overline{F}(x))_{x \dot{-} 2} & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $\mathcal{E}(\overline{C}_P(y,\vec{x}))$ είναι ένας ρητός ορισμός, από το κατηγόρημα P και από άλλες συναρτήσεις και κατηγορήματα που είναι αναδρομικά. Τότε το κατηγόρημα P με ορισμό

$$P(y,\vec{x}) \leftrightarrow \mathcal{E}(\overline{C}_P(y,\vec{x}))$$

είναι αναδρομικό, διότι η χαρακτηριστική του έχει τον αναδρομικό ορισμό

$$C_P(y, \vec{x}) = \begin{cases} 0 & \text{αν } \mathcal{E}(\overline{C}_P(y, \vec{x})) \\ 1 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Άρα μπορούμε να ορίσουμε αναδρομικά ένα P με

$$P(y, \vec{x}) \leftrightarrow \begin{cases} R_1(\vec{x}) & \text{αν } y = 0 \\ R_2(\vec{x}) & \text{αν } y = 0 \wedge P(y-1, \vec{x}) \\ R_3(\vec{x}) & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

διότι $P(y-1, \vec{x}) \leftrightarrow (\overline{C}_P(y, \vec{x}))_{y \dot{-} 1} = 0$.

Μπορούμε επίσης να ορίσουμε μια συνάρτηση F με

$$F(x, y) = \begin{cases} F(H_1(x), y) & \text{αν } H_1(x) < x \\ H_2(x, y) & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

διότι η πρώτη γραμμή του ορισμού μπορεί να αντικατασταθεί με
$(\overline{F}(x, y))_{H_1(x)}$ αν $H_1(x) < x$.

Γενικός κανόνας: Ο αναδρομικός ορισμός μιας συνάρτησης $F(y, \vec{x})$ (ή ενός κατηγορήματος) είναι σωστός με την προϋπόθεση ότι, όταν το $F(w, \vec{x})$ εμφανίζεται στο δεξιό μέρος του ορισμού, μπορούμε να αποδείξουμε ότι $w < y$.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε το λήμμα 6.19, δηλαδή την ύπαρξη της συνάρτησης β. Για να διευκολυνθούμε στην απόδειξη, αποδεικνύουμε πρώτα την ύπαρξη μιας, παρόμοιας με τη β, συνάρτησης δ.

Πρόταση 6.28 *Υπάρχει αναδρομική συνάρτηση $\delta(x, y, z)$, τέτοια ώστε:*

α1. $\delta(x, y, z) \leq x$.

α2. Για κάθε $a_0, \ldots, a_{n-1}$, υπάρχουν αριθμοί b και c ώστε $\delta(b, c, i) = a_i$ για κάθε $i < n$.

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη του 6.28, θα δείξουμε ότι η ύπαρξη της συνάρτησης δ συνεπάγεται την ύπαρξη της συνάρτησης β.

Πρόταση 6.29 *Η ύπαρξη της συνάρτησης δ συνεπάγεται την ύπαρξη της συνάρτησης β.*

Απόδειξη Ισχύει ότι $x, y < Pair(x, y)$. Ορίζουμε αναδρομικές συναρτήσεις l (αριστερή συνιστώσα) και r (δεξιά συνιστώσα), ως εξής:

$$l(x) = \mu y_{y<x} \exists z_{z<x} (x = Pair(y, z))$$
$$r(x) = \mu y_{y<x} \exists z_{z<x} (x = Pair(z, y))$$

Ορίζουμε την αναδρομική συνάρτηση β ως ακολούθως:

$$\beta(x,i) = \begin{cases} \delta(l(x), r(x), i) & \text{αν } x = Pair(l(x), r(x)) \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Είναι φανερό ότι $\beta(x,i) = \delta(l(x), r(x), i) \leq l(x) < x$, αν x ισούται με το $Pair(l(x), r(x))$ (δηλαδή αν το x ανήκει στο πεδίο τιμών της Pair). Άρα, επειδή σε κάθε άλλη περίπτωση η τιμή είναι μηδέν, θα έχουμε πάντα $\beta(x,i) \leq x \dot{-} 1$.

Έστω τώρα, δοθέντων των $a_0, \ldots, a_{n-1}$, τα b και c έχουν βρεθεί ώστε $\delta(b,c,i) = a_i$, $\forall\, i < n$. Τότε αν $a = Pair(b,c)$, θα έχουμε ότι $\beta(a,i) = \delta(l(a), r(a), i) = a_i$, για κάθε $i < n$. Άρα η β θα ικανοποιεί τις απαιτήσεις του ορισμού της στο λήμμα 6.19.

$\square$

Για να αποδείξουμε την ύπαρξη της συνάρτησης δ θα χρειαστούμε τα ακόλουθα δύο λήμματα.

Λήμμα 6.30 (Κινέζικο θεώρημα υπολοίπων) *Έστω $d_0, \ldots, d_{n-1}$ αριθμοί ανά δύο πρώτοι (προς αλλήλους) και έστω $a_0, \ldots, a_{n-1}$ τέτοια ώστε $a_i < d_i$, για κάθε $i < n$. Τότε υπάρχει b ώστε $a_i = b \bmod d_i$, για κάθε $i < n$· το $x \bmod y$ συμβολίζει το υπόλοιπο της διαίρεσης του x από το y, άρα έχουμε και $x \bmod y < y$.*

Απόδειξη Έστω $q = \prod_{i<n} d_i = d_0 \cdot d_1 \cdots d_{n-1}$. Επειδή τα d_i είναι ανά δύο πρώτα, το q είναι ο μικρότερος αριθμός που διαιρείται από όλα τα d_i. Έστω τώρα x τυχών αριθμός. Ορίζουμε $[x] = \langle x \bmod d_0, \ldots, x \bmod d_{n-1} \rangle$ να είναι η n-άδα των υπολοίπων της διαίρεσης του x από τα $d_0, \ldots, d_{n-1}$. Το μέγιστο δυνατό πλήθος αυτών των n-άδων είναι $d_i = d_0 \cdot d_1 \cdots d_{n-1}$, δηλαδή q. Έστω τώρα $x, y < q$ με $x \neq y$. Τότε $[x] \neq [y]$, διότι αν $\langle x \bmod d_0, \ldots, x \bmod d_{n-1} \rangle = \langle y \bmod d_0, \ldots, y \bmod d_{n-1} \rangle$ τότε θα είχαμε ότι $d_i || x - y|$, για κάθε $i < n$. Επειδή $|x - y| < q$, αυτό είναι δυνατό μόνον αν $x = y$. Άρα το $[x]$ παίρνει όλες τις δυνατές τιμές όταν το x κινείται στα $0, 1, \ldots, q-1$. Άρα αν πάρουμε μια n-άδα $a_0, \ldots, a_{n-1}$ με $a_i < d_i$, τότε θα υπάρχει b ώστε $[b] = \langle a_0, \ldots, a_{n-1} \rangle$.
$\square$

Λήμμα 6.31 *Για κάθε αριθμό n, οι $n+1$ αριθμοί*

$$1 + n!, 1 + 2(n!), 1 + 3(n!), \ldots, 1 + (n+1)(n!)$$

είναι ανά δύο πρώτοι προς αλλήλους.

Απόδειξη Έστω ότι υπάρχουν $i, j \in \{1, \ldots, (n+1)\}$ τέτοια ώστε $1 + i(n!)$ και $1 + j(n!)$ έχουν κοινό παράγοντα, έστω τον πρώτο αριθμό p. Τότε ο p διαιρεί τον $|i-j| \cdot n!$. Επειδή $p \nmid n!$ (αν ίσχυε $p \mid i(n!)$ τότε θα ίσχυε και $p \mid i(n!)$· όμως $p \nmid 1 + i(n!)$, οπότε ο p θα διαιρούσε και τη διαφορά των $1 + i(n!)$ και $i(n!)$, δηλαδή το 1) έχουμε ότι $p \,|\, |i-j|$. Αλλά $|i-j| \leq n < p$, ($n < p$ διότι $p \nmid n!$). Άρα $p \,|\, |i-j|$ μόνο στην περίπτωση $i = j$. $\square$

Απόδειξη της πρότασης 6.28:
Ορίζουμε τη δ ως εξής:

$$\delta(x, y, z) = x \bmod (1 + (z + 1)y).$$

Η δ είναι αναδρομική διότι έχει τον ακόλουθο αναδρομικό ορισμό

$$\delta(x, y, z) = \mu w(\exists t_{t<x+1}(x = t\,(1 + (z + 1)\,y) + w)).$$

Έστω τώρα $a_0, \ldots, a_{k-1}$ αριθμοί και έστω $n = \max\{a_1, \ldots, a_k, k\}$. Παίρνουμε $c = n!$. Τότε από το λήμμα 6.31 οι αριθμοί $1 + (i + 1) \cdot c$, για όλα τα $i \leq n$, είναι ανά δύο πρώτοι προς αλλήλους.

Από λήμμα 6.30 (θέτοντας $d_i = 1 + (i + 1)c$), υπάρχει b τέτοιο ώστε $a_i = b \bmod (1 + (i + 1)c)$, για κάθε $i < n$. Δηλαδή $\delta(d, c, i) = a_i,\ \forall i < n$.

6.5 Η θέση του Church

Όπως αναφέρθηκε και στην αρχή του κεφαλαίου, οι προσπάθειες των μαθηματικών της δεκαετίας του 1930 στόχευαν στην εύρεση ενός μαθηματικού ορισμού της, εν πολλοίς, ασαφούς έννοιας του υπολογίσιμου. Με διαφορετικές αφετηρίες και χρησιμοποιώντας διαφορετικά γενικά πλαίσια ανάπτυξης της έννοιας του υπολογισμού, συνέκλιναν σε μαθηματικά ισοδύναμες διατυπώσεις αυτού του μαθηματικού ορισμού. Οι Turing υπολογίσιμες συναρτήσεις, οι Church λάμβδα ορίσιμες και οι αναδρομικές συναρτήσεις, όλες συμπίπτουν στον ορισμό της ίδιας κλάσης (υπολογίσιμων) συναρτήσεων. Θα μπορούμε, κατά συνέπεια, να θεωρούμε το αναδρομικό ως το μαθηματικό ανάλογο του υπολογίσιμου. Είναι προφανές ότι οι αναδρομικές συναρτήσεις είναι υπολογίσιμες. Ισχύει όμως το αντίστροφο; Ο Church διατύπωσε την ακόλουθη θέση, γνωστή και ως θέση του Church.

Κάθε υπολογίσιμη συνάρτηση είναι αναδρομική.

Αυτή η θέση δεν είναι μια μαθηματική πρόταση, μια μαθηματική εικασία που επιδέχεται μια μαθηματική απόδειξη. Και αυτό διότι συνδέει δύο έννοιες που δεν είναι της ίδιας (μαθηματικής) τάξης. Αφενός την έννοια του υπολογίσιμου, μια κάπως ασαφή διαισθητική έννοια, και αφετέρου την έννοια της αναδρομικής συνάρτησης που είναι μια αυστηρή, μαθηματικά ορισμένη, έννοια. Η διατύπωση της ισοδυναμίας αυτών των δύο προσεγγίσεων έχει περισσότερο να κάνει με τη βαθιά πεποίθηση, που σταδιακά αναπτύχθηκε και τελικά εμπεδώθηκε στους μαθηματικούς, ότι είναι αδύνατο να φανταστούμε μια υπολογίσιμη συνάρτηση (με οποιονδήποτε τρόπο και αν αυτή οριστεί ή διανοηθεί) χωρίς αυτή να είναι αναδρομική, χωρίς δηλαδή να μπορεί να ορίζεται με βάση τα αναδρομικά σχήματα R1-R4. Η πεποίθηση αυτή δεν αναπτύχθηκε μόνον από το γεγονός ότι ποτέ δεν κατέστη δυνατό να φανταστούμε μια υπολογίσιμη συνάρτηση χωρίς αυτή να αποδειχθεί ότι είναι και αναδρομική, αλλά και από τη δομική ανάλυση της έννοιας του υπολογισμού και των τρόπων που καθίσταται μια συνάρτηση υπολογίσιμη. Η θέση του Church είναι τόσο πολύ καθιερωμένη, ως ισχύουσα, στον κόσμο των μαθηματικών ώστε αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση είναι αναδρομική αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι υπολογίσιμη περιγράφοντας μια μέθοδο υπολογισμού της· αυτή την ατελή απόδειξη την ονομάζουν απόδειξη μέσω του αιτήματος του Church.

6.6 Ασκήσεις

1. Αποδείξτε ότι το σύνολο των αναδρομικών συναρτήσεων είναι αριθμήσιμο, δηλαδή σε ένα προς ένα και επί αντιστοιχία με το σύνολο των φυσικών αριθμών. Έστω τώρα $F_1, F_2, \ldots$ μια αρίθμηση όλων των αναδρομικών συναρτήσεων μιας μεταβλητής. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $G(x, y)$, που δίνεται από τον τύπο $G(x, y) = F_x(y)$, δεν είναι αναδρομική.

2. Η συνάρτηση F που ορίζεται από

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν η εικασία του Goldbach είναι αληθής} \\ 1 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

είναι αναδρομική;

3. Ελέγξτε ότι οι ιδιότητες C1, C3 - C6, C9, C10 παραμένουν αληθείς αν σ' αυτές αντικαταστήσουμε το «αναδρομικό» με το «πρωτογενώς αναδρομικό».

Δείξτε ότι αν η συνάρτηση $G(\vec{x}, z)$ είναι πρωτογενής αναδρομική και

$$F_1(\vec{x}, y) = \sum_{z<y} G(\vec{x}, z) \text{ και } F_2(\vec{x}, y) = \prod_{z<y} G(\vec{x}, z)$$

τότε F_1 και F_2 είναι πρωτογενείς αναδρομικές συναρτήσεις, όπου $\sum_{z<y}$ και $\prod_{z<y}$ είναι αντίστοιχα το άθροισμα και το γινόμενο των τιμών μέχρι και το $y-1$.

4. Δείξτε ότι τα C7 και C8 παραμένουν αληθή αν αντικαταστήσουμε το «αναδρομικό» με το «πρωτογενώς αναδρομικό».
Υπόδειξη: θεωρήστε το $\sum_{x<H(\vec{y})} \prod_{z\leq x} C_p(\vec{y}, z)$

5. Δείξτε ότι το κατηγόρημα «x διαιρείται από το y» είναι πρωτογενές αναδρομικό. Συμπεράνατε ότι η συνάρτηση

$$Pr(x) = p_x = \text{ο x οστός πρώτος αριθμός}$$

είναι πρωτογενής αναδρομική.

6. Ένα κατηγόρημα P είναι αναδρομικά αριθμήσιμο (α.α.) αν υπάρχει αναδρομικό κατηγόρημα R ώστε

$$P(\vec{x}) \Leftrightarrow \exists y R(\vec{x}, y)$$

Δείξτε ότι:

P είναι αναδρομικό αν και μόνον αν P και $\neg P$ είναι αναδρομικά αριθμήσιμα.

7. Έστω $A \subseteq \mathbb{N}$ είναι μη κενό. Δείξτε ότι

A είναι α.α. αν και μόνον αν A είναι το πεδίο τιμών μιας αναδρομικής συνάρτησης μίας μεταβλητής.

8. Έστω $A \subseteq \mathbb{N}$ είναι άπειρο. Δείξτε ότι
A είναι αναδρομικό αν και μόνον αν A είναι το πεδίο τιμών μιας αναδρομικής συνάρτησης μίας μεταβλητής F έτσι ώστε $F(n) < F(n+1)$, για όλα τα n.

9. Ο πραγματικός αριθμός $a \geq 0$ λέγεται *αναδρομικός* αν υπάρχουν αναδρομικές συναρτήσεις F και G ώστε

$G(n) \neq 0$ και $| \, a - \frac{F(n)}{G(n)} \, | < \frac{1}{n}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ $(n > 0)$.

Δείξτε ότι:
(i) Κάθε ρητός αριθμός είναι αναδρομικός.
(ii) Αν a και b είναι αναδρομικοί τότε οι $a + b$ και $a \cdot b$ είναι αναδρομικοί.
(iii) Οι αριθμοί e και π είναι αναδρομικοί.

Βιβλιογραφία κεφαλαίου 6

Ε3, Ε4, Ε2, Ξ1, Ξ2, Ξ5,Ξ7, Ξ8.

(Οι αναφορές παραπέμπουν στη βιβλιογραφία στο τέλος του βιβλίου)

7 Τα θεωρήματα μη πληρότητας του Gödel

7.1 Πρωτοβάθμια αριθμητική

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε ένα τυπικό αξιωματικό σύστημα για την αριθμητική. Μέσω αυτού θα μπορούμε να τυποποιούμε αποδείξεις ιδιοτήτων που αφορούν τους φυσικούς αριθμούς. Η γλώσσα $\mathcal{L}$ του συστήματος αυτού θα περιέχει σύμβολα για τις στοιχειώδεις σχέσεις και πράξεις στους φυσικούς αριθμούς. Θα περιλαμβάνει δύο διθέσια σύμβολα κατηγορημάτων, το $=$ για την ισότητα, δηλαδή θα είναι θεωρία με ισότητα, και το $<$ που θα αντιστοιχεί στη σχέση της αυστηρής διάταξης. Επίσης δύο διθέσια σύμβολα συναρτήσεων τα $+$ και $\cdot$ για την πρόσθεση και τον πολ/σμό αντίστοιχα, και ένα μονοθέσιο σύμβολο συνάρτησης s (από το successor) για τη συνάρτηση του επόμενου. Τέλος, ένα σύμβολο σταθεράς $\bar{0}$ για τον συμβολισμό του μηδενός. Δηλαδή η γλώσσα μας θα είναι η $\mathcal{L} = \{=, <, s, +, \cdot, \bar{0}\}$[13]. Η κανονική (standard) ερμηνεία της γλώσσας θα είναι η $\mathcal{N} = \{\mathbb{N}, <^{\mathcal{N}}, s^{\mathcal{N}}, +^{\mathcal{N}}, \cdot^{\mathcal{N}}, \bar{0}^{\mathcal{N}}\}$, όπου $<^{\mathcal{N}}$ είναι η γνωστή αυστηρή διάταξη των φυσικών αριθμών, $\sigma = s^{\mathcal{N}}$ η συνάρτηση του επόμενου, δηλαδή $\sigma(n) = n+1$, $+^{\mathcal{N}}$ και $\cdot^{\mathcal{N}}$ οι πράξεις, αντίστοιχα, της πρόσθεσης και του πολ/σμού και $\bar{0}^{\mathcal{N}}$ ο αριθμός 0. Για λόγους απλότητας θα χρησιμοποιούμε τα σύμβολα $<, +, \cdot$ αντί των $<^{\mathcal{N}}$, $+^{\mathcal{N}}$, $\cdot^{\mathcal{N}}$ και ελπίζουμε ότι από τα συμφραζόμενα θα γίνεται η διάκριση από τα αντίστοιχα σύμβολα της τυπικής γλώσσας. Άρα η κανονική ερμηνεία θα είναι η $\mathcal{N} = \{\mathbb{N}, <, \sigma, +, \cdot, 0\}$, όπου βέβαια $\mathbb{N}$ είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών $\{0, 1, 2 \ldots\}$. Θα επιτρέπουμε επίσης, για τις τυπικές εκφράσεις της γλώσσας, τη μορφή $a + b$ (αντί της σωστής $+(a, b)$) και τη μορφή $a \cdot b$ (αντί της σωστής $\cdot(a, b)$), θα χρησιμοποιούμε δηλαδή τον infix συμβολισμό. Την ίδια απλοποίηση θα χρησιμοποιούμε και για τα υπόλοιπα σύμβολα.

Ορισμός 7.1 *Για κάθε φυσικό αριθμό n θα συμβολίζουμε με $\bar{n}$ την έκφραση $\underbrace{s(s(\cdots s}_{n \text{ φορές}}(\bar{0}\cdots)$, δηλαδή, επαγωγικά*

$$\bar{0} = \bar{0}$$
$$\overline{n+1} = s(\bar{n})$$

Η έκφραση $\bar{n}$ θα καλείται ψηφίο και θα νοείται ως η αναπαράσταση του αριθμού n στην τυπική γλώσα της αριθμητικής.

Στη συνέχεια θα επαναλάβουμε τα αξιώματα της αριθμητικής, προσθέτοντας κάποια σχόλια.

Αξιώματα της αριθμητικής

[13] Όπως και σε προηγούμενες περιπτώσεις θα χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο $=$ και ως σύμβολο ισότητας στη μεταγλώσσα και ως σύμβολο του κατηγορήματος της ισότητας στην τυπική γλώσσα. Η διάκριση θα γίνεται από τα συμφραζόμενα.

$(S1)$ $s(x) \neq \bar{0}$
$(S2)$ $s(x) = s(y) \rightarrow x = y$
$(S3)$ $x + \bar{0} = x$
$(S4)$ $x + s(y) = s(x + y)$
$(S5)$ $x \cdot \bar{0} = \bar{0}$
$(S6)$ $x \cdot s(y) = (x \cdot y) + x$
$(S7)$ $\neg(x < \bar{0})$
$(S8)$ $x < s(y) \leftrightarrow (x < y \vee x = y)$
$(S9)$ $x < y \vee x = y \vee y < x$

Παρατήρηση 7.2 *Κατ' αρχάς να υποθέσουμε ότι μπορούμε να χρησιμοποιούμε ελεύθερα τα λογικά σύμβολα $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists$, δηλαδή να υποθέσουμε ότι η γλώσσα μας τα περιέχει ως λογικά σύμβολα. Ακόμα και στην περίπτωση που κάποια στιγμή, για λόγους οικονομίας, θα υποθέσουμε ότι η γλώσσα μας περιέχει μόνο τα σύμβολα $\neg, \rightarrow$ και $\forall$, μπορούμε να χρησιμοποιούμε και τα υπόλοιπα σύμβολα με την έννοια ότι, όπως ξέρουμε, αυτά μπορούν να οριστούν με βάση τα προαναφερθέντα. Ας σημειώσουμε επίσης ότι το $t \neq u$ είναι το $\neg(t = u)$.*

Τα (μη λογικά) αξιώματα S1-S9 εκφράζουν στοιχειώδεις ιδιότητες των αριθμητικών κατηγορημάτων, συναρτήσεων και σταθερών που εμπλέκονται σ' αυτά. Το S1 εκφράζει το γεγονός ότι το 0 δεν είναι επόμενος κανενός αριθμού, το S2 ότι η συνάρτηση του επόμενου είναι ένα προς ένα, τα S3-S4 και S5-S6 εκφράζουν τις στοιχειώδεις αναδρομικές ιδιότητες, αντίστοιχα, της πρόσθεσης και του πολ/σμού, το S7 ότι δεν υπάρχει αριθμός μικρότερος του μηδενός, το S8 την ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε το x να είναι μικρότερο του επομένου του y και τέλος το S9 τη λεγόμενη ιδιότητα της τριχοτομίας, δηλαδή ότι δύο διαφορετικοί αριθμοί είναι πάντα ο ένας από τους δύο, μικρότερος του άλλου.

Το τυπικό σύστημα με μη λογικά αξιώματα τα S1-S9 είναι η λεγόμενη Αριθμητική του Robinson[14] και θα το συμβολίζουμε με S_0. Είναι ένα τυπικό σύστημα αριθμητικής με πεπερασμένο πλήθος αξιωμάτων το οποίο, όπως θα δούμε, έχει την απαιτούμενη για τις επιδιώξεις μας αποδεικτική ισχύ. Αν θέλουμε όμως να το χρησιμοποιήσουμε γενικότερα για την τυποποίηση μαθηματικών αποδείξεων στην αριθμητική θα διαπιστώσουμε ότι του λείπει ένας βασικός αποδεικτικός μηχανισμός, η απόδειξη με επαγωγή. Το αξίωμα της επαγωγής στη γλώσσα μας μπορεί να διατυπωθεί μέσω του παρακάτω σχήματος.

Σχήμα της επαγωγής: Για κάθε τύπο ϕ και κάθε μεταβλητή x ο ακόλουθος τύπος είναι αξίωμα

$(S10)$ $(\phi(\bar{0}) \wedge \forall x(\phi(x) \rightarrow \phi(s(x)))) \rightarrow \forall x \phi(x)$

[14] Το αρχικό σύστημα του Robinson είναι ελαφρώς διαφορετικό αλλά αυτό στην περίπτωσή μας είναι επουσιώδες.

Ας σημειωθεί ότι, μια ιδιότητα των αριθμών, μπορεί εδώ (στη γλώσσα μας) να αντιπροσωπευτεί από έναν τύπο $\phi(x)$, δηλαδή από τους αριθμούς x που ικανοποιούν τον ϕ, οπότε το S10 μας λέει ότι: αν μια ιδιότητα $\phi(x)$ ισχύει για το 0 (το $\phi(\bar{0})$) και (επαγωγικό βήμα) η υπόθεση ότι ισχύει για τον οποιονδήποτε x (το $\phi(x)$) επάγει την ισχύ και για τον επόμενό του (το $\phi(s(x))$, τότε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ισχύει για όλους τους αριθμούς (το $\forall x\phi(x)$).

Είναι προφανές ότι τα αξιώματα που δημιουργούνται με βάση το σχήμα αυτό είναι άπειρα. Το τυπικό σύστημα που προκύπτει, όταν στα αξιώματα του S_0 προσθέσουμε και τα αξιώματα που προκύπτουν από το σχήμα S10, είναι γνωστό ως Αριθμητική του Peano και το συμβολίζουμε με S. Στο σύστημα αυτό μπορεί να τυποποιηθεί η πλειονότητα των γνωστών αποδείξεων που μπορούμε να βρούμε σε ένα μαθηματικό σύγγραμμα θεωρίας της αριθμητικής ακόμα και στην περίπτωση - τότε χρειάζονται κάποιες τροποποιήσεις - που χρησιμοποιούν δευτεροβάθμιες έννοιες από την ανάλυση. Είναι λοιπόν ένα πολύ ισχυρό σύστημα, και αυτό βέβαια το οφείλει στο σχήμα της επαγωγής.

Ας παρατηρήσουμε επίσης ότι κανονική ερμηνεία $\mathcal{N}$ είναι μοντέλο και των δύο συστημάτων, του S_0 και του S.

Σε ό,τι ακολουθεί θα ασχοληθούμε με αποδεικτικές ιδιότητες που αφορούν το S_0. Τα m και n θα συμβολίζουν φυσικούς αριθμούς.

Λήμμα 7.3 *$S_0 \vdash \bar{m} = \bar{n}$, αν $m = n$ και*
$S_0 \vdash \bar{m} \neq \bar{n}$, αν $m \neq n$.

Απόδειξη Το πρώτο μέρος είναι τετριμμένο, από το αξίωμα της ισότητας.

Το δεύτερο μέρος αποδεικνύεται με επαγωγή στο n. Εδώ μπορούμε να υποθέσουμε ότι $m > n$. Η πρόταση είναι αληθής για $n = 0$, από το S1. Ας υποθέσουμε τώρα ότι είναι αληθής για δοσμένο n (και για όλα τα $m > n$). Τότε, από το S2, $S_0 \vdash \overline{m+1} = \overline{n+1} \rightarrow \bar{m} = \bar{n}$ και επειδή από την υπόθεση $S_0 \vdash \bar{m} \neq \bar{n}$ παίρνουμε ότι $S_0 \vdash \overline{(m+1)} \neq \overline{(n+1)}$. Άρα η πρόταση είναι αληθής και για $n+1$, επειδή κάθε αριθμός μεγαλύτερος του $n+1$ είναι της μορφής $m+1$, για κάποιο $m > n$. □

Λήμμα 7.4 *Για κάθε τύπο $\phi(x)$ και κάθε φυσικό n*

$S_0 \vdash (\phi(\bar{0}) \wedge \phi(\bar{1}) \wedge \cdots \wedge \phi(\overline{n-1}) \wedge (x < \bar{n})) \rightarrow \phi(x)$.

Εδώ, για την περίπτωση $n = 0$, νοείται ότι έχουμε $S_0 \vdash x < \bar{0} \rightarrow \phi(x)$ και επίσης ότι για οποιονδήποτε ψ έχουμε $S_0 \vdash (\psi \wedge x < \bar{0}) \rightarrow \phi(x)$.

Απόδειξη Με επαγωγή στο n.

Για $n = 0$: Πρέπει να δείξουμε ότι $S_0 \vdash x < \bar{0} \rightarrow \phi(x)$. Από S7 έχουμε $S_0 \vdash \neg(x < \bar{0})$. Το αποτέλεσμα έπεται διότι η S_0, όπως άλλωστε κάθε θεωρία, αποδεικνύει κάθε στιγμιότυπο ταυτολογίας· εδώ $\neg\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$ είναι στιγμιότυπο ταυτολογίας. Μπορείτε να θέσετε ($\psi \equiv x < \bar{0}$) και να χρησιμοποιήστε τον MP. Έπεται, από προφανή ταυτολογία, ότι για οποιονδήποτε ψ έχουμε επίσης $S_0 \vdash (\psi \wedge x < \bar{0}) \rightarrow \phi(x)$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ισχύει για κάποιο n. Από S8 έχουμε

$S_0 \vdash (x < \overline{n+1}) \leftrightarrow (x < \bar{n} \vee x = \bar{n})$.

Από αυτό παίρνουμε ότι

$S_0 \vdash (\phi(\bar{0}) \wedge \phi(\bar{1}) \wedge \cdots \wedge \phi(\overline{n-1}) \wedge \phi(\bar{n}) \wedge (x < \overline{n+1})) \to (x < \bar{n} \vee x = \bar{n})$.

Επειδή οι δύο παρακάτω σχέσεις, δηλαδή η

$S_0 \vdash (\phi(\bar{0}) \wedge \phi(\bar{1}) \wedge \cdots \wedge \phi(\overline{n-1}) \wedge \phi(\bar{n}) \wedge (x < \overline{n})) \to \phi(x)$, και η

$S_0 \vdash (\phi(\bar{0}) \wedge \phi(\bar{1}) \wedge \cdots \wedge \phi(\overline{n-1}) \wedge \phi(\bar{n}) \wedge (x = \overline{n})) \to \phi(x)$ ισχύουν, έπεται ότι

$S_0 \vdash (\phi(\bar{0}) \wedge \phi(\bar{1}) \wedge \cdots \wedge \phi(\overline{n-1}) \wedge \phi(\bar{n}) \wedge (x < \overline{n+1})) \to \phi(x)$. □

Πόρισμα 7.5 *Για κάθε φυσικό n*

$S_0 \vdash x < \bar{n} \to (x = \bar{0} \vee x = \bar{1} \vee \cdots \vee x = \overline{n-1})$

Εδώ, για $n = 0$, νοείται ότι για κάθε τύπο ψ, έχουμε $S_0 \vdash x < \bar{0} \to \psi$.

Απόδειξη Θέτουμε $\phi(x)$ ίσο με $(x = \bar{0} \vee x = \bar{1} \vee \cdots \vee x = \overline{n-1})$ στο 7.3. □

Λήμμα 7.6 *Ας υποθέσουμε ότι $S_0 \vdash \neg\phi(\bar{i})$ για κάθε φυσικό $i < n$ και επίσης ότι $S_0 \vdash \phi(\bar{n})$. Τότε θα έχουμε*

$S_0 \vdash \phi(x) \wedge \forall y(y < x \to \neg\phi(y)) \leftrightarrow x = \bar{n}$.

Απόδειξη Θα προτιμήσουμε να δώσουμε μια άτυπη απόδειξη του γεγονότος ότι ο ζητούμενος (προς απόδειξη στο S_0) τύπος αληθεύει σε κάθε μοντέλο $\mathcal{A}$ του S_0 και μετά να επικαλεστούμε το θεώρημα της πληρότητας. Το ότι

$\mathcal{A} \models x = \bar{n} \to \phi(x) \wedge \forall y(y < x \to \neg\phi(y))$ έπεται από την υπόθεση σε συνδυασμό με το προηγούμενο λήμμα.

Αντιστρόφως, ας υποθέσουμε ότι, για κάποιο $a \in |\mathcal{A}|$, έχουμε ότι

$\mathcal{A} \models \phi[a] \wedge \forall y(y < a \to \neg\phi(y))$. $(*)$

Τότε αν $\mathcal{A} \models a \neq \bar{n}$, από το αξίωμα S9 έχουμε ότι είτε $\mathcal{A} \models a < \bar{n}$ είτε $\mathcal{A} \models \bar{n} < a$. Αλλά και οι δύο από αυτές τις περιπτώσεις είναι αδύνατες. Διότι η πρώτη δίνει $\mathcal{A} \models a = \bar{i}$ για κάποιο $i < n$ και άρα $\mathcal{A} \models \neg\phi[a]$, πράγμα που αντιβαίνει στο $(*)$. Και η δεύτερη σε συνδυασμό με το $(*)$ δίνει $\mathcal{A} \models \neg\phi(\bar{n})$, πράγμα που αντιβαίνει στην υπόθεση. Άρα $\mathcal{A} \models a = \bar{n}$. Άρα $\mathcal{A} \models \phi(x) \wedge \forall y(y < x \to \neg\phi(y)) \to x = \bar{n}$. Οπότε από το θεώρημα της πληρότητας παίρνουμε ότι

$S_0 \vdash \phi(x) \wedge \forall y(y < x \to \neg\phi(y)) \leftrightarrow x = \bar{n}$. □

7.2 Αναπαραστασιμότητα

Αν T είναι μια θεωρία στη γλώσσα της αριθμητικής $\mathcal{L}$ και $R \subseteq \mathbb{N}^n$ n-μελής σχέση, λέμε ότι η R είναι *αναπαραστάσιμη* στην T αν υπάρχει τύπος $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ της $\mathcal{L}$ έτσι ώστε για κάθε $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$

αν $R(a_1, \ldots, a_n)$ τότε $T \vdash \phi(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n)$ και

αν $\neg R(a_1, \ldots, a_n)$ τότε $T \vdash \neg\phi(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n)$.

Ομοίως λέμε ότι μια συνάρτηση $F : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ είναι *αναπαραστάσιμη* στην T αν υπάρχει τύπος $\phi(x_1, \ldots, x_n, y)$ έτσι ώστε

αν $F(a_1, \ldots, a_n) = b$ τότε $T \vdash \phi(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n, y) \leftrightarrow y = \bar{b}$.

Λήμμα 7.7 *Αν T είναι επέκταση της S_0 και $R \subseteq \mathbb{N}^n$ τότε R είναι αναπαραστάσιμη στην T αν και μόνον αν η χαρακτηριστική συνάρτηση C_R είναι αναπαραστάσιμη στην T.*

Απόδειξη Έστω $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ αναπαριστά την R στην T. Τότε έστω ότι $\psi(x_1, \ldots, x_n, y)$ είναι ο ακόλουθος τύπος

$(\phi(x_1, \ldots, x_n) \wedge y = \bar{0}) \vee (\neg\phi(x_1, \ldots, x_n) \wedge y = \bar{1})$

Ισχυριζόμαστε ότι ο ψ αναπαριστά την C_R στην T.

Διότι αν $C_R(a_1, \ldots, a_n) = 0$, τότε $R(a_1, \ldots, a_n)$ και άρα

$T \vdash \phi(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n)$ από το οποίο $T \vdash \psi(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n, y) \leftrightarrow y = \bar{0}$.

Ομοίως για την περίπτωση όπου $C_R(a_1, \ldots, a_n) = 1$.

Αντιστρόφως, έστω $\psi(x_1, \ldots, x_n, y)$ αναπαριστά την C_R στην T.
Έστω $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ ο τύπος $\psi(x_1, \ldots, x_n, \bar{0})$. Τότε αν
$R(a_1, \ldots, a_n)$ έχουμε ότι $C_R(a_1, \ldots, a_n) = 0$,
άρα $T \vdash \psi(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n, y) \leftrightarrow y = \bar{0}$, άρα τελικά $T \vdash \psi(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n, \bar{0})$.

Αν τώρα $\neg R(a_1, \ldots, a_n)$ έχουμε ότι $C_R(a_1, \ldots, a_n) = 1$,

άρα $T \vdash \psi(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n, y) \leftrightarrow y = \bar{1}$, άρα τελικά $T \vdash \neg\psi(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n, \bar{0})$ (επειδή $T \vdash \bar{0} \neq \bar{1}$). Άρα ο ϕ αναπαριστά την R.

Λήμμα 7.8 *Όλες οι βασικές συναρτήσεις είναι αναπαραστάσιμες στην S_0.*

Απόδειξη

(i) Η μηδενική συνάρτηση $Z(x)$ αναπαρίσταται από τον τύπο $x = x \wedge y = \bar{0}$.

(ii) Από το 7.7 για να δείξουμε ότι $C_<$ είναι αναπαραστάσιμη αρκεί να δείξουμε ότι $<$ είναι αναπαραστάσιμη.

Έστω τώρα $\phi(x_1, x_2)$ είναι ο τύπος $x_1 < x_2$. Θα αποδείξουμε ότι ο ϕ αναπαριστά τη σχέση $<$.

Πρέπει να δείξουμε ότι για όλα τα $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$

$a_1 < a_2 \quad \Rightarrow \quad S_0 \vdash \overline{a_1} < \overline{a_2}$
$a_1 \geq a_2 \quad \Rightarrow \quad S_0 \vdash \neg(\overline{a_1} < \overline{a_2})$

Περιπτώσεις για το a_2:

Αν $a_2 = 0$, το πρώτο δεν εφαρμόζεται και το δεύτερο είναι αληθές από το S7. Τώρα, από πόρισμα 7.5, αν $a_2 > 0$ έχουμε ότι

$S_0 \vdash x < \overline{a_2} \to (x = \bar{0} \vee x = \bar{1} \vee \cdots \vee x = \overline{a_2 - 1})$. Από αυτό αν $a_1 < a_2$ παίρνουμε $S_0 \vdash \overline{a_1} < \overline{a_2}$ και αν $a_2 \leq a_1$ παίρνουμε

$S_0 \vdash \neg(\bar{a}_1 = \bar{0} \vee \overline{a_1} = \bar{1} \vee \cdots \vee \overline{a_1} = \overline{a_2 - 1})$ (επειδή $S_0 \vdash \neg(\bar{m} = \bar{n})$ για $m \neq n$) και εξ αυτού $S_0 \vdash \neg(\overline{a_1} < \overline{a_2})$.

(iii) Η συνάρτηση του επόμενου σ αναπαρίσταται από τον τύπο $s(x) = y$. Διότι για κάθε $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι το $\sigma(a_1) = a_2$ συνεπάγεται

$S_0 \vdash (s(\overline{a_1}) = y) \leftrightarrow y = \overline{a_2}$, επειδή από τον ορισμό $s(\overline{a_1}) = \overline{a_2}$.

(iv) Η κάθε συνάρτηση προβολής I_i^n αναπαρίσταται από τον $x_1 = x_1 \wedge x_2 = x_2 \wedge \cdots \wedge x_n = x_n \wedge \wedge y = x_i$.

(v) Θα δείξουμε ότι η $+$ αναπαρίσταται από τον $\phi(x_1, x_2, y) \equiv x_1 + x_2 = y$. Πρέπει να αποδείξουμε ότι για $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$ ισχύει $S_0 \vdash (\overline{a_1} + \overline{a_2} = y) \leftrightarrow y = (\overline{a_1 + a_2})$, ή ισοδύναμα ισχύει ότι

$S_0 \vdash \overline{a_1} + \overline{a_2} = (\overline{a_1 + a_2}) \quad *$

Την παραπάνω σχέση την αποδεικνύουμε με επαγωγή στο a_2. Αν $a_2 = 0$, τότε η πρόταση $*$ είναι αληθής από το αξίωμα S3.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι είναι αληθής για $a_2 = n$.

Τότε έχουμε $S_0 \vdash \overline{a_1} + \overline{n} = (\overline{a_1 + n})$. Άρα

$S_0 \vdash s(\overline{a_1} + \overline{n}) = s(\overline{a_1 + n})$ δηλαδή

$S_0 \vdash s(\overline{a_1}) + \overline{n} = (\overline{a_1 + (n+1)})$.

Αλλά από το S4 ισχύει $S_0 \vdash s(\overline{a_1} + \overline{n}) = \overline{a_1} + s(\bar{n}) = \overline{a_1} + \overline{(n+1)}$, άρα τελικά $S_0 \vdash \overline{a_1} + \overline{n+1} = (\overline{a_1 + (n+1)})$, και αυτό συμπληρώνει την επαγωγή.

(vi) Η περίπτωση του πολ/σμού είναι εντελώς ανάλογη με αυτήν της πρόσθεσης.

Αυτό συμπληρώνει την απόδειξη του λήμματος 7.8. □

Θεώρημα 7.9 *Οι αναδρομικές συναρτήσεις και τα αναδρομικά κατηγορήματα είναι αναπαραστάσιμα στη θεωρία S_0.*

Απόδειξη Μπορούμε να περιοριστούμε στις αναδρομικές συναρτήσεις.

Από 7.8 όλες οι βασικές αναδρομικές συναρτήσεις είναι αναπαραστάσιμες. Έτσι λοιπόν πρέπει να αποδείξουμε ότι οι αναπαραστάσιμες συναρτήσεις είναι κλειστές για τα σχήματα R2 και R4.

R2. Υποθέτουμε ότι οι $G, H_1, \ldots, H_k$ είναι όλες αναπαραστάσιμες συναρτήσεις και $F(\vec{x}) = G(H_1(\vec{x}), \ldots, H_k(\vec{x}))$ [εδώ $\vec{x} = x_1, \ldots, x_n$]. Έστω ότι ο $\phi_i(\vec{x}, y_i)$ αναπαριστά την H_i, για κάθε $i \in \{1, \ldots, k\}$. Και έστω ο $\psi(y_1, \ldots, y_k, z)$ αναπαριστά την G. Ορίζουμε τον Θ ως εξής:

$\Theta(\vec{x}, z) \equiv \exists y_1 \cdots \exists y_k(\phi_1(\vec{x}, y_1) \wedge \cdots \wedge \phi_k(\vec{x}, y_k) \wedge \psi(y_1, \ldots, y_k, z)))$

Θα δείξουμε ότι ο Θ αναπαριστά την F.

Ας υποθέσουμε ότι $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$ και έστω $F(a_1, \ldots, a_n) = c$ και

$H_i(a_1, \ldots, a_n) = b_i$, για κάθε $i \in \{1, \ldots, k\}$ [τότε $G(b_1, \ldots, b_k) = c$].

Από τον ορισμό του ϕ_i έχουμε ότι $S_0 \vdash \phi_i(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n, y_i) \leftrightarrow y_i = \overline{b_i}$.

Έπεται ότι $S_0 \vdash \Theta(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n, z) \leftrightarrow \exists y_1 \cdots \exists y_k(y_1 = \overline{b_1} \wedge \cdots \wedge y_k = \overline{b_k} \wedge \psi(y_1, \ldots, y_k, z))$

και ως εκ τούτου $S_0 \vdash \Theta(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n, z) \leftrightarrow \psi(\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_k, z)$.

Αλλά επειδή ο ψ αναπαριστά την G και $G(b_1, \ldots, b_k, z) = c$, έχουμε $S_0 \vdash \psi(\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_n, z) \leftrightarrow z = \bar{c}$, δηλαδή τελικά

$S_0 \vdash \Theta(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n, z) \leftrightarrow z = \bar{c}$. □

(R4) Υποθέτουμε ότι η $G(x_1, \ldots, x_{n+1})$ είναι αναπαραστάσιμη και

$F(x_1,\ldots,x_n) = \mu x_{n+1}(G(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}) = 0)$. Έστω $\phi(x_1,\ldots,x_{n+1},y)$ αναπαριστά την G. Ορίζουμε τον τύπο $\psi(x_1,\ldots,x_{n+1})$ να είναι ο $\phi(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1},\bar{0}) \wedge \forall z(z < x_{n+1} \to \neg\phi(x_1,\ldots,x_n,z,\bar{0}))$.

Δοθέντων $a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{N}$ έστω $F(a_1,\ldots,a_n) = b$ και $G(a_1,\ldots,a_n,i) = c_i$, για κάθε $i \in \mathbb{N}$.

Από τον ορισμό του ϕ έχουμε ότι $S_0 \vdash \phi(\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_n,\bar{i},y) \leftrightarrow y = \bar{c}_i$, για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Άρα

$S_0 \vdash \phi(\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_n,\bar{i},\bar{0}) \leftrightarrow \bar{0} = \bar{c}_i \quad (\star)$

Για $i < b$, έχουμε $c_i \neq 0$.

Άρα από 7.3 έχουμε $S_0 \vdash \bar{c}_i \neq \bar{0}$, για κάθε $i < b$ και άρα

$S_0 \vdash \neg\phi(\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_n,\bar{i},\bar{0})$, για κάθε $i < b$. $\quad$ (1)

Αλλά επειδή $c_b = 0$, από $\star$ παίρνουμε

$S_0 \vdash \phi(\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_n,\bar{b},\bar{0})$. $\quad$ (2)

Από (1) και (2) και από το λήμμα 7.7 παίρνουμε

$S_0 \vdash [\phi(\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_n,x_{n+1},\bar{0}) \wedge \forall z(z < x_{n+1} \to \neg\phi(\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_n,z,\bar{0}))] \leftrightarrow x_{n+1} = \bar{b}$, δηλαδή

$S_0 \vdash \psi(\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_n,x_{n+1}) \leftrightarrow x_{n+1} = \bar{b}$.

Άρα ο ψ αναπαριστά την F.

7.3 Αριθμητικοποίηση της λογικής

Για λόγους οικονομίας της παρουσίασης, θα υποθέσουμε ότι η γλώσσα μας έχει ως λογικά σύμβολα μόνον τα $\neg$, $\to$ και $\forall$. Σκοπός μας τώρα είναι να μπορέσουμε να εκφράσουμε, μέσω αριθμητικών προτάσεων, κάποια πράγματα που διατυπώνουμε για την τυπική θεωρία (στα μεταμαθηματικά), όπως π.χ. «μια ακολουθία τύπων είναι τυπική απόδειξη στην αριθμητική» ή «μια συγκεκριμένη θεωρία είναι συνεπής». Αυτό θα μπορούσε να γίνει αν οι εκφράσεις της γλώσσας αποκτούσαν έναν αριθμό ως κωδικό που θα τις αντιπροσώπευε, οπότε κάθε διατύπωση για τα τυπικά αντικείμενα της γλώσσας θα μετατρεπόταν σε διατύπωση για τους αριθμούς-κωδικούς. Αν δε οι διατυπώσεις αυτές μπορούσαν να εκφραστούν στη γλώσσα της αριθμητικής, τότε θα μπορούσαμε να εκφράσουμε τα μεταμαθηματικά της θεωρίας με τη γλώσσα της τυπικής θεωρίας, δηλαδή, κατά κάποιον τρόπο, η τυπική θεωρία θα μπορούσε να μιλήσει για τον εαυτό της.

Ορισμός 7.10 *Αν $\circledast$ είναι ένα από τα βασικά σύμβολα του αλφαβήτου της γλώσσας $\mathcal{L}$, τότε ο* αριθμός συμβόλου *του $\circledast$, τον συμβολίζουμε με $\#\circledast$ (μερικές φορές θα γράφουμε και $\#(\circledast)$, αν αυτό καθιστά σαφέστερη την παρουσίαση), ορίζεται ως:*

$\#x_i = 2i$, για κάθε μεταβλητή x_i της γλώσσας ($i \in \mathbb{N}$),

$\#s = 1$, $\#+ = 3$, $\#\cdot = 5$, $\# <= 7$, $\#\bar{0} = 9$, $\#\neg = 11$, $\# \to= 13$, $\#\forall = 15$, $\#(=) = 17$, δηλαδή το $\# =$ ισούται με 17.

Εδώ βλέπουμε ότι έχουμε χρησιμοποιήσει όλους τους άρτιους αριθμούς ως αριθμούς συμβόλων (κωδικούς) για τις μεταβλητές και κάποιους περιττούς *(μέχρι και το 17) για τα υπόλοιπα σύμβολα της γλώσσας.*

Ορισμός 7.11 *Αν $*$ είναι ένας όρος ή ένας τύπος της $\mathcal{L}$ ορίζουμε τον αριθμό Gödel του $*$, και τον συμβολίζουμε με $\ulcorner * \urcorner$, με επαγωγή ως εξής:*

Για όρους t,

Αν t είναι μεταβλητή ή σύμβολο σταθεράς $\bar{0}$, τότε $\ulcorner t \urcorner = \langle \# t \rangle$.

Αν t είναι ο σύνθετος όρος $f(t_1, \ldots, t_n)$, όπου f σύμβολο συνάρτησης, τότε $\ulcorner t \urcorner = \langle \# f, \ulcorner t_1 \urcorner, \ldots, \ulcorner t_n \urcorner \rangle$.

Για τύπους ϕ.

Αν ϕ είναι ατομικός τύπος, δηλαδή έχει μια από τις μορφές $t_1 = t_2$ ή $t_1 < t_2$, τότε $\ulcorner \phi \urcorner = \langle \# =, \ulcorner t_1 \urcorner, \ulcorner t_2 \urcorner \rangle$ ή $\langle \# <, \ulcorner t_1 \urcorner, \ulcorner t_2 \urcorner \rangle$, αντιστοίχως.

Αν ϕ είναι ο $\neg\psi$, τότε $\ulcorner \phi \urcorner = \langle, \# \neg, \ulcorner \psi \urcorner \rangle$.

Αν ϕ είναι ο $\psi_1 \to \psi_2$, τότε $\ulcorner \phi \urcorner = \langle \# \to, \ulcorner \psi_1 \urcorner, \ulcorner \psi_2 \urcorner \rangle$.

Αν ϕ είναι ο $\forall x_i \psi$, τότε $\ulcorner \phi \urcorner = \langle \# \forall, \# x_i, \ulcorner \psi \urcorner \rangle$.

Σημείωση 1. Με επαγωγή στο μήκος μιας έκφρασης μπορούμε να αποδείξουμε ότι διαφορετικές εκφράσεις έχουν διαφορετικούς αριθμούς Gödel. Διότι ας υποθέσουμε ότι αυτό δεν ισχύει. Τότε θα υπάρχει μια έκφραση ϕ_1 με το ελάχιστο δυνατό μήκος ώστε για κάποια άλλη έκφραση $\phi_2 \neq \phi_1$ θα έχουμε $\ulcorner \phi_1 \urcorner = \ulcorner \phi_2 \urcorner$. Αλλά τότε και οι δύο, οι $\ulcorner \phi_1 \urcorner$ και $\ulcorner \phi_2 \urcorner$, πρέπει να έχουν την ίδια μορφή $\langle \# \neg, \cdots \rangle$ ή $\langle \# \to, \cdots \rangle$ ή $\langle \# \forall, \# x_i, \cdots \rangle$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $\ulcorner \phi_1 \urcorner = \langle \# \neg, \ulcorner \psi \urcorner \rangle$ και $\ulcorner \phi_2 \urcorner = \langle \# \neg, \ulcorner \psi' \urcorner \rangle$. Τότε $\ulcorner \psi \urcorner = \ulcorner \psi' \urcorner$. Από την επαγωγική υπόθεση πρέπει να έχουμε $\psi = \psi'$. Αυτό όμως δίνει $\phi_1 = \phi_2$, αντίφαση.

Σημείωση 2. Διαισθητικά, μπορούμε να δούμε ότι έχουμε μια αποτελεσματική, αλγοριθμική διαδικασία για να προσδιορίζουμε αν ένας δοθείς αριθμός a είναι ή όχι αριθμός Gödel και, αν ναι, ποιανής έκφρασης είναι αριθμός Gödel, δηλαδή ποια έκφραση αντιπροσωπεύει αυτός ο αριθμός. Για να το δούμε αυτό, ας υποθέσουμε ότι είναι αληθές για όλους τους αριθμούς $b < a$. Τότε ελέγχουμε αν $seq(a)$. Αν όχι, τότε a δεν είναι αριθμός Gödel. Διαφορετικά θα πρέπει $a = \langle (a)_0, \ldots, (a)_{n-1} \rangle$, όπου $n = lh(a)$. Αν $n \neq 2$ ή $n \neq 3$, τότε a δεν είναι αριθμός Gödel. Διαφορετικά θα ελέγξουμε αν $(a)_0 = 1, 3, 5, \ldots, 15, 17$. Αν όχι, τότε δεν είναι αριθμός Gödel. Αν ναι, τότε ελέγχουμε τα $(a)_1$ και $(a)_{n-1}$ για να δούμε αν είναι αριθμοί Gödel και, αν είναι, ποιανών εκφράσεων είναι αριθμοί Gödel (αυτό μπορούμε να το κάνουμε διότι $(a)_1, (a)_{n-1} < a$).

Αν T είναι μια θεωρία στη γλώσσα $\mathcal{L}$, τότε

$Ax_T = \{\ulcorner \phi \urcorner \mid \phi$ είναι μη λογικό αξίωμα της $T\}$

$Thm_T = \{\ulcorner \phi \urcorner \mid T \vdash \phi\}$

Ορισμός 7.12 *Ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{N}$ λέγεται αναδρομικό $\Leftrightarrow$ το κατηγόρημα $x \in A$ είναι αναδρομικό.*

Το κατηγόρημα $P(\vec{x})$ είναι αναδρομικά αριθμήσιμο (ή α.α.) αν υπάρχει αναδρομικό κατηγόρημα $R(\vec{x}, y)$ έτσι ώστε $P(\vec{x}) \leftrightarrow \exists y R(\vec{x}, y)$.

$A \subseteq \mathbb{N}$ είναι α.α. $\Leftrightarrow$ $x \in A$ είναι α.α.

Ορισμός 7.13 *Μια θεωρία T είναι (αναδρομικά) αξιωματική αν το Ax_T είναι αναδρομικό.*

Μια θεωρία T είναι (αναδρομικά) αξιωματικοποιήσιμη αν υπάρχει αξιωματική θεωρία T' έτσι ώστε για κάθε ϕ, $T \vdash \phi \Leftrightarrow T' \vdash \phi$.

Ορισμός 7.14 *Η θεωρία T είναι αποκρίσιμη αν το Thm_T είναι αναδρομικό. Διαφορετικά η T είναι αναποκρίσιμη.*

Παρατήρηση: Αν υποθέσουμε τη θέση του Church, τότε T είναι αποκρίσιμη αν και μόνον αν υπάρχει μια αλγοριθμική διαδικασία απόφανσης για το Thm_T.

Τα αποτελέσματα του Gödel (και Church) τώρα μπορούν να διατυπωθούν ως εξής:

1. Κάθε συνεπής επέκταση της S_0 είναι αναποκρίσιμη.
2. Κάθε συνεπής αξιωματική επέκταση της S_0 είναι μη πλήρης.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε, δίνοντας κατάλληλους ορισμούς, ότι ορισμένα αριθμητικά κατηγορήματα (και συναρτήσεις) είναι αναδρομικά. Τα κατηγορήματα αυτά (καθώς και οι συναρτήσεις) θα αναφέρονται, μέσω της αριθμητικοποίησης, στο υπό εξέταση τυπικό σύστημα, δηλαδή θα αναπαριστούν αριθμητικά κάποιες μεταμαθηματικές προσεγγίσεις.

$Vble(a) \Leftrightarrow Seq(a) \wedge lh(a) = 1 \wedge \exists y_{y<a}((a)_0 = 2y)$

Η χρήση του φραγμένου $\exists y_{y<a}$ είναι σωστή διότι $(a)_0 < a$. Άρα το κατηγόρημα $Vble$ είναι αναδρομικό. $Vble(a)$ αληθεύει αν και μόνον αν a είναι αριθμός Gödel μιας μεταβλητής της γλώσσας της αριθμητικής. Θα λέμε και ότι $Vble(a)$ σημαίνει «a είναι αριθμός Gödel μιας μεταβλητής της γλώσσας της αριθμητικής».

$$
\begin{aligned}
Term(a) &\Leftrightarrow a = \langle \#\bar{0} \rangle \text{ αν } a = \langle \#\bar{0} \rangle \\
&\Leftrightarrow Term((a)_1) \text{ αν } a = \langle \#s, (a)_1 \rangle \\
&\Leftrightarrow Term((a)_1) \wedge Term((a)_2), \\
&\quad\ \text{αν } a = \langle \#+, (a)_1, (a)_2 \rangle \text{ ή } a = \langle \#\cdot, (a)_1, (a)_2 \rangle \\
&\Leftrightarrow Vble(a) \text{ διαφορετικά.}
\end{aligned}
$$

Αυτό είναι αναδρομικό από προηγούμενα αποτελέσματα (ορισμός με περιπτώσεις) επειδή όλα που βρίσκονται στο δεξιό μέρος του ορισμού είναι αναδρομικά και $(a)_1, (a)_2 < a$.

$Term(a)$ σημαίνει ότι $a = \ulcorner t \urcorner$ για κάποιον όρο t, δηλαδή «a είναι αριθμός Gödel ενός όρου της γλώσσας».

$Atfor(a) \Leftrightarrow Seq(a) \wedge lh(a) = 3 \wedge ((a)_0 = \#(=) \vee (a)_0 = \# <) \wedge Term((a)_1) \wedge Term((a)_2)$

$Atfor(a)$ σημαίνει «a είναι αριθμός Gödel ενός ατομικού τύπου». Προφανώς $Atfor(a)$ είναι αναδρομικό.

$$\begin{aligned} For(a) &\Leftrightarrow For((a)_1) \text{ αν } a = \langle \#\neg, (a)_1 \rangle \\ &\Leftrightarrow For((a)_1) \wedge For((a)_2) \text{ αν } a = \langle \# \rightarrow, (a)_1, (a)_2 \rangle \\ &\Leftrightarrow Vble((a)_1) \wedge For((a)_2) \text{ αν } a = \langle \#\forall, (a)_1, (a)_2 \rangle \\ &\Leftrightarrow Atfor(a) \text{ διαφορετικά.} \end{aligned}$$

Το κατηγόρημα For είναι αναδρομικό.

$For(a)$ σημαίνει «a είναι αριθμός Gödel ενός τύπου».

Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει μια αναδρομική συνάρτηση $Sub(a,b,c)$ τέτοια ώστε, αν ϕ είναι τύπος με ελεύθερη μεταβλητή x_i και t όρος, τότε $Sub(\ulcorner\phi\urcorner, \ulcorner x_i\urcorner, \ulcorner t\urcorner) = \ulcorner\phi(t/x_i)\urcorner$ και επιπλέον αν t_1 είναι όρος με ενδεχόμενη εμφάνιση μεταβλητής x_i και t_2 όρος, τότε $Sub(\ulcorner t_1\urcorner, \ulcorner x_i\urcorner, \ulcorner t_2\urcorner) = \ulcorner t_1(t_2/x_i)\urcorner$.

Ο αναδρομικός ορισμός του Sub, με περιπτώσεις, είναι ο ακόλουθος.

$Sub(a,b,c) = c$ αν $Vble(a) \wedge a = b$
$= \langle (a)_0, Sub((a)_1, b, c) \rangle$ αν $Seq(a) \wedge lh(a) = 2$
$= \langle (a)_0, Sub((a)_1, b, c), Sub((a)_2, b, c) \rangle$ αν $Seq(a) \wedge lh(a) = 3 \wedge (a) \neq \#\forall$
$= \langle (a)_0, (a)_1, Sub((a)_2, b, c) \rangle$ αν $Seq(a) \wedge lh(a) = 3 \wedge (a)_0 = \#\forall \wedge (a)_1 \neq b$
$= a$ διαφορετικά.

Σημείωση για τον ορισμό με αναφορά στις κατά σειράν περιπτώσεις του ανωτέρω ορισμού. Σε κάθε περίπτωση αναφέρονται οι μορφές που καλύπτει ο ορισμός.

2η περίπτωση: a έχει τη μορφή $\ulcorner s(t)\urcorner$ ή $\ulcorner\neg\phi\urcorner$.

3η περίπτωση: α είναι $\ulcorner t_1 + t_2\urcorner$ ή $\ulcorner t_1 \cdot t_2\urcorner$ ή $\ulcorner\phi_1 \rightarrow \phi_2\urcorner$ ή $\ulcorner t_1 = t_2\urcorner$ ή $\ulcorner t_1 < t_2\urcorner$.

4η περίπτωση: $a = \ulcorner\forall x_i \phi\urcorner$, όπου $\ulcorner x_i\urcorner \neq b$.

5η περίπτωση: $a = \ulcorner\forall x_i \phi\urcorner$ με $\ulcorner x_i\urcorner = b$ και όλες τις άλλες περιπτώσεις.

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε (άσκηση) ότι υπάρχει ένα αναδρομικό κατηγόρημα $Subtl(a,b,c)$ τέτοιο ώστε

$Subtl(\ulcorner\phi\urcorner, \ulcorner x_i\urcorner, \ulcorner t\urcorner) \Leftrightarrow x_i$ είναι αντικαταστάσιμη από τον t στον ϕ.

Το κατηγόρημα $Lax(a)$, που ισχύει όταν a είναι ο αριθμός Gödel ενός λογικού αξιώματος, είναι αναδρομικό.

Διότι έχει τον ακόλουθο αναδρομικό ορισμό.

$Lax(a) \Leftrightarrow A1(a) \vee A2(a) \vee A3(a) \vee A4(a) \vee A5(a) \vee Eq1(a) \vee Eq2(a)$, όπου

$A1(a) \Leftrightarrow \exists b_{b<a} \exists c_{c<a}(For(b) \wedge For(c) \wedge a = \langle \# \rightarrow, b, \langle \# \rightarrow, c, b \rangle \rangle)$

$A1(a)$ σημαίνει «a είναι ο αριθμός Gödel ενός λογικού αξιώματος A1» και

για τα υπόλοιπα $i = 2,3,4,5$, το $Ai(a)$ σημαίνει «a είναι ο αριθμός Gödel ενός λογικού αξιώματος Ai». Για τα $Eq1(a)$ και $Eq2(a)$, αυτά σημαίνουν «a είναι ο αριθμός Gödel ενός αξιώματος ισότητας 1. ή 2. αντίστοιχα (ορισμός 5.12)». Για όλα αυτά (άσκηση), μπορούμε να αποδείξουμε ότι υπάρχουν αναδρομικοί ορισμοί.

Σε κάθε πεπερασμένη ακολουθία $\phi_1, \ldots, \phi_n$ από τύπους, αντιστοιχούμε έναν αριθμό $\langle \ulcorner\phi_1\urcorner, \ldots, \ulcorner\phi_n\urcorner \rangle$. Αυτός θα είναι ο αριθμός Gödel της ακολουθίας.

Προφανώς διαφορετικές ακολουθίες θα έχουν διαφορετικούς αριθμούς Gödel.

Έστω τώρα ότι η θεωρία T είναι αξιωματική (δηλαδή Ax_T είναι αναδρομικό). Τότε μπορούμε να δείξουμε ότι το κατηγόρημα

$Prf_T(a) \Leftrightarrow$ υπάρχει ακολουθία τύπων $\phi_1, \ldots, \phi_n$ η οποία συγκροτεί τυπική απόδειξη του ϕ_n στη θεωρία T και $a = \langle \ulcorner \phi_1 \urcorner, \ldots, \ulcorner \phi_n \urcorner \rangle$

είναι αναδρομικό.

Διότι έχει τον κάτωθι αναδρομικό ορισμό:

$$\begin{aligned} Prf_T(a) \quad \Leftrightarrow \quad & Seq(a) \wedge lh(a) \neq 0 \wedge \forall i_{i<lh(a)}[Ax_T((a)_i) \vee Lax((a)_i) \\ & \vee \exists j_{j<i} \exists k_{k<i}(MP((a)_j, (a)_k, (a)_i) \vee Gen((a)_j, (a)_i))] \end{aligned}$$

όπου $MP(a, b, c)$ σημαίνει ότι υπάρχουν τύποι ϕ και ψ ώστε $a = \ulcorner \phi \to \psi \urcorner$, $b = \ulcorner \phi \urcorner$ και $c = \ulcorner \psi \urcorner$, δηλαδή ότι το c είναι αριθμός Gödel συμπεράσματος κανόνα Modus Ponens του οποίου οι υποθέσεις έχουν αριθμούς Gödel τα a και b. Μπορούμε με παρόμοιο τρόπο (άσκηση) να αποδείξουμε ότι το κατηγόρημα αυτό είναι αναδρομικό.

Και $Gen(a, b)$ σημαίνει ότι υπάρχουν τύπος ϕ και μεταβλητή x ώστε $a = \ulcorner \phi \urcorner$ και $b = \ulcorner \forall x \phi \urcorner$, δηλαδή ότι το b είναι αριθμός Gödel συμπεράσματος κανόνα γενίκευσης με υπόθεση που έχει αριθμό Gödel a. Και αυτό με τη σειρά του (άσκηση) μπορεί να αποδειχθεί αναδρομικό.

Μπορούμε να ορίσουμε το εξής κατηγόρημα

$Pf_T(a, b) \Leftrightarrow Prf_T(b) \wedge a = (b)_{lh(b) \dot{-} 1}$

το οποίο σημαίνει ότι «b είναι ο αριθμός Gödel μιας τυπικής απόδειξης η οποία αποδεικνύει έναν τύπο με αριθό Gödel a». Προφανώς, από τον ορισμό, Pf_T είναι αναδρομικό, αν η θεωρία T είναι αξιωματική.

Θεώρημα 7.15 *Αν T είναι αξιωματική, τότε Thm_T είναι αναδρομικά αριθμήσιμο.*

Απόδειξη $a \in Thm_T \leftrightarrow \exists b Pf_T(a, b)$

Άρα, από παραπάνω το Thm_T είναι α.α. αν η T είναι αξιωματική. □

7.4 Τα θεωρήματα μη πληρότητας και αναποκρισιμότητας των Gödel και Church

Ορισμός 7.16 *Ορίζουμε συνάρτηση, μιας μεταβλητής, Num ως εξής:*

$Num(0) = \langle \# \bar{0} \rangle$

$Num(a + 1) = \langle \# s, Num(a) \rangle$

Προφανώς $Num(a) = \ulcorner \bar{a} \urcorner$ και λόγω του αναδρομικού ορισμού, η $Num(a)$ είναι αναδρομική.

Θεώρημα 7.17 (Το θεώρημα του Church) *Κάθε συνεπής επέκταση του S_0 είναι αναποκρίσιμη.*

Απόδειξη Ας σταθεροποιήσουμε κάποια μεταβλητή της $\mathcal{L}$, έστω την x_1.

Έστω τώρα $T \supseteq S_0$ είναι συνεπής. Πρέπει να δείξουμε ότι Thm_T δεν είναι αναδρομικό. Έστω ότι το κατηγόρημα P ορίζεται από τη σχέση

$P(a) \Leftrightarrow \neg Thm_T(Sub(a, \ulcorner x_1 \urcorner, Num(a)))$.

Ας υποθέσουμε ότι Thm_T είναι αναδρομικό. Τότε και το P είναι αναδρομικό, οπότε το P αναπαρίσταται στην T από κάποιον τύπο $\phi(x_1)$ (μπορούμε να επιλέξουμε την ελεύθερη μεταβλητή αυτού του τύπου να είναι η x_1). Έστω τώρα $k = \ulcorner \phi(x_1) \urcorner$. Τότε

$P(k) \Leftrightarrow \neg Thm_T(\ulcorner \phi(\bar{k}) \urcorner)$

$\Leftrightarrow T \nvdash \phi(\bar{k})$

Αλλά επειδή ο ϕ αναπαριστά το P, θα έχουμε

$P(\bar{k}) \Rightarrow T \vdash \phi(\bar{k})$, και

$\neg P(\bar{k}) \Rightarrow T \vdash \neg\phi(\bar{k})$.

Άρα η $P(k)$ δεν μπορεί να ισχύει και αν ισχύει η $\neg P(k)$, τότε η T θα είναι ασυνεπής (άτοπο).

Άρα το Thm_T δεν μπορεί να είναι αναδρομικό, εκ του οποίου έπεται το ζητούμενο. □

Λήμμα 7.18 *Ένα κατηγόρημα P είναι αναδρομικό αν και μόνον αν αμφότερα τα P και $\neg P$ είναι α.α.*

Απόδειξη Προφανώς κάθε αναδρομικό κατηγόρημα είναι και α.α. Άρα η κατεύθυνση από αριστερά προς τα δεξιά είναι τετριμμένη. Αντιστρόφως, ας υποθέσουμε ότι $P(x) \leftrightarrow \exists y Q(y,x)$ και $\neg P(x) \leftrightarrow \exists y R(y,x)$, όπου Q και R είναι αναδρομικά. Ορίζουμε αναδρομική $F(x) = \mu y(Q(y,x) \vee R(y,x))$. Ο ορισμός είναι καλός διότι για κάθε x υπάρχει y ώστε να ισχύει η διάζευξη. Τότε η P μπορεί να οριστεί ως $P(x) \leftrightarrow Q(F(x), x)$, ορισμός προφανώς αναδρομικός. □

Θεώρημα 7.19 *Αν η θεωρία T είναι αξιωματική και πλήρης, τότε είναι αποκρίσιμη.*

Απόδειξη Υποθέτουμε ότι η T είναι συνεπής, διαφορετικά το ζητούμενο προκύπτει τετριμμένα. Από 7.18 αρκεί να αποδείξουμε ότι Thm_T και $\neg Thm_T$ είναι αναδρομικά αριθμήσιμα. Ξέρουμε ότι το Thm_T είναι α.α. επειδή η T είναι αξιωματική. Παρατηρούμε τώρα ότι για οποιονδήποτε ϕ,

$\nvdash \phi \Leftrightarrow \nvdash \phi^* \Leftrightarrow \vdash \neg\phi^*$,

όπου ϕ^* είναι η καθολική κλειστότητα του ϕ (ισχύει διότι T είναι πλήρης). Μπορούμε επίσης να ορίσουμε (άσκηση) μια αναδρομική συνάρτηση Cl, μιας μεταβλητής, ώστε αν $a = \ulcorner \phi \urcorner$ τότε $Cl(a) = \ulcorner \phi^* \urcorner$. Οπότε τότε μπορούμε να έχουμε

$\neg Thm_T(a) \leftrightarrow \neg For(a) \vee \exists y Pf_T(\langle \#\neg, Cl(a), y \rangle)$

από το οποίο προκύπτει ότι $\neg Thm_T$ είναι αναδρομικά αριθμήσιμο και έτσι έχουμε το ζητούμενο. □

Θεώρημα 7.20 (Πρώτο θεώρημα μη πληρότητας του Gödel) *Κάθε συνεπής αξιωματική επέκταση της S_0 είναι μη πλήρης.*

Απόδειξη Άμεσα από το 7.17 και 7.19. □

Σημείωση 1. Προφανώς στο παραπάνω το «αξιωματική» μπορεί να αντικατασταθεί με το «αξιωματικοποιήσιμη».

Σημείωση 2. Ειδικά η S_0 είναι μη πλήρης (αν βέβαια είναι συνεπής!).

Θεώρημα 7.21 (Λήμμα της αυτοαναφοράς) *Έστω $\phi(x)$ ένας οποιοσδήποτε τύπος με μία ελεύθερη μεταβλητή. Τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε μια πρόταση ψ τέτοια ώστε*

$S_0 \vdash \psi \leftrightarrow \phi(\overline{\ulcorner\psi\urcorner})$.

Απόδειξη Έστω η F ορίζεται από $F(a) = Sub(a, \ulcorner x_1 \urcorner, Num(a))$.

Επειδή η F είναι αναδρομική θα είναι και αναπαραστάσιμη στην S_0 από κάποιον τύπο $\Theta(x_1, x_2)$. Πάρτε τώρα τον τύπο $\forall x_2[\Theta(x_1, x_2) \to \phi(x_2)]$. Αυτός θα έχει έναν αριθμό Gödel, έστω k. Έστω τώρα ψ η πρόταση $\forall x_2[\Theta(\bar{k}, x_2) \to \phi(x_2)]$. Σημειώστε ότι $F(k) = \ulcorner\psi\urcorner$. Τώρα, επειδή ο Θ αναπαριστά την F στην S_0, έχουμε ότι

$S_0 \vdash \Theta(\bar{k}, x_2) \leftrightarrow x_2 = \overline{\ulcorner\psi\urcorner} \quad (\star)$

Έχουμε επίσης $S_0, \psi \vdash \Theta(\bar{k}, \overline{\ulcorner\psi\urcorner}) \to \phi(\overline{\ulcorner\psi\urcorner})$, από τον ορισμό του ψ.

Κατά συνέπεια από $(\star)$ έχουμε ότι $S_0, \psi \vdash \phi(\overline{\ulcorner\psi\urcorner})$, άρα

$S_0 \vdash \psi \to \phi(\overline{\ulcorner\psi\urcorner}) \quad (1)$

Αντιστρόφως, από $(\star)$ $S_0 \vdash \phi(\overline{\ulcorner\psi\urcorner}) \to \forall x_2[\Theta(\bar{k}, x_2) \to \phi(x_2)]$, δηλαδή

$S_0 \vdash \phi(\overline{\ulcorner\psi\urcorner}) \to \psi \quad (2)$

Το αποτέλεσμα έπεται από (1) και (2).

Ορισμός 7.22 *Ένα κατηγόρημα $P \subseteq \mathbb{N}^n$ είναι αριθμητικό αν υπάρχει τύπος $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ τέτοιος ώστε, για κάθε $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$*

$P(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \phi(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n})$

Ένα σύνολο A είναι αριθμητικό αν το κατηγόρημα $x \in A$ είναι αριθμητικό.

Θεώρημα 7.23 *Κάθε αναδρομικά αριθμήσιμο (και κατά μείζονα λόγο αναδρομικό) κατηγόρημα P είναι αριθμητικό.*

Απόδειξη Βασίζεται στο θεώρημα της αναπαραστασιμότητας.

Υποθέτουμε ότι $P(\vec{x}) \Leftrightarrow \exists y R(\vec{x}, y)$, όπου R είναι αναδρομικό και έστω $\psi(\vec{x}, y)$ αναπαριστά το R στην S_0. Τότε

$$\begin{aligned} P(a_1, \ldots, a_n) &\Leftrightarrow \exists y R(a_1, \ldots, a_n, y) \\ &\Leftrightarrow R(a_1, \ldots, a_n, b), \text{ για κάποιο } b \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow S_0 \vdash \psi(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}, \bar{b}), \text{ για κάποιο } b \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow \mathcal{N} \models \psi(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}, \bar{b}), \text{ για κάποιο } b \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow \mathcal{N} \models \exists y(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}, y). \end{aligned}$$

Είναι φανερό τότε ότι $\exists y(\vec{x}, y)$ ορίζει το $P(\vec{x})$ στην $\mathbb{N}$. Άρα P είναι αριθμητικό. □

Παρατήρηση 7.24 *Γενικεύοντας το ανωτέρω, μπορούμε να δείξουμε ότι ένα κατηγόρημα $P(\vec{x})$ είναι αριθμητικό αν και μόνον αν είναι ισοδύναμο με κατηγόρημα της μορφής $\Box y_1 \Box y_2 \cdots \Box y_n R(\vec{x}, y_1, \ldots, y_n)$, όπου R είναι αναδρομικό και τα $\Box$ είναι εναλλασσόμενες εμφανίσεις ποσοδεικτών $\exists$ και $\forall$.*

Θεώρημα 7.25 (Tarski) *Το σύνολο Tr όλων των αριθμών Gödel των προτάσεων που είναι αληθείς στην ερμηνεία $\mathcal{N}$ δεν είναι αριθμητικό.*

Απόδειξη Έστω $Tr = \{\ulcorner\phi\urcorner \mid \mathcal{N} \models \phi\}$. Ας υποθέσουμε ότι το Tr είναι αριθμητικό· δηλαδή για κάποιον τύπο $\phi(x)$ έχουμε $Tr = \{a \mid a \in \mathbb{N} \wedge \mathcal{N} \models \phi(\bar{a})\}$. Τότε, από το 7.21, υπάρχει πρόταση ψ ώστε $\mathcal{N} \models \psi \leftrightarrow \neg\phi(\overline{\ulcorner\psi\urcorner})$. Τότε

$\mathcal{N} \models \psi \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \neg\phi(\overline{\ulcorner\psi\urcorner})$

$\Leftrightarrow \mathcal{N} \not\models \psi$ από την ιδιότητα της ϕ (άτοπο). $\Box$

Θα εφαρμόσουμε τώρα το 7.21 για να κατασκευάσουμε μία συγκεκριμένη πρόταση η οποία να είναι αναποκρίσιμη σε μια δεδομένη συνεπή και αξιωματική επέκταση T της S_0, δηλαδή ούτε αυτή ούτε η άρνησή της να αποδεικνύεται στην T. Για λόγους απλότητας θα θεωρήσουμε ότι $T \subseteq Th(\mathcal{N}) = \{\phi \mid \mathcal{N} \models \phi\}$.

Επειδή η T είναι αξιωματική, το Pf_T είναι αναδρομικό και άρα θα αναπαρίσταται στην T από έναν τύπο $\Theta(x, y)$. Έστω τώρα ο $\phi(x)$ είναι ο $\forall y \neg\Theta(x, y)$. Τότε από το 7.21 μπορούμε να κατασκευάσουμε μια πρόταση ψ τέτοια ώστε $T \vdash \psi \leftrightarrow \forall y \neg\Theta(\overline{\ulcorner\psi\urcorner}, y)$.

Πρόταση 7.26 *Η πρόταση ψ είναι αναποκρίσιμη στην T, δηλαδή ούτε αυτή ούτε η άρνησή της αποδεικνύεται.*

Απόδειξη Διότι αν

$T \vdash \psi \Rightarrow T \vdash \forall y \neg\Theta(\overline{\ulcorner\psi\urcorner}, y)$

$\Rightarrow T \vdash \neg\Theta(\overline{\ulcorner\psi\urcorner}, \bar{a})$, για κάθε $a \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \neg Pf_T(\ulcorner\psi\urcorner, a)$, για κάθε $a \in \mathbb{N}$,

$\Rightarrow T \not\vdash \psi$ (άτοπο).

Όσον αφορά την άρνηση, αν

$T \vdash \neg\psi \Rightarrow T \vdash \exists y \Theta(\overline{\ulcorner\psi\urcorner}, y)$

$\Rightarrow \mathcal{N} \models \exists y \Theta(\overline{\ulcorner\psi\urcorner}, y)$, επειδή $T \subseteq Th(\mathcal{N})$

$\Rightarrow \mathcal{N} \models \Theta(\overline{\ulcorner\psi\urcorner}, \bar{a})$, για κάποιο $a \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow T \not\vdash \neg\Theta(\overline{\ulcorner\psi\urcorner}, \bar{a})$, επειδή $T \subseteq Th(\mathcal{N})$

$\Rightarrow Pf_T(\overline{\ulcorner\psi\urcorner}, a)$, επειδή Θ αναπαριστά τον Pf_T

$\Rightarrow T \vdash \psi$ (Άτοπο). $\Box$

Παρατήρηση 7.27 *Στην παραπάνω απόδειξη, στη δεύτερη περίπτωση, την περίπτωση της άρνησης, χρησιμοποιήσαμε την έννοια της αλήθειας (αλήθεια μιας πρότασης στην αριθμητική). Ενώ αντίθετα στην πρώτη περίπτωση χρησιμοποιήσαμε μόνον τις στοιχειώδεις έννοιες της τυπικής απόδειξης και της αναπαραστασιμότητας των αναδρομικών (μηχανικά επιβεβαιώσιμων) κατηγορημάτων. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε μια απόδειξη του θεωρήματος της* *πληρότητας που δεν στηρίζεται στην έννοια της αλήθειας και είναι σχεδόν η αρχική απόδειξη του Gödel το 1931. Το αποτέλεσμα είναι ελαφρώς ασθενέστερο και χρησιμοποιεί μια διαφορετική έννοια συνέπειας, την ω-συνέπεια.*

Ορισμός 7.28 *Η θεωρία T στη γλώσσα της αριθμητικής είναι ω-συνεπής ανν για κάθε τύπο $\phi(x)$: αν $T \vdash \neg\phi(\bar{n})$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $T \nvdash \exists x \phi(x)$.*

Λήμμα 7.29 *Αν η θεωρία T είναι ω-συνεπής, τότε είναι και συνεπής.*

Απόδειξη Έστω ότι T είναι ω-συνεπής. Για να δείξουμε ότι T είναι συνεπής, αρκεί να βρούμε έναν τύπο που να μην αποδεικνύεται τυπικά από την T. Έστω ότι $\phi(x)$ είναι ο τύπος $x \neq x$. Τότε, από τα αξιώματα της ισότητας, $T \vdash \neg\phi(\bar{n})$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $T \nvdash \exists x \phi(x)$ (λόγω ω-συνέπειας). Συνεπώς η T είναι συνεπής.

Θεώρημα 7.30 (1ο θεώρημα μη πληρότητας, Gödel 1931) *Έστω T μια αξιωματική επέκταση της S_0. Τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε μια πρόταση ψ έτσι ώστε:*

Αν T είναι συνεπής, τότε $T \nvdash \psi$.

Αν T ω-συνεπής, τότε $T \nvdash \neg\psi$.

Απόδειξη Κατασκευάζουμε την πρόταση ψ όπως ακριβώς και στην περίπτωση της πρότασης 7.26. Τότε το πρώτο μέρος του θεωρήματος ταυτίζεται με το πρώτο μέρος του 7.26.

Για το δεύτερο μέρος έστω $T \vdash \neg\psi$. Όπως και στην 7.26, $T \vdash \exists y \Theta(\overline{\ulcorner \psi \urcorner}, y)$. Λόγω ω-συνέπειας υπάρχει φυσικός n ώστε $T \nvdash \neg\Theta(\overline{\ulcorner \psi \urcorner}, \bar{n})$. Αφού ή T είναι συνεπής (επειδή είναι ω-συνεπής) προκύπτει ότι $T \nvdash \psi$, άρα για κάθε φυσικό n, ο n δεν είναι αριθμός Gödel τυπικής απόδειξης του ψ από την T, οπότε δεν ισχύει ότι $Pf_T(\overline{\ulcorner \psi \urcorner}, n)$, δηλαδή $T \vdash \neg\Theta(\overline{\ulcorner \psi \urcorner}, \bar{n})$, για κάθε n, οπότε προκύπτει αντίφαση. $\square$

Το 2ο θεώρημα μη πληρότητας του Gödel

Ας θεωρήσουμε τώρα το τυπικό σύστημα S, δηλαδή το σύστημα της αριθμητικής του Peano. Για το σύστημα S, όπως ακριβώς για το οποιοδήποτε σύστημα T στην πρόταση 7.26, μπορούμε να κατασκευάσουμε μια πρόταση ψ ώστε $S \vdash \psi \leftrightarrow \forall y \neg\Theta(\overline{\ulcorner \psi \urcorner}, y)$, όπου τώρα ο $\Theta(x, y)$ είναι ο τύπος που αναπαριστά το Pf_S στην S. Ένα μέρος του 1ου θεωρήματος μη πληρότητας διατυπώνεται ως εξής:

«Αν S είναι συνεπής θεωρία τότε $S \nvdash \psi$» $(\star)$

Η $(\star)$ είναι μια μεταμαθηματική πρόταση, δηλαδή μια πρόταση που αναφέρεται στο σύστημα που τυποποιεί τη μαθηματική θεωρία της αριθμητικής. Μπορεί να μεταφραστεί σε μια πρόταση $(\star\star)$ στη γλώσσα $\mathcal{L}$ της τυπικής αριθμητικής.

$\forall y \neg\Theta(\overline{\ulcorner \bar{0} = \bar{1} \urcorner}, y) \to \forall y \neg\Theta(\overline{\ulcorner \psi \urcorner}, y)$ $(\star\star)$

όπου η πρόταση $\forall y \neg \Theta(\overline{\ulcorner \bar{0} = \bar{1} \urcorner}, y)$ μας λέει ότι στην S το $\bar{0} = \bar{1}$ δεν αποδεικνύεται, δηλαδή εκφράζει τη συνέπεια της S και συμβολίζεται συνήθως με Con_S.

Αν τώρα μεταφέρουμε, μέσω της κατάλληλης τυποποίησης, τα μεταμαθηματικά επιχειρήματα που χρησιμοποιήσαμε στην απόδειξη του 1ου θεωρήματος μη-πληρότητας, μπορούμε να αποδείξουμε ότι η αριθμητική S (η οποία έχει όλες τις αποδεικτικές ικανότητες για να το επιτύχει) μπορεί να αποδείξει την πρόταση $(\star\star)$, δηλαδή έχουμε

$S \vdash Con_S \leftrightarrow \forall y \neg \Theta(\overline{\ulcorner \psi \urcorner}, y)$.

Ως άμεση συνέπεια έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 7.31 (2ο θεώρημα μη πληρότητας του Gödel) *Αν η S είναι συνεπής, τότε $S \nvdash Con_S$.*

Απόδειξη Αν $S \vdash Con_S$, τότε επειδή $S \vdash (\star\star)$ παίρνουμε ότι $S \vdash \forall y \neg \Theta(\overline{\ulcorner \psi \urcorner}, y)$. Από την κατασκευή της πρότασης ψ, έχουμε ότι $S \vdash \psi \leftrightarrow \forall y \neg \Theta(\overline{\ulcorner \psi \urcorner}, y)$, το οποίο μας δίνει $S \vdash \psi$. Αλλά αυτό είναι αδύνατο, αν η S είναι συνεπής, πράγμα που αποδεικνύεται με τα ίδια επιχειρήματα που χρησιμοποιήσαμε στο 1ο θεώρημα μη πληρότητας. $\square$

Παρατήρηση 7.32 *Το θεώρημα 7.31 λέει ότι είναι αδύνατο να αποδείξουμε τη συνέπεια της αριθμητικής (ακριβέστερα του τυπικού συστήματος της αριθμητικής) με μεθόδους και αρχές οι οποίες μπορούν να αναπτυχθούν και να αποδειχθούν στην αριθμητική.*

Το θεώρημα αυτό ισχύει και για κάθε εύλογη θεωρία που επεκτείνει την αριθμητική. Πιο συγκεκριμένα ισχύει για κάθε θεωρία T για την οποία:

α1. Υπάχει ένας αναδρομικός μονομορφισμός από τους τύπους της $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}$ στους τύπους της $\mathcal{L}_T$ (ο οποίος αντιστοιχίζει τον ϕ στον ϕ^+) έτσι ώστε $S \vdash \phi$ συνεπάγεται $S \vdash \phi^+$.

α2. Επιπλέον, η T είναι αξιωματική.

Το 2ο θεώρημα μη πληρότητας έδωσε τέλος στην προσπάθεια να αποδειχθεί η συνέπεια των θεωριών με μεθόδους πραγματικών μαθηματικών. Αποδείχθηκε έτσι ότι το πρόγραμμα του Hilbert δεν είναι πραγματοποιήσιμο (δες και την εισαγωγή).

7.5 Ασκήσεις

1. Να οριστούν αναδρομικά κατηγορήματα και συναρτήσεις που να ικανοποιούν τις ακόλουθες ιδιότητες (Gn σημαίνει «αριθμός Gödel» και $\ulcorner * \urcorner$ είναι ο αριθμός Gödel του *):

$Vble(a) \leftrightarrow a$ είναι Gn μιας μεταβλητής της γλώσσας

$Term(a) \leftrightarrow a$ είναι Gn ενός όρου της γλώσσας

$Atfor(a) \leftrightarrow a$ είναι Gn ενός ατομικού τύπου

$For(a) \leftrightarrow a$ είναι Gn ενός τύπου

$Sub(a, b, c)$ ώστε να ισχύει $Sub(\ulcorner \phi \urcorner, \ulcorner x_i \urcorner, \ulcorner t \urcorner) = \ulcorner \phi(t/x_i) \urcorner$ και

$Sub(\ulcorner t_1 \urcorner, \ulcorner x_i \urcorner, \ulcorner t_2 \urcorner) = \ulcorner t_1(t_2/x_i) \urcorner =$ ο όρος που προκύπτει όταν όλες οι εμφανίσεις της x_i στο t_1 αντικατασταθούν από τον t_2.

$Subtl(a, b, c)$ ώστε να ισχύει

$Subtl(\ulcorner \phi \urcorner, \ulcorner x_i \urcorner, \ulcorner t \urcorner) \leftrightarrow x_i$ είναι αντικαταστάσιμη από τον t στον ϕ.

$Fr(a, b)$ ώστε να ισχύει

$Fr(\ulcorner \phi \urcorner, \ulcorner x_i \urcorner) \leftrightarrow x_i \in FV(\phi)$.

Τα αναδρομικά κατηγορήματα Ax_{A_1} Ax_{A_2} Ax_{A_3} Ax_{A_4} Ax_{A_5} ώστε να ισχύει

$Ax_{A_i}(a) \leftrightarrow a$ είναι Gn λογικού αξιώματος A_i, $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$, και

$Lax(a) \leftrightarrow a$ είναι Gn λογικού αξιώματος.

Αναδρομικά κατηγορήματα $MP(a, b, c)$ και $Gen(a, b)$ ώστε

$MP(\ulcorner \phi \urcorner, \ulcorner \psi \urcorner, \ulcorner \chi \urcorner) \leftrightarrow \chi$ είναι το συμπέρασμα κανόνα MP του οποίου οι υποθέσεις είναι οι ϕ και ψ.

$Gen(\ulcorner \phi \urcorner, \ulcorner \psi \urcorner) \leftrightarrow \psi$ είναι το συμπέρασμα κανόνα Gen του οποίου η υπόθεση είναι ο ϕ (δηλαδή ψ είναι της μορφής $\forall x_i \phi$).

$Cl(a)$ συνάρτηση ώστε

$Cl(\ulcorner \phi \urcorner) = \ulcorner \phi^* \urcorner$, όπου ϕ^* είναι η καθολική κλειστότητα του ϕ (ορίστε μια έννοια μοναδικής καθολικής κλειστότητας).

2. Έστω $\mathcal{L}$ η γλώσσα της αριθμητικής και x μια μεταβλητή της γλώσσας. Έστω W το διμελές (αναδρομικό) κατηγόρημα

$W(u, y)$ ισχύει ανν $u = \ulcorner \phi(x) \urcorner$ (για κάποιον τύπο $\phi(x)$ της $\mathcal{L}$) και y είναι αριθμός Gödel μιας τυπικής απόδειξης του $\phi(\overline{u})$ στην S_0.

Έστω $\mathcal{W}(x, y)$ ο τύπος που αναπαριστά το W στην αριθμητική S_0. Θεωρήστε την πρόταση $G \equiv \forall y \neg \mathcal{W}(\overline{m}, y)$ με $m = \ulcorner \forall y \neg \mathcal{W}(x, y) \urcorner$. Πότε το $W(m, k)$ είναι αληθές; Χρησιμοποιήστε το για να αποδείξετε, με απαγωγή στο άτοπο, ότι $S_0 \nvdash G$. Συμπεράνατε ότι $\forall n \in \mathbb{N},\ S_0 \vdash \neg \mathcal{W}(\overline{m}, \overline{n})$.

Χρησιμοποιήστε το $\exists z \forall y (\neg \mathcal{W}(\overline{m}, z) \to \neg \mathcal{W}(\overline{m}, y))$ για να αποδείξτε ότι υπάρχει πρόταση $\exists z \forall y\, \psi(z, y)$, που αποδεικνύεται στην Αριθμητική του Peano (S), αλλά για κανένα $n \in \mathbb{N}$ δεν υπάρχει απόδειξη της $\forall y\, \psi(\overline{n}, y)$ στην S.

3. Θεωρήστε γνωστό ότι ένα μονοθέσιο αριθμητικό κατηγόρημα είναι αναδρομικά αριθμήσιμο αν και μόνον αν είναι το πεδίο τιμών μιας αναδρομικής συνάρτησης. Τότε

A1. Ορίστε αναδρομική συνάρτηση g, δύο μεταβλητών, ώστε να ισχύει ότι $g(n, \ulcorner\phi\urcorner) = \ulcorner\phi \vee \cdots \vee \phi\urcorner$ όπου $n \in \mathbb{N}$ και η διάζευξη $\phi \vee \cdots \vee \phi$ χρησιμοποιεί n φορές το σύμβολο της διάζευξης $\vee$.

A2. Αποδείξτε ότι αν το σύνολο $Ax_T = \{e_0, e_1, \ldots, e_n, \ldots\}$, $(n \in \mathbb{N})$ περιέχει τους αριθμούς Gödel όλων των μη λογικών αξιωμάτων μιας θεωρίας T τότε η θεωρία T' με αντίστοιχο σύνολο $Ax_{T'} = \{g(n, e_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ είναι ισοδύναμη με την T' (ισοδύναμη σημαίνει ότι έχει το ίδιο σύνολο θεωρημάτων με την T).

A3. Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω αποδείξτε ότι, αν η θεωρία T έχει ένα αναδρομικά αριθμήσιμο σύνολο αξιωμάτων, τότε υπάρχει μια ισοδύναμη θεωρία T' με σύνολο αξιωμάτων που είναι αναδρομικό.

Βιβλιογραφία κεφαλαίου 7

E2, E3, Ξ1, Ξ2, Ξ5, Ξ6, Ξ7, Ξ8, Ξ9.

(Οι αναφορές παραπέμπουν στη βιβλιογραφία στο τέλος του βιβλίου)

8 Συστήματα Gentzen

Τα τυπικά αποδεικτικά συστήματα που αναπτύξαμε είναι γνωστά ως αποδεικτικά συστήματα τύπου Hilbert. Ο αρχικός σκοπός της δημιουργίας τους ήταν να δειχθεί ότι η καθημερινή μαθηματική διαδικασία μπορεί να τυποποιηθεί και να καλύψει, κατ' αρχήν, το σύνολο της μαθηματικής συλλογιστικής· πράγμα που έγινε φανερό με το θεώρημα της πληρότητας. Δεν υπεισέρχονταν όμως στο πώς, με ποιόν τρόπο ή μορφή, αποδεικνύονται οι μαθηματικές προτάσεις. Εκείνο που βασικά τα απασχολούσε ήταν η έκταση (το σύνολο) των προτάσεων που μπορούν να αποδειχθούν.

Ο πρώτος που ενδιαφέρθηκε και για την τυποποίηση του τρόπου με τον οποίο αποδεικνύονται οι προτάσεις ήταν ο Gentzen. Αρχικά δημιούργησε το σύστημα της φυσικής απαγωγής και στη συνέχεια το σύστημα των ακολουθητικών. Και τα δύο είναι πολύ σημαντικά για την ανάπτυξη της λογικής, γιατί επέτρεψαν τη δομική μελέτη των αποδείξεων και αποκάλυψαν επίσης αναπάντεχες υπολογιστικές πλευρές κρυμμένες στις μαθηματικές αποδείξεις.

Στη συνέχεια θα κάνουμε μια εισαγωγική μελέτη στο σύστημα των ακολουθητικών του Gentzen και στο συγγενές σύστημα των Tableaux του Beth. Είναι δύο συστήματα τα οποία θεωρούνται πολύ σημαντικά για τις εφαρμογές της λογικής στην πληροφορική, ενδιαφέρουν ανθρώπους που ασχολούνται με τη δομική σχέση μεταξύ των δύο αυτών επιστημών και θεωρούνται αναγκαίο θεωρητικό υπόστρωμα γι' αυτήν τη μελέτη. Επειδή δε τα συστήματα αυτά είναι εκτασιακά ισοδύναμα με τα αντίστοιχα τύπου Hilbert, οι αποδείξεις πληρότητας αυτών των συστημάτων θα είναι αποδείξεις πληρότητας, διαφορετικές και ενδιαφέρουσες, για τα τυπικά συστήματα εν γένει. Αυτό ισχύει και για κάποια άλλα αποτελέσματα, όπως π.χ. η εύρεση της ισοδύναμης συζευκτικής ή διαζευκτικής κανονικής μορφής.

8.1 Το σύστημα Gentzen για τον προτασιακό λογισμό

Ορισμός 8.1 Ακολουθητικό *καλείται κάθε δυάδα* $\langle \Gamma, \Delta \rangle$*, όπου* Γ *και* Δ *είναι πεπερασμένες ακολουθίες προτασιακών τύπων.* $\Gamma = \langle \phi_1, \ldots, \phi_m \rangle$ *και* $\Delta = \langle \psi_1, \ldots, \psi_n \rangle$*.*

Τη δυάδα $\langle \Gamma, \Delta \rangle$ θα τη συμβολίζουμε με $\Gamma \vdash \Delta$. Επίσης αντί για $\langle \phi_1, \ldots, \phi_n \rangle$ θα γράφουμε απλώς $\phi_1, \ldots, \phi_n$. Έτσι λοιπόν η δυάδα $\Gamma \vdash \Delta$, δηλαδή το ακολουθητικό $\Gamma \vdash \Delta$, γράφεται και σαν $\phi_1, \ldots, \phi_m \vdash \psi_1, \ldots, \psi_n$. Σημειωτέον ότι μπορεί η Γ ή η Δ (ή και οι δύο) να είναι κενές ακολουθίες. Αντίστοιχα $m = 0$ ή $n = 0$. Έτσι μπορούμε να έχουμε ακολουθητικά $\vdash \Delta$ (όταν Γ κενή), $\Gamma \vdash$ (όταν Δ κενή) και $\vdash$ (αντιφατικό ακολουθητικό).

Ορισμός 8.2 *Λέμε ότι μία απονομή αλήθειας* V επαληθεύει *το ακολουθητικό* $\Gamma \vdash \Delta$ *όταν* $\overline{V}((\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \ldots \wedge \phi_m) \rightarrow (\psi_1 \vee \psi_2 \vee \ldots \vee \psi_n)) = \mathsf{T}$*. Δηλαδή* V *επαληθεύει το* $\Gamma \vdash \Delta$ *στην περίπτωση που όταν το* $\overline{V}(\phi) = \mathsf{T}$ *για όλα τα* $\phi \in \Gamma$ *τότε* υπάρχει $\psi \in \Delta$ *ώστε* $\overline{V}(\psi) = \mathsf{T}$*. Αν η* V *δεν επαληθεύει το* $\Gamma \vdash \Delta$

τότε λέμε ότι η V διαψεύδει *το $\Gamma \vdash \Delta$. Δηλαδή η V διαψεύδει το $\Gamma \vdash \Delta$ όταν για κάθε $\phi \in \Gamma$ έχουμε ότι $\overline{V}(\phi) = \mathsf{T}$ και για κάθε $\psi \in \Delta$ έχουμε ότι $\overline{V}(\psi) = \mathsf{F}$.*

Ορισμός 8.3 *Το $\Gamma \vdash \Delta$ λέγεται* έγκυρο *όταν κάθε απονομή αλήθειας το επαληθεύει.*

Είναι φανερό ότι αν ϕ τύπος τότε $\Gamma \vdash \phi$ είναι έγκυρο αν και μόνον αν $\Gamma \models \phi$. Άρα $\vdash \phi$ είναι έγκυρο στην περίπτωση που ο ϕ είναι ταυτολογία.

Επίσης ισχύουν:

- $\Gamma \vdash$ είναι έγκυρο $\Leftrightarrow$ Για κάθε απονομή V, έχω $\overline{V}(\phi) = \mathsf{F}$, για κάποιο $\phi \in \Gamma$.
- Δεν υπάρχει απονομή αλήθειας που να επαληθεύει το $\vdash$.

Θα προσπαθήσουμε να βρούμε έναν συστηματικό τρόπο για να συμπεραίνουμε αν ένα ακολουθητικό είναι έγκυρο ή όχι. Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι έχουμε το ακολουθητικό $(A \to B) \vdash (\neg B \to \neg A)$, όπου A και B προτασιακές μεταβλητές. Μία ιδέα, για να εξετάσουμε ότι το ακολουθητικό είναι έγκυρο, είναι να εξετάσουμε όλους τους δυνατούς τρόπους διάψευσής του. Αν αποτύχουμε, αυτό θα σημαίνει ότι το ακολουθητικό είναι έγκυρο. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι έχουμε διαψεύσει το $A \to B \vdash \neg B \to \neg A$. Αλλά μία διάψευση του $A \to B \vdash \neg B \to \neg A$ σημαίνει μία επαλήθευση του $A \to B$ και μία διάψευση του $\neg B \to \neg A$. Συγκεντρώνοντας την προσοχή μας στο $A \to B$ αυτό σημαίνει είτε μία επαλήθευση του B και μία διάψευση του $\neg B \to \neg A$ είτε μία διάψευση του A και μία διάψευση του $\neg B \to \neg A$. Αυτό με τη σειρά του σημαίνει ότι ένα από τα ακολουθητικά $B \vdash \neg B \to \neg A$ και $\vdash A, \neg B \to \neg A$ πρέπει να διαψεύδεται. Αυτό μπορούμε να το γράψουμε ως εξής:

$$\frac{\vdash A, \neg B \to \neg A \quad B \vdash \neg B \to \neg A}{A \to B \vdash \neg B \to \neg A}.$$

Η μορφή είναι η μορφή ενός κανόνα όπου το $A \to B \vdash \neg B \to \neg A$ είναι το *συμπέρασμα* και τα $\vdash A, \neg B \to \neg A$, $B \vdash \neg B \to \neg A$ είναι οι *υποθέσεις*. Η υπόθεση ότι το *συμπέρασμα* διαψεύδεται οδήγησε στο ότι *μία* τουλάχιστον από τις υποθέσεις πρέπει να διαψεύδεται. Αν συνεχίσουμε αυτόν το δρόμο της υποθετικής διάψευσης των «συμπερασμάτων» και της εύρεσης των ακολουθητικών που «πρέπει» να διαψεύδονται σύμφωνα με αυτήν την υποθετική διάψευση οδηγούμαστε σε αυτό που υπό μορφή δέντρου μπορεί να παρασταθεί ως εξής:

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\neg B, A \vdash A}{\neg B \vdash A, \neg A}}{\vdash A, \neg B \to \neg A} \qquad \dfrac{\dfrac{B \vdash B, \neg A}{\neg B, B \vdash \neg A}}{B \vdash \neg B \to \neg A} \quad \text{(μία πρέπει να διαψεύδεται)}}{A \to B \vdash \neg B \to \neg A \quad \text{(έστω ότι διαψεύδεται)}}$$

Αυτό σημαίνει ότι ακολουθώντας όλους τους δυνατούς δρόμους στους οποίους οδηγεί η διάψευση του $A \to B \vdash \neg B \to \neg A$ οδηγούμαστε στο ότι τα $\neg B, A \vdash A$ ή το $B \vdash B, \neg A$ πρέπει να διαψεύδονται. Πράγμα αδύνατο και για τα δύο. Άρα το $A \to B \vdash \neg B \to \neg A$ είναι έγκυρο· η ανωτέρω κατασκευή μπορεί να θεωρηθεί *απόδειξη* αυτού του γεγονότος.

Ορισμός 8.4 *Το σύστημα Gentzen* $\mathbb{G}$. *Τα σύμβολα* Γ, Δ, E *θα χρησιμοποιηθούν για να συμβολίζουν πεπερασμένες ακολουθίες (πιθανώς κενές) προτασιακών τύπων, και τα* ϕ, ψ *για να συμβολίζουν προτασιακούς τύπους.*
Αξιώματα: *Αξίωμα είναι κάθε ακολουθητικό* $\Gamma \vdash \Delta$ *για το οποίο υπάρχει* ϕ *ώστε* $\phi \in \Gamma$ *και* $\phi \in \Delta$, *δηλαδή οι* Γ *και* Δ *περιέχουν κοινό προτασιακό τύπο.* *Οι* Κανόνες Απαγωγής *του λογισμού των ακολουθητικών είναι οι εξής:*

$$\frac{\Gamma, \phi, \psi, \Delta \vdash E}{\Gamma, \phi \wedge \psi, \Delta \vdash E}\,(\wedge : \alpha) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \phi, E \quad \Gamma \vdash \Delta, \psi, E}{\Gamma \vdash \Delta, \phi \wedge \psi, E}\,(\wedge : \delta)$$

$$\frac{\Gamma, \phi, \Delta \vdash E \quad \Gamma, \psi, \Delta \vdash E}{\Gamma, \phi \vee \psi, \Delta \vdash E}\,(\vee : \alpha) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \phi, \psi, E}{\Gamma \vdash \Delta, \phi \vee \psi, E}\,(\vee : \delta)$$

$$\frac{\Gamma, \Delta \vdash \phi, E \quad \psi, \Gamma, \Delta \vdash E}{\Gamma, \phi \to \psi, \Delta \vdash E}\,(\to : \alpha) \qquad \frac{\phi, \Gamma \vdash \psi, \Delta, E}{\Gamma \vdash \Delta, \phi \to \psi, E}\,(\to : \delta)$$

$$\frac{\Gamma, \Delta \vdash \phi, E}{\Gamma, \neg\phi, \Delta \vdash E}\,(\neg : \alpha) \qquad \frac{\phi, \Gamma \vdash \Delta, E}{\Gamma \vdash \Delta, \neg\phi, E}\,(\neg : \delta)$$

Όπου $\wedge$:α σημαίνει $\wedge$: αριστερό, $\wedge$:δ σημαίνει $\wedge$: δεξιό κλπ. Όπως βλέπουμε οι κανόνες χωρίζονται σε δύο κατηγορίες, στους αριστερούς και στους δεξιούς κανόνες, ανάλογα με το αν ο προτασιακός τύπος στον οποίο εφαρμόζονται βρίσκεται στο αριστερό ή στο δεξιό μέρος του ακολουθητικού.

Κάθε κανόνας αποτελείται από το άνω και το κάτω μέρος. Το ακολουθητικό που βρίσκεται στο κάτω μέρος ονομάζεται *συμπέρασμα*, ενώ το ένα ή τα δύο ακολουθητικά (ανάλογα με τον κανόνα) που βρίσκονται στο άνω μέρος ονομάζονται *υποθέσεις*. Σε κάθε κανόνα ο προτασιακός τύπος στον οποίο εφαρμόζεται ο κανόνας ονομάζεται *κύριος* τύπος.

Π.χ. στον $\vee$: αριστερό κανόνα, το $\Gamma, \phi \vee \psi, \Delta \vdash E$ είναι το συμπέρασμα, τα $\Gamma, \phi, \Delta \vdash E$ και $\Gamma, \psi, \Delta \vdash E$ είναι οι υποθέσεις και ο $\phi \vee \psi$ είναι ο κύριος προτασιακός τύπος. Στον $\vee$: δεξιό το $\Gamma \vdash \Delta, \phi, \psi, E$ είναι η (μοναδική) υπόθεση.

Ορισμός 8.5 *Αν* σ, τ, υ *συμβολίζουν ακολουθητικά, τότε οι κανόνες έχουν την ακόλουθη μορφή:*

Α1. Αν ο κανόνας έχει δύο υποθέσεις, έχει τη μορφή $\dfrac{\sigma \quad \tau}{\upsilon}$ *όπου βέβαια τα σ, τ, υ θα πρέπει να έχουν τις πρέπουσες μορφές κανόνα δύο υποθέσεων του ορισμού 8.4.*

Α2. Αν ο κανόνας έχει μία υπόθεση, έχει τη μορφή $\dfrac{\sigma}{\tau}$ *όπου* σ, τ *έχουν την πρέπουσα μορφή κανόνα μιας υπόθεσης.*

Έχοντας υπόψη μας αυτά, δίνουμε τον επαγωγικό ορισμό του τι είναι απόδειξη Π *του ακολουθητικού* υ *ως εξής:*

Α1. Κάθε αξίωμα υ *είναι απόδειξη του ακολουθητικού* υ.

Α2. Αν Π *είναι απόδειξη του ακολουθητικού* σ *και* $\dfrac{\sigma}{\upsilon}$ *είναι κανόνας, τότε* $\dfrac{\Pi}{\upsilon}$ *είναι απόδειξη του ακολουθητικού* υ.

Α3. Αν Π_1 *είναι απόδειξη του* σ *και* Π_2 *απόδειξη του* τ *και* $\dfrac{\sigma \quad \tau}{\upsilon}$ *είναι κανόνας απαγωγής, τότε* $\dfrac{\Pi_1 \quad \Pi_2}{\upsilon}$ *είναι απόδειξη του ακολουθητικού* υ.

Π.χ. το κάτωθι δέντρο

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\psi, \phi \vdash \phi}{\neg\psi \vdash \neg\phi, \phi}}{\vdash \phi, (\neg\psi \to \neg\phi)} \qquad \dfrac{\dfrac{\psi \vdash \psi, \neg\phi}{\neg\psi, \psi \vdash \neg\phi}}{\psi \vdash (\neg\psi \to \neg\phi)}}{(\phi \to \psi) \vdash (\neg\psi \to \neg\phi)}}{\vdash (\phi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\phi)}$$

είναι μια απόδειξη του ακολουθητικού $\vdash (\phi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\phi)$.

Βλέπουμε ότι κάθε απόδειξη Π είναι ένα δέντρο στο οποίο η ρίζα του δέντρου είναι το ακολουθητικό σ του οποίου η Π είναι η απόδειξη, τα «φύλλα» του δέντρου είναι αξιώματα και οι διακλαδώσεις του δέντρου αντιστοιχούν σε εφαρμογές κάποιων κανόνων απαγωγής.

Ορισμός 8.6 *Αν στον ορισμό της έννοιας της απόδειξης 8.5 δεν απαιτήσουμε για τα φύλλα του δέντρου της απόδειξης να είναι αξιώματα, τότε παίρνουμε την έννοια του απαγωγικού δέντρου.* Το απαγωγικό δέντρο ορίζεται *με τον ίδιο ακριβώς επαγωγικό ορισμό, όπως και η απόδειξη, εκτός της συνθήκης 1, που τώρα διαβάζεται ως εξής:*

Α1. Κάθε ακολουθητικό υ *είναι ένα απαγωγικό δέντρο του* υ.

Τα 2 και 3 είναι τα ίδια, όπως και στον 8.5, όπου όμως έχουμε αντικαταστήσει τη λέξη απόδειξη με τη λέξη απαγωγικό δέντρο.

Είναι φανερό ότι κάθε απαγωγικό δέντρο που τα φύλλα του είναι αξιώματα είναι απόδειξη.
Π.χ. το κάτωθι δέντρο είναι απαγωγικό δέντρο.

$$\dfrac{\dfrac{B \vdash A}{\vdash B \to A} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash B}{A, \neg B \vdash}}{\neg B \vdash \neg A}}{\vdash \neg B \to \neg A}}{\vdash (B \to A) \wedge (\neg B \to \neg A)}$$

Λήμμα 8.7 *Για καθένα από τους κανόνες απαγωγής τού ορισμού 8.4, ισχύει: Μία απονομή αλήθειας V διαψεύδει το συμπέρασμα ενός κανόνα αν και μόνον αν η V διαψεύδει τουλάχιστον μία από τις υποθέσεις του.*
Ισοδυνάμως:
Μία απονομή αλήθειας V επαληθεύει το συμπέρασμα ενός κανόνα αν και μόνον αν επαληθεύει όλες τις υποθέσεις του.

Απόδειξη Πάρτε για παράδειγμα τον κανόνα $\wedge$: δεξιό. Η V διαψεύδει το $\Gamma \vdash \Delta, \phi \wedge \psi, E$ $\Leftrightarrow$ η V ικανοποιεί όλους τους τύπους του Γ και αν η V ικανοποιεί όλους του $\Delta \cup E$, τότε δεν ικανοποιεί τον $\phi \wedge \psi \Leftrightarrow$ η V ικανοποιεί όλους του Γ και αν η V ικανοποιεί όλους του $\Delta \cup E$, τότε δεν ικανοποιεί είτε τον ϕ είτε τον ψ $\Leftrightarrow$ είτε η V διαψεύδει το $\Gamma \vdash \Delta, \phi, E$ είτε η V διαψεύδει το $\Gamma \vdash \Delta, \psi, E$. □

Λήμμα 8.8 *Κανένα αξίωμα δεν είναι διαψεύσιμο. Ισοδύναμα, κάθε αξίωμα είναι ένα έγκυρο ακολουθητικό.*

Απόδειξη Επειδή το αξίωμα έχει τη μορφή $\Gamma, \phi \vdash \phi, \Delta$ για να το διαψεύσω πρέπει να βρω μία απονομή V ώστε η V να ικανοποιεί όλους τους τύπους του $\Gamma \cup \{\phi\}$ και να καθιστά ψευδείς τους $\Delta \cup \{\phi\}$. Πράγμα αδύνατο γιατί η πρώτη απαίτηση προϋποθέτει $\overline{V}(\phi) = \mathsf{T}$ ενώ η δεύτερη $\overline{V}(\phi) = \mathsf{F}$. □

Θα αποδείξουμε τώρα το θεώρημα της ορθότητας, δηλαδή το ότι στο σύστημα $\mathbb{G}$ αποδεικνύονται μόνον έγκυρα ακολουθητικά.

Θεώρημα 8.9 (Ορθότητας) *Αν το ακολουθητικό $\Gamma \vdash \Delta$ αποδεικνύεται στο σύστημα $\mathbb{G}$, υπάρχει δηλαδή απόδειξη του $\Gamma \vdash \Delta$, τότε το $\Gamma \vdash \Delta$ είναι έγκυρο.*

Απόδειξη Με επαγωγή στις αποδείξεις Π.

- Αν Π είναι αξίωμα, τότε το $\Gamma \vdash \Delta$ σαν αξίωμα θα είναι και έγκυρο από λήμμα 8.8.
- Αν Π έχει τη μορφή $\dfrac{\Pi'}{\Gamma \vdash \Delta}$ όπου Π' απόδειξη ενός ακολουθητικού που είναι η υπόθεση ενός κανόνα με μία υπόθεση και με συμπέρασμα το $\Gamma \vdash \Delta$, τότε λόγω της επαγωγικής υπόθεσης η υπόθεση του κανόνα θα είναι έγκυρη και λόγω του λήμματος 8.7 θα είναι έγκυρο και το συμπέρασμα $\Gamma \vdash \Delta$.

- Το ίδιο σκεπτικό, αν η Π έχει τη μορφή $\dfrac{\Pi_1 \quad \Pi_2}{\Gamma \vdash \Delta}$, όπου το $\Gamma \vdash \Delta$ είναι το συμπέρασμα κανόνα με δύο υποθέσεις. $\square$

Θα ασχοληθούμε τώρα με το πρόβλημα του να αποφασίζουμε αν ένα δοσμένο ακολουθητικό είναι έγκυρο ή όχι.

Ορισμός 8.10 Βαθμός *ενός ακολουθητικού* $\Gamma \vdash \Delta$ *είναι ο αριθμός των συμβόλων προτασιακών συνδέσμων που περιέχονται σε όλους τους τύπους του* $\Gamma \cup \Delta$. *Π.χ. το ακολουθητικό* $(A \to \neg B), \neg(A \wedge B) \vdash (B \to \neg A) \wedge B$ *έχει βαθμό 7. Το ακολουθητικό* $\Gamma \vdash \Delta$ *έχει βαθμό 0 μόνο στην περίπτωση που το σύνολο* $\Gamma \cup \Delta$ *είναι σύνολο προτασιακών μεταβλητών. Π.χ. το* $A_1, A_{10}, A_1 \vdash A_3, A_2$ *έχει βαθμό 0.*

Αν σε ένα ακολουθητικό $\Gamma \vdash \Delta$ θεωρήσουμε έναν προτασιακό τύπο ϕ του ακολουθητικού που δεν είναι προτασιακή μεταβλητή, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε έναν κανόνα του συστήματος $\mathbb{G}$ στον οποίο το $\Gamma \vdash \Delta$ είναι το συμπέρασμα και ο τύπος ϕ είναι ο κύριος τύπος του κανόνα. Αυτή η ενέργεια ονομάζεται *αποσυναρμολόγηση* του ϕ. Είναι φανερό ότι οι υποθέσεις αυτού του κανόνα έχουν βαθμό μικρότερο από τον βαθμό του $\Gamma \vdash \Delta$.

Αν ξεκινώντας από ένα ακολουθητικό $\Gamma \vdash \Delta$ αποσυναρμολογήσουμε έναν τύπο του, συνεχίζοντας αποσυναρμολογήσουμε κάποιον τύπο στις υποθέσεις του κανόνα (της αποσυναρμολόγησης) και συνεχίσουμε έτσι, επειδή κάθε φορά θα παίρνουμε ακολουθητικά με μικρότερο βαθμό θα καταλήξουμε σε κάποιες υποθέσεις με βαθμό 0. Αυτά θα είναι τα φύλλα του δέντρου (της αποσυναρμολόγησης) που έχουμε κατασκευάσει και το οποίο δέντρο θα είναι ένα απαγωγικό δέντρο του ακολουθητικού $\Gamma \vdash \Delta$.

Θεώρημα 8.11 (Θεώρημα πληρότητας για το σύστημα $\mathbb{G}$) *Αν το ακολουθητικό* $\Gamma \vdash \Delta$ *είναι έγκυρο, τότε υπάρχει απόδειξη του* $\Gamma \vdash \Delta$ *στο σύστημα* $\mathbb{G}$.

Απόδειξη Από το λήμμα 8.7 είναι φανερό ότι κάθε απονομή αλήθειας που διαψεύδει το φύλλο ενός απαγωγικού δέντρου ενός ακολουθητικού $\Gamma \vdash \Delta$, θα διαψεύδει και το $\Gamma \vdash \Delta$.

Έστω λοιπόν ότι δίνεται ένα έγκυρο ακολουθητικό $\Gamma \vdash \Delta$. Κατασκευάζουμε το απαγωγικό δέντρο του $\Gamma \vdash \Delta$ αποσυναρμολογώντας διάφορους τύπους του Γ, Δ. Τα φύλλα αυτού του δέντρου έχουν τη μορφή $A_1, \dots, A_\kappa \vdash B_1, \dots, B_\lambda$ όπου $A_1, \dots, A_\kappa, B_1, \dots, B_\lambda$ προτασιακές μεταβλητές. Θα πρέπει όλα τα φύλλα να είναι αξιώματα. Διότι αν το φύλλο $A_1, \dots, A_\kappa \vdash B_1, \dots, B_\lambda$ δεν είναι αξίωμα, τότε η απονομή V με $V(A_i) = \mathsf{T}$ $(1 \leq i \leq \kappa)$ και $V(B_i) = \mathsf{F}$ $(1 \leq i \leq \lambda)$ διαψεύδει αυτό το φύλλο, άρα θα διαψεύδει και τη ρίζα του απαγωγικού δέντρου $\Gamma \vdash \Delta$, πράγμα που θα αντέκρουε την υπόθεση ότι $\Gamma \vdash \Delta$ είναι έγκυρο. Άρα λοιπόν όλα τα φύλλα του απαγωγικού δέντρου είναι αξιώματα, πράγμα που σημαίνει ότι το δέντρο αυτό είναι μια απόδειξη του $\Gamma \vdash \Delta$ στο $\mathbb{G}$. $\square$

8.2 Συζευκτική και διαζευκτική κανονική μορφή

Ένας προτασιακός τύπος είναι σε *συζευκτική κανονική* μορφή όταν είναι μία συζευξη $\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \cdots \wedge \phi_m$ από διαζεύξεις $\phi_i \equiv B_{i,1} \vee \cdots \vee B_{i,n_i}$ όπου κάθε $B_{i,j}$ είναι είτε μία προτασιακή μεταβλητή A είτε η άρνηση μιας προτασιακής μεταβλητής. Είναι σε *διαζευκτική κανονική* μορφή όταν είναι μία διάζευξη $\phi_1 \vee \cdots \vee \phi_m$ συζεύξεων $\phi_i \equiv B_{i,1} \wedge \cdots \wedge B_{i,n_i}$ με $B_{i,j}$ είτε μία προτασιακή μεταβλητή είτε η άρνηση μιας προτασιακής μεταβλητής.

Θεώρημα 8.12 *Για κάθε προτασιακό τύπο ϕ υπάρχει ένας προτασιακός τύπος ψ σε συζευκτική κανονική μορφή ώστε $\phi \models\dashv \psi$. Επίσης ένας τύπος θ σε διαζευκτική κανονική μορφή ώστε $\phi \models\dashv \theta$.*

Απόδειξη Κατασκευάζουμε το απαγωγικό δέντρο του ακολουθητικού $\vdash \phi$ αποσυναρμολογώντας σταδιακά τον ϕ. Παίρνουμε τα φύλλα $A_1, \ldots, A_\kappa \vdash A'_1, \cdots A'_\lambda$ που δεν είναι αξιώματα. (Αν όλα είναι αξιώματα, τότε ϕ είναι ταυτολογία και άρα μια ισοδύναμη συζευκτική μορφή είναι $A \vee \neg A$.) Για το καθένα από αυτά έστω $\psi \equiv \neg A_1 \vee \cdots \vee \neg A_\kappa \vee A'_1 \vee \cdots \vee A'_\lambda$. Σχηματίζουμε δε τη σύζευξη όλων αυτών των ψ. Επειδή κάθε απονομή V που επαληθεύει όλα τα φύλλα επαληθεύει το $\vdash \phi$ και αντιστρόφως κάθε απονομή που επαληθεύει το $\vdash \phi$ επαληθεύει όλα τα φύλλα, προκύπτει ότι η σύζευξη που σχηματίσαμε είναι ταυτολογικά ισοδύναμη με τον ϕ.

Για να βρούμε την ισοδύναμη διαζευκτική κανονική μορφή σχηματίζουμε το απαγωγικό δέντρο του $\phi \vdash$. $\square$

8.3 Ασκήσεις

1. Δώστε αποδείξεις στο σύστημα Gentzen για τις παρακάτω ταυτολογίες:

$$A \to (A \to B)$$
$$(A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$$
$$A \to (B \to (A \wedge B))$$
$$A \to (A \vee B) \qquad B \to (A \vee B)$$
$$(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$$
$$(A \wedge B) \to A \qquad (A \wedge B) \to B$$
$$(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$$
$$\neg\neg A \to A$$

2. Χρησιμοποιώντας απαγωγικά δέντρα, δώστε προτασιακούς τύπους σε συζευκτική και διαζευκτική μορφή που να είναι ισοδύναμοι με τους παρακάτω:

$$(\neg P \to Q) \to (\neg R \to S)$$
$$(\neg P \to Q) \to (\neg \to S)$$
$$(A \to C) \to ((B \to D) \to ((A \vee B) \to C))$$
$$(A \to B) \to ((B \to \neg C) \to \neg A)$$

3. Αποδείξτε, χωρίς τη χρήση του θεωρήματος πληρότητας για το σύστημα Gentzen, ότι το ακολουθητικό $\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \psi_1, \ldots, \psi_n$ αποδεικνύεται στο σύστημα Gentzen αν και μόνον αν ο προτασιακός τύπος $\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n \to \psi_1 \vee \cdots \vee \psi_n$ αποδεικνύεται στο σύστημα, τύπου Hilbert, του προτασιακού λογισμού. Συμπεράνατε ότι το θεώρημα πληρότητας ισχύει για το σύστημα Gentzen, χρησιμοποιώντας το θεώρημα πληρότητας του συστήματος Hilbert.

Για την απόδειξη θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε τον κανόνα τομής

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \phi \quad \Gamma', \phi \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'} \,(\text{τομή}).$$

δηλαδή να υποθέσετε ότι στους κανόνες του συστήματος Gentzen συμπεριλαμβάνεται και αυτός ο κανόνας. Βέβαια, από την πληρότητα του συστήματος Gentzen, συμπεραίνεται ότι ο κανόνας αυτός είναι πλεονάζων.

Βιβλιογραφία κεφαλαίου 8

E1, E2, Ξ3, Ξ4, Ξ7, Ξ9, Ξ10.

(Οι αναφορές παραπέμπουν στη βιβλιογραφία στο τέλος του βιβλίου)

9 Συστήματα Tableaux

9.1 Το σύστημα Gentzen και το θεώρημα πληρότητας

Ήδη στο πρώτο μέρος των σημειώσεων (σελ. 64), αναπτύξαμε ένα αποδεικτικό σύστημα για τον πρωτοβάθμιο κατηγορηματικό λογισμό. Τα συστήματα αυτού του τύπου ονομάζονται αξιωματικά συστήματα τύπου Hilbert. Στο παρόν κεφάλαιο θα ορίσουμε ένα σύστημα τύπου Gentzen για τον κατηγορηματικό λογισμό και θα αποδείξουμε την πληρότητά του.

9.1.1 Αξιωματικό σύστημα Gentzen για τον κατηγορηματικό λογισμό

Στους κανόνες και τα αξιώματα της σελ. 121 που αναφέρονται στη χρήση των προτασιακών συνδέσμων προσθέτουμε τους εξής κανόνες που αναφέρονται στους ποσοδείκτες:

$$\frac{\Gamma, \phi(x/t), \Delta \vdash E}{\Gamma, \forall x\phi, \Delta \vdash E}\,(\forall : \text{αριστερό}) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \phi(x), E}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x\phi, E}\,(\forall : \text{δεξιό})$$

$$\frac{\Gamma, \phi(x), \Delta \vdash E}{\Gamma, \exists x\phi, \Delta \vdash E}\,(\exists : \text{αριστερό}) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \phi(x/t), E}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\phi, E}\,(\exists : \text{δεξιό})$$

Περιορισμός: Στους κανόνες $\forall$: δεξιό και $\exists$: αριστερό η μεταβλητή x δεν έχει ελεύθερη εγγραφή σε κανέναν τύπο του συμπεράσματος.

Εδώ βέβαια υποθέτουμε ότι τα ακολουθητικά σχηματίζονται από τύπους της γλώσσας. Το $\phi(t/x)$ είναι το αποτέλεσμα της αντικατάστασης του όρου t σε κάθε ελεύθερη εγγραφή της x στον ϕ, όταν βέβαια η x είναι αντικαταστάσιμη από τον t στον ϕ.

Το ακολουθητικό $\Gamma \vdash \Delta$ είναι *έγκυρο* όταν για κάθε ερμηνεία της γλώσσας $\mathcal{A}$ και κάθε απονομή s : {μεταβλητές} $\to |\mathcal{A}|$ έχουμε ότι αν για κάθε $\phi \in \Gamma$, $\models_{\mathcal{A}} \phi[s]$, τότε υπάρχει $\psi \in \Delta$ ώστε $\models_{\mathcal{A}} \psi[s]$.

Τομή: Στο ανωτέρω σύστημα Gentzen μπορούμε να προσθέσουμε τον λεγόμενο κανόνα της τομής:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \phi \quad \Gamma', \phi \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\,(\text{τομή}).$$

Ο κανόνας αυτός τότε «πλεονάζει», με την έννοια ότι κάθε απόδειξη ενός ακολουθητικού στο σύστημα Gentzen με πιθανές εφαρμογές του κανόνα της τομής μπορεί να μετατραπεί σε απόδειξη του ίδιου του ακολουθητικού χωρίς καμία χρήση του κανόνα της τομής.

Ορισμός 9.1 *Ο υποτύπος (κατά Gentzen) ενός τύπου ορίζεται επαγωγικά ως ακολούθως: έστω ϕ ένας τύπος.*

i) Αν ο ϕ είναι ατομικός τύπος, τότε ο μόνος υποτύπος του ϕ είναι το ϕ.

ii) *Αν ο ϕ είναι $\psi_1 \wedge \psi_2$, $\psi_1 \vee \psi_2$, $\psi_1 \to \psi_2$, τότε οι υποτύποι του ϕ είναι ο ϕ και οι τύποι που είναι υποτύποι του ψ_1 ή του ψ_2.*

iii) *Αν ο ϕ είναι $\neg\psi$ τότε οι υποτύποι του ϕ είναι ο ϕ και οι υποτύποι του ψ.*

iv) *Αν ο ϕ είναι $\forall x\phi(x)$ ή $\exists x\phi(x)$, τότε οι υποτύποι του ϕ είναι ο ϕ και οι υποτύποι του $\psi(t)$, για κάποιο όρο t.*

Θεώρημα 9.2 *Αν έχουμε μια απόδειξη χωρίς τομές ενός ακολουθητικού $\Gamma \vdash \Delta$, τότε κάθε ακολουθητικό που απαντάται στην απόδειξη είναι φτιαγμένο με υποτύπους τύπων του $\Gamma \vdash \Delta$ δηλαδή αν $\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \psi_1, \ldots \psi_k$ βρίσκεται στην απόδειξη, τότε κάθε ϕ_i και ψ_j θα είναι υποτύπος κάποιου τύπου του ακολουθητικού $\Gamma \vdash \Delta$.*

Απόδειξη Άμεση κοιτώντας τους κανόνες απαγωγής. □

Παρατήρηση: Όταν ο κανόνας της τομής είναι παρών, τότε η ανωτέρω ιδιότητα δεν ισχύει (η λεγόμενη ιδιότητα του υποτύπου) διότι π.χ. ο τύπος ϕ στον κανόνα δεν είναι υποτύπος κανενός τύπου του $\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'$.

Παράδειγμα: Αν στη γλώσσα $\mathcal{L}$ έχω P, Q σύμβολα κατηγορημάτων μιας θέσεως και f σύμβολο συνάρτησης μιας θέσεως, τότε έχω την κάτωθι απόδειξη στο σύστημα Gentzen.

$$
\dfrac{\dfrac{P(f(y)), \exists xQ(x) \vdash P(f(y)) \qquad \dfrac{\dfrac{P(f(y)), Q(x) \vdash Q(x)}{P(f(y)), Q(x) \vdash \exists yQ(y)}}{P(f(y)), \exists xQ(x) \vdash \exists yQ(y)}}{\dfrac{P(f(y)), \exists xQ(x) \vdash P(f(y)) \wedge \exists yQ(y)}{\dfrac{\forall zP(z), \exists xQ(x) \vdash P(f(y)) \wedge \exists yQ(y)}{\forall zP(z) \wedge \exists xQ(x) \vdash P(f(y)) \wedge \exists yQ(y)}}}}{\vdash (\forall zP(z) \wedge \exists xQ(x)) \to (P(f(y)) \wedge \exists yQ(y))}
$$

Επαληθεύστε την ιδιότητα του υποτύπου.

9.1.2 Σημαντικά (σημασιολογικά) Tableaux

Ορισμός 9.3 *Σε κάθε πρωτοβάθμια κατηγορηματική γλώσσα $\mathcal{L}$ θα ονομάζουμε προσημασμένο τύπο κάθε τύπο της γλώσσας στον οποίο έχουμε βάλει μπροστά το πρόσημο $+$ ή $-$. Δηλαδή οι προσημασμένοι τύποι έχουν τη μορφή $+\phi$ ή $-\phi$ όπου ϕ είναι τύπος της $\mathcal{L}$.*

Ορισμός 9.4 *Αν $\mathcal{A}$ ερμηνεία της $\mathcal{L}$ και s αποτίμηση, τότε*

$\models_{\mathcal{A}} +\phi[s]$ *αν* $\models_{\mathcal{A}} \phi[s]$
και $\models_{\mathcal{A}} -\phi[s]$ *αν* $\not\models_{\mathcal{A}} \phi[s]$

Αν Λ *είναι σύνολο προσημασμένων τύπων, τότε το* Λ *είναι έγκυρο αν για όλες τις* $\mathcal{A}$*, όλες τις* s *έχουμε ότι υπάρχει* $\lambda \in \Lambda$ *ώστε* $\models_{\mathcal{A}} \lambda[s]$.
Το Λ *είναι ικανοποιήσιμο αν για κάποια* $\mathcal{A}$*, κάποια* s *έχουμε ότι για κάθε* $\lambda \in \Lambda$, $\models_{\mathcal{A}} \lambda[s]$. *Τότε:*

$\Gamma \vdash \Delta$ *έγκυρο αν και μόνον αν* $-\Gamma, +\Delta$ *είναι έγκυρο*
αν και μόνον αν $+\Gamma, -\Delta$ *όχι ικανοποιήσιμο.*

Κανόνες Tableaux

$$\frac{-(\phi \to \psi)}{+\phi} \quad \frac{-(\phi \to \psi)}{-\psi} \quad \frac{+(\phi \to \psi)}{-\phi \mid +\psi}$$

$$\frac{+(\phi \wedge \psi)}{+\phi} \quad \frac{+(\phi \wedge \psi)}{+\psi} \quad \frac{-(\phi \wedge \psi)}{-\phi \mid -\psi}$$

$$\frac{-(\phi \vee \psi)}{-\phi} \quad \frac{-(\phi \vee \psi)}{-\psi} \quad \frac{+(\phi \vee \psi)}{+\phi \mid +\psi}$$

$$\frac{+(\neg\phi)}{-\phi} \quad \frac{-(\neg\phi)}{+\phi}$$

$$\begin{array}{c} +\phi \\ -\phi \\ \hline\hline \end{array} \quad \frac{+\forall x \phi(x)}{+\phi(t)} \quad \frac{-\forall x \phi(x)}{-\phi(x)} \text{ (x καινούργια μεταβλητή)}$$

$$\frac{-\exists x \phi(x)}{-\phi(t)} \quad \frac{+\exists x \phi(x)}{+\phi(x)} \text{ (x καινούργια μεταβλητή)}$$

Ορισμός 9.5 *Σημαντικό* Tableau *για το* $\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ *σύνολο προσημασμένων τύπων είναι ένα δέντρο που αναπτύσσεται προς τα κάτω σύμφωνα με τους ακόλουθους κανόνες:*

i) $\begin{array}{c} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \hline \end{array}$ *είναι ένα tableau για το* Λ.

ii) Αν έχουμε κατασκευάσει ήδη ένα tableau για το Λ *και σε ένα του κλαδί υπάρχει ένας προσημασμένος τύπος* σ *που είναι άνω μέλος ενός κανόνα tableau της μορφής* $\frac{\sigma}{\tau}$ *τότε αν επεκτείνουμε αυτό το κλαδί βάζοντας στο τέλος το* τ*, το αποτέλεσμα θα είναι ένα tableau για το* Λ.

Π.χ.: Αν ένα κλαδί έχει τη μορφή $\begin{array}{c}\vdots\\ +(\phi\wedge\psi)\\ \vdots\end{array}$ *τότε επεκτείνω το κλαδί*

και παίρνω $\begin{array}{c}\vdots\\ +(\phi\wedge\psi)\\ \vdots\\ +\phi\end{array}$ *ή* $\begin{array}{c}\vdots\\ +(\phi\wedge\psi)\\ \vdots\\ +\psi\end{array}$.

Στις εφαρμογές των κανόνων που υπάρχει η παρένθεση (x καινούργια μεταβλητή) *πρέπει να είμαστε προσεκτικοί. Αν π.χ. υπάρχει ένα κλαδί* $\begin{array}{c}\vdots\\ -\forall x\phi(x)\\ \vdots\end{array}$, *τότε μπορώ να επεκτείνω το κλαδί βάζοντας στο τέλος την* $-\phi(x)$ *μόνον αν η μεταβλητή* x *δεν συναντάται (ελεύθερη) στο κλαδί πριν την τοποθέτηση του* $-\phi(x)$. *Δηλαδή αν έχω το κλαδί* $\begin{array}{c}\vdots\\ -\forall x\phi(x)\\ \vdots\end{array}$, *όπου* x *δεν υπάρχει μέχρι τότε στο δέντρο, τότε επεκτείνουμε το κλαδί στο* $\begin{array}{c}\vdots\\ -\forall x\phi(x)\\ \vdots\\ -\phi(x)\end{array}$.

iii) Αν έχουμε κατασκευάσει ήδη ένα tableau για το Λ *και σ' ένα κλαδί υπάρχει ένας προσημασμένος τύπος* σ *που είναι το άνω μέρος ενός κανόνα tableau της μορφής* $\dfrac{\sigma}{\tau_1 \mid \tau_2}$ *τότε αν επεκτείνουμε το κλαδί αυτό φτιάχνοντας δύο διακλαδώσεις στο τέλος, τοποθετώντας τα* τ_1 *και* τ_2 *(αριστερά το ένα, δεξιά το άλλο), η επέκταση αυτή θα είναι tableau για το* Λ.

Π.χ.: Αν ένα κλαδί έχει τη μορφή $\begin{array}{c}\vdots\\ +(\phi\vee\psi)\\ \vdots\end{array}$, *τότε το επεκτείνουμε στο*

$$\begin{array}{c}\vdots\\ +(\phi\vee\psi)\\ \vdots\\ \diagup\quad\diagdown\\ +\phi\qquad +\psi\end{array}.$$

Ορισμός 9.6 *Το κλαδί ενός tableau είναι κλειστό αν σ' αυτό βρίσκονται αμφότερα τα $+\phi$ και $-\phi$ για κάποιον τύπο ϕ. Το tableau είναι κλειστό αν όλα τα κλαδιά του είναι κλειστά (ο κανόνας $\dfrac{\begin{array}{c}+\phi\\ -\phi\end{array}}{=\!=}$ έχει την έννοια ότι τότε «κλείνουμε» το κλαδί ενός tableau).*

Λήμμα 9.7 *Το ακολουθητικό $\Gamma \vdash \Delta$ έχει μία απόδειξη χωρίς τομές στο σύστημα Gentzen αν και μόνον αν το $+\Gamma, -\Delta$ έχει ένα κλειστό tableau, δηλαδή υπάρχει σημαντικό tableau για το σύνολο $\Gamma \vdash \Delta$ που είναι κλειστό. [$+\Gamma = \{+\phi | \phi \in \Gamma\}$, $-\Delta = \{-\phi | \phi \in \Delta\}$ και $+\Gamma, -\Delta = +\Gamma \cup -\Delta$.]*

Απόδειξη Άσκηση. $\square$

Ορισμός 9.8 *Ένα σύνολο Λ προσημασμένων τύπων λέγεται σύνολο* Hintikka *αν ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:*

i) *Για κανέναν ατομικό τύπο R δεν ισχύει ότι αμφότερα $+R \in \Lambda$ και $-R \in \Lambda$.*

ii) *Το σύνολο Λ είναι κλειστό για τους κανόνες tableau: δηλαδή αν*

$$\begin{array}{rcl}
-(\phi \to \psi) \in \Lambda & \Longrightarrow & +\phi \in \Lambda \textit{ και } -\psi \in \Lambda \\
+(\phi \to \psi) \in \Lambda & \Longrightarrow & -\phi \in \Lambda \textit{ ή } +\psi \in \Lambda \\
+(\phi \wedge \psi) \in \Lambda & \Longrightarrow & +\phi \in \Lambda \textit{ και } +\psi \in \Lambda \\
-(\phi \wedge \psi) \in \Lambda & \Longrightarrow & -\phi \in \Lambda \textit{ ή } -\psi \in \Lambda \\
-(\phi \vee \psi) \in \Lambda & \Longrightarrow & -\phi \in \Lambda \textit{ και } -\psi \in \Lambda \\
+(\phi \vee \psi) \in \Lambda & \Longrightarrow & +\phi \in \Lambda \textit{ ή } +\psi \in \Lambda \\
+(\neg\phi) \in \Lambda & \Longrightarrow & -\phi \in \Lambda \\
-(\neg\phi) \in \Lambda & \Longrightarrow & +\phi \in \Lambda \\
+\forall x \phi(x) \in \Lambda & \Longrightarrow & +\phi(t) \in \Lambda \textit{ για όλους τους όρους } t \\
-\forall x \phi(x) \in \Lambda & \Longrightarrow & -\phi(x) \in \Lambda \textit{ για κάποια μεταβλητή } x \\
-\exists x \phi(x) \in \Lambda & \Longrightarrow & -\phi(t) \in \Lambda \textit{ για όλους τους όρους } t \\
+\exists x \phi(x) \in \Lambda & \Longrightarrow & +\phi(x) \in \Lambda \textit{ για κάποια μεταβλητή } x
\end{array}$$

Θεώρημα 9.9 *Αν Λ είναι σύνολο Hintikka, τότε το Λ είναι ικανοποιήσιμο, δηλαδή υπάρχει $\mathcal{A}$ και s ώστε $\models_{\mathcal{A}} \lambda[s]$ για κάθε $\lambda \in \Lambda$.*

Απόδειξη Ορίζω μία ερμηνεία $\mathcal{A}$ της $\mathcal{L}$ ως ακολούθως:
$|\mathcal{A}| =$ το σύνολο των όρων
$c^{\mathcal{A}} = c$
$f^{\mathcal{A}}(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n)$
$R^{\mathcal{A}}(t_1, \ldots, t_n) \Leftrightarrow +R(t_1, \ldots, t_n) \in \Lambda$

Έστω $\phi \equiv \phi(x_1, \ldots, x_n)$.

Ισχυρισμός: $\left.\begin{array}{r} +\phi \in \Lambda \Rightarrow \models_{\mathcal{A}} \phi(s) \\ -\phi \in \Lambda \Rightarrow \not\models_{\mathcal{A}} \phi(s) \end{array}\right\}$ όπου η s ορίζεται ως $s(x_i) = x_i$.

Η απόδειξη του ισχυρισμού γίνεται με επαγωγή στον τύπο ϕ, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του συνόλου Hintikka.
Π.χ. αν $\phi \equiv \forall x \psi(x)$,

$$\begin{aligned} +\forall x \psi(x) \in \Lambda &\Longrightarrow \psi(t) \in \Lambda \text{ για όλους τους } t \\ &\Longrightarrow \models_{\mathcal{A}} \psi(t)[s] \text{ για όλους τους } t \\ &\Longrightarrow \models_{\mathcal{A}} \psi(x)[s(x/t)] \text{ για όλους τους } t \\ &\Longrightarrow \models_{\mathcal{A}} \forall x \psi(x)[s]. \end{aligned}$$

□

Ορισμός 9.10 *Ένα* Γενικό Tableau *είναι ένα (πιθανώς) άπειρο δέντρο από τύπους που τοπικά είναι πάντα ένα tableau. Δηλαδή ένα συνηθισμένο tableau που η κατασκευή του δεν έχει τελειώσει αλλά συνεχίζεται επ' άπειρον. Ένας τύπος στο tableau είναι ζωντανός αν δεν έχει χρησιμοποιηθεί σαν το πάνω μέρος ενός tableau κανόνα. Ειδικά για τους τύπους $+\forall x \phi(x)$ και $-\exists x \phi(x)$, αυτοί είναι ζωντανοί όταν υπάρχει όρος t ώστε ο κανόνας $\dfrac{+\forall x \phi(x)}{+\phi(t)}$ δεν έχει χρησιμοποιηθεί (για τον πρώτο) και ο κανόνας $\dfrac{-\exists x \phi(x)}{-\phi(t)}$ δεν έχει χρησιμοποιηθεί (για τον δεύτερο). Ένα Γενικό tableau είναι πλήρες αν δεν έχει τύπους που είναι ζωντανοί.*

Λήμμα 9.11 *Αν J είναι ένα κλειστό γενικό tableau για το σύνολο Λ, τότε ένα άνω μέρος του είναι ένα κλειστό σημαντικό tableau J' για το σύνολο Λ.*

Απόδειξη Από τη στιγμή που κλείνει το J, παίρνουμε και αφαιρούμε το υπόλοιπο, πιθανώς άπειρο στο μήκος, κλαδί. Αυτό που μένει είναι ένα κλειστό tableau. □

Θεώρημα 9.12 *Αν το σύνολο Λ έχει ένα πλήρες μη κλειστό tableau, τότε το Λ είναι ικανοποιήσιμο.*

Απόδειξη Έστω Λ' το σύνολο των τύπων του κλαδιού που δεν έχει κλείσει. Τότε $\Lambda \subseteq \Lambda'$ και το Λ' είναι ένα σύνολο Hintikka. (Γιατί;) Αλλά τότε το Λ' είναι ικανοποιήσιμο και κατά μείζονα λόγο είναι ικανοποιήσιμο και το Λ. □

Θεώρημα 9.13 *Κάθε πεπερασμένο σύνολο Λ έχει ένα πλήρες (γενικό) tableau.*

Απόδειξη Με συστηματικό τρόπο αρχίζοντας από το Λ, «σκοτώνουμε» κάθε τύπο που θα παρουσιαστεί. (Μπορείτε να ορίσετε αυτόν τον τρόπο;) Το αποτέλεσμα, σαν επ' άπειρον πιθανόν διαδικασία, θα είναι ένα πλήρες γενικό tableau. □

Θεώρημα 9.14 (πληρότητας) *Αν το ακολουθητικό $\Gamma \vdash \Delta$ είναι έγκυρο, τότε υπάρχει μια απόδειξη του $\Gamma \vdash \Delta$ στο σύστημα Gentzen.*

Απόδειξη Επειδή το $\Gamma \vdash \Delta$ είναι έγκυρο, το σύνολο $+\Gamma, -\Delta$ δεν είναι ικανοποιήσιμο. Κατασκευάζω (σύμφωνα με 9.13) το πλήρες γενικό tableau του $+\Gamma, -\Delta$. Αυτό πρέπει να είναι κλειστό. Διότι αλλιώς σύμφωνα με το 9.12 το $+\Gamma, -\Delta$ θα ήταν ικανοποιήσιμο. Αλλά από το πλήρες γενικό tableau του $+\Gamma, -\Delta$ παίρνουμε σύμφωνα με το 9.11 ένα κλειστό σύνηθες tableau για το $+\Gamma, -\Delta$. Αλλά ξέρουμε ότι, Λήμμα 9.7, τότε υπάρχει μία απόδειξη του $\Gamma \vdash \Delta$ στο σύστημα Gentzen. □

Θεώρημα 9.15 (ορθότητας) *Αν το $\Gamma \vdash \Delta$ αποδεικνύεται στο σύστημα Gentzen, τότε το $\Gamma \vdash \Delta$ είναι έγκυρο.*

Απόδειξη Με επαγωγή στο πλήθος των εφαρμογών κανόνων. □

Θεώρημα 9.16 (Απαλοιφή των τομών) *Αν το $\Gamma \vdash \Delta$ αποδεικνύεται στο σύστημα Gentzen με τομές, τότε αποδεικνύεται στο σύστημα Gentzen χωρίς τομές.*

Απόδειξη Αν ισχύει η υπόθεση το $\Gamma \vdash \Delta$ είναι έγκυρο (αρκεί να παρατηρήσουμε ότι ο κανόνας της τομής διατηρεί την εγκυρότητα). Αλλά τότε σύμφωνα με το θεώρημα της πληρότητας αποδεικνύεται στο σύστημα Gentzen χωρίς τομές. □

Άσκηση θεωρήματος 9.14:

Έστω Λ ένα πεπερασμένο σύνολο προσημασμένων τύπων. Θα ορίσουμε μία γενική μέθοδο κατασκευής ενός πλήρους γενικού tableau για το Λ.

Κανόνες: [Θα περιοριστούμε για ευκολία στον σύνδεσμο $\rightarrow$ και στον ποσοδείκτη $\forall$. Οι υπόλοιποι κατ' αναλογία.]

i) $\dfrac{\Lambda, \lambda}{\lambda, \Lambda}$ αν λ ατομικός τύπος.

ii) $-\phi, +(\phi \to \psi), \overbrace{\Lambda \quad}^{\Lambda, +(\phi \to \psi)} + \psi, +(\phi \to \psi), \Lambda$ προσπάθησε να «σκοτώσεις» τον τύπο στο δεξιό μέρος.

iii) $\dfrac{\Lambda, -(\phi \to \psi)}{+\phi, -\psi, -(\phi \to \psi), \Lambda}$

iv) $\dfrac{\Lambda, +\forall x \phi(x)}{+\phi(t), +\forall x \phi(x), \Lambda}$ όπου t είναι ο πρώτος όρος, στην αρίθμηση όλων των αριθμήσιμων όρων, που δεν απαντάται στο Λ.

Αν αρχίσουμε από το σύνολο Λ και εφαρμόσουμε αυτούς τους κανόνες σχηματίζουμε ένα (άπειρο) δέντρο, μοναδικό. Διότι κατασκευάζουμε με μοναδικό τρόπο τα συμπεράσματα με βάση την υπόθεση του κανόνα. Έστω J το δέντρο που παίρνουμε. Θεωρώ το δέντρο J_0 που σχηματίζεται αν θεωρήσω σε κάθε κόμβο $\mathcal{E}$ του J τον πρώτο τύπο του $\mathcal{E}$ εκτός από:

A1. Η πρώτη ακολουθία $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ αντικαθίσταται από $\begin{matrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{matrix}$.

A2. Παραλείπω το λ, Λ στο $\dfrac{\Lambda, \lambda}{\lambda, \Lambda}$ όταν το λ είναι ατομικός τύπος.

A3. Στο $\dfrac{\Lambda, -(\phi \to \psi)}{+\phi, -\psi, -(\phi \to \psi), \Lambda}$ αντικαθιστώ με $\begin{matrix}+\phi\\ -\psi\end{matrix}$.

Τότε το J_0 είναι ένα γενικό tableau για το Λ. Θα δείξω ότι είναι και πλήρες.

Αν $\begin{matrix}\sigma_0\\ \sigma_1\\ \vdots\end{matrix}$ είναι κλάδος του J_0.

Έστω $\begin{matrix}\Sigma_0\\ \Sigma_1\\ \vdots\end{matrix}$ ο αντίστοιχος κλάδος του J.

Έστω Σ είναι το σύνολο $\{\sigma_0, \sigma_1, \ldots\}$.

Λήμμα 9.17 *Αν $\sigma \in \Sigma$, τότε σ είναι το τελευταίο στοιχείο των Σ_n για απείρως πολλά n, άρα ο κανόνας $\dfrac{\Lambda, +\forall x \phi(x)}{+\phi(t), +\forall x \phi(x), \Lambda}$ μπορεί να εφαρμοστεί άπειρες το πλήθος φορές.*

Απόδειξη Δοθέντος n, επειδή $\sigma \in \Sigma$, το σ βρίσκεται σε κάποιο Σ_k. Άρα σ βρίσκεται στα $\Sigma_{k'}$ για όλα τα $k' \geq k$. Διάλεξε $k' \geq n$. Αν σ είναι το τελευταίο του $\Sigma_{k'}$ είμαστε εντάξει. Αλλιώς αν σ είναι το r κατά σειρά στοιχείο του $\Sigma_{k'}$

από τα δεξιά, τότε σ είναι το τελευταίο στοιχείο του $\Sigma_{k'+r-1}$ (δηλαδή μετά από $r-1$ βήματα έρχεται στο τέλος). $\square$

Μετά από το λήμμα η πληρότητα είναι καθαρή.

Π.χ. έστω ότι ο $-(\phi \to \psi)$ απαντάται στο $\begin{matrix}\sigma_0\\ \sigma_1\\ \vdots\end{matrix}$ τότε λόγω λήμματος υπάρχει n ώστε Σ_n έχει τη μορφή $\Lambda, -(\phi \to \psi)$, άρα Σ_{n+1} είναι $+\phi, -\psi, -(\phi \to \psi), \Lambda$ άρα $+\phi, -\psi$ συναντώνται στο $\begin{matrix}\sigma_0\\ \sigma_1\\ \vdots\end{matrix}$ άρα $-(\phi \to \psi)$ δεν είναι ζωντανό.

Αν π.χ. $+\forall x\phi(x)$ είναι ζωντανό στο $\begin{matrix}\sigma_0\\ \sigma_1\\ \vdots\end{matrix}$. Τότε υπάρχει ένας ελάχιστος στη διάταξη όρος t ώστε ο κανόνας $\dfrac{+\forall x\phi(x)}{+\phi(t)}$ δεν έχει χρησιμοποιηθεί διότι μπορούμε να διαλέξουμε από το λήμμα ένα Σ_n που τελειώνει με $+\forall x\phi(x)$ έτσι ώστε αν $t_0, \ldots, t_n$ είναι η λίστα των όρων που έρχονται πριν από τον t, τα $+\phi(t_0), \ldots, +\phi(t_n)$ απαντώνται στο Σ_n. Τότε Σ_{n+1} πρέπει να αρχίζει με $+\phi(t)$, άρα ο $\dfrac{+\forall x\phi(x)}{+\phi(t)}$ έχει χρησιμοποιηθεί στο $\begin{matrix}\sigma_0\\ \sigma_1\\ \vdots\end{matrix}$, αντιφάσκοντας με τον ορισμό του t.

Βιβλιογραφία κεφαλαίου 9

Ε2, Ξ3, Ξ4, Ξ7, Ξ9, Ξ10.

(Οι αναφορές παραπέμπουν στη βιβλιογραφία στο τέλος του βιβλίου)

10 Λάμβδα λογισμός και αποδείξεις, Ισομορφισμός Curry-Howard

Ο λ-λογισμός ανακαλύφθηκε από τον A. Church το 1930. Ήταν το πρώτο γενικό πλαίσιο στο οποίο επιχειρήθηκε να χαρακτηριστεί η έννοια του υπολογίσιμου. Έκτοτε γνώρισε ιλιγγιώδη ανάπτυξη και σήμερα αποτελεί ένα από τα πλέον ζωντανά επιστημονικά αντικείμενα στον χώρο της λογικής και πληροφορικής.

Βασίζεται στην έννοια της συνάρτησης. Αλλά της συνάρτησης, όχι όπως στη συνολοθεωρία ως γραφήματος αλλά, όπως στην πληροφορική, ως κανόνα· π.χ. οι συναρτήσεις $2x$ και $x+x$ (στους αριθμούς) μπορεί να είναι ίδιες ως γραφήματα αλλά είναι διαφορετικές ως κανόνες, αφού η πρώτη πολ/ζει επί 2 ενώ η δεύτερη προσθέτει τον αριθμό με τον εαυτό του. Η βασική λειτουργία κάθε συνάρτησης είναι ότι μπορεί να «εφαρμόζεται» σε κάποιο όρισμα, ώστε να υπολογίζει την τιμή. Εδώ οι συναρτήσεις είναι ελεύθερες να εφαρμόζονται οπουδήποτε, ακόμα και σε άλλες συναρτήσεις ακόμα και στον εαυτό τους! Αν M και N είναι συναρτήσεις, τότε συμβολίζουμε με (MN) την εφαρμογή του M στο N. (MN) είναι μεν μια τιμή, αλλά είναι επίσης και μια συνάρτηση που μπορεί, με τη σειρά της, να εφαρμοστεί οπουδήποτε.

Εκτός της εφαρμογής, ένας κανόνας σχηματισμού συναρτήσεων είναι η λ-αφαίρεση.

Αφαίρεση

Είναι αναγκαίο να διακρίνουμε μεταξύ ενός συμβόλου ή έκφρασης που δηλώνει μια συνάρτηση και μιας έκφρασης που περιέχει μια μεταβλητή και δηλώνει με αμφίβολο τρόπο κάποια τιμή της συνάρτησης. Αυτή η διάκριση συσκοτίζεται στη συνήθη γλώσσα των μαθηματικών. Όταν λέμε π.χ. ότι «x^2+1 είναι μεγαλύτερο από 1000» διατυπώνουμε κάτι το οποίο δεν έχει νόημα παρά μόνον αν το x πάρει την τιμή ενός συγκεκριμένου αριθμού. Ενώ όταν λέμε ότι «x^2+1 είναι μία πρωτογενής αναδρομική συνάρτηση», διατυπώνουμε κάτι οριστικό, κάτι που δεν εξαρτάται από τον προσδιορισμό του x, δηλαδή εδώ το x επέχει θέση φαινομενικής ή δεσμευμένης μεταβλητής. Η διαφορά λοιπόν είναι ότι στην πρώτη περίπτωση η έκφραση x^2+1 χρησιμοποιείται ως διφορούμενη ή μεταβλητή δήλωση ενός φυσικού αριθμού, ενώ στη δεύτερη μιας συγκεκριμένης συνάρτησης. Γι' αυτό στη δεύτερη περίπτωση θα παριστάνουμε τη συνάρτηση που αντιστοιχεί στην έκφραση x^2+1 ως $(\lambda x.\, x^2+1)$ (λ-αφαίρεση).

Το νόημα μιας τέτοιας γραφής (λ-αφαίρεσης) είναι ότι όταν η συνάρτηση $\lambda x.\, x^2+1$ εφαρμοστεί σε ένα συγκεκριμένο όρισμα, έστω 3, τότε η τιμή της συνάρτησης θα παραχθεί από τη «μεταβλητή» έκφραση x^2+1, όπου όμως το x αντικαθίσταται με 3, δηλαδή

$$((\lambda x.\, x^2+1)\, 3) = 3^2+1 = 10$$

Με αυτές τις προκαταρκτικές παρατηρήσεις θα προχωρήσουμε τώρα στον ορισμό του συστήματος του καθαρού (χωρίς τύπους) λ-λογισμού.

Ορισμός 10.1 *Το σύνολο Λ των λ-όρων είναι το σύνολο των εκφράσεων που σχηματίζεται ξεκινώντας από ένα άπειρο σύνολο μεταβλητών $V = \{v, v', v'', \ldots\}$ (αριθμήσιμο σύνολο) με τη χρήση των τελεστών της εφαρμογής και της λ-αφαίρεσης.*

Ο γενικευμένος ορισμός είναι ο εξής:

1. $x \in V \quad \Rightarrow \quad x \in \Lambda$
2. $M, N \in \Lambda \quad \Rightarrow \quad (M\,N) \in \Lambda$
3. $M \in \Lambda,\, x \in V \quad \Rightarrow \quad (\lambda x.\, M) \in \Lambda$

ή χρησιμοποιώντας αφηρημένη σύνταξη μπορούμε να γράψουμε:

$V \;::=\; v \mid V'$

$\Lambda \;::=\; V \mid (\Lambda\,\Lambda) \mid (\lambda V.\, \Lambda)$

Κάθε όρος της μορφής $(M\,N)$ θα λέγεται εφαρμογή *(του M στο N), ενώ κάθε όρος της μορφής $(\lambda x.\, M)$ θα λέγεται λ-αφαίρεση (στο x). Για το κατ' αρχήν νόημα αυτών των παραστάσεων ισχύουν οι παρατηρήσεις που διατυπώθηκαν παραπάνω για τις πράξεις της εφαρμογής και της αφαίρεσης.*

Παράδειγμα 10.2 *Οι κάτωθι εκφράσεις είναι λ-όροι:*

v

$(v\,v'')$

$(\lambda v.\,(v\,v''))$

$((\lambda v.\,(v\,v''))\,v'$

$((\lambda v'.\,((\lambda v.\,(v\,v''))\,v'))v''')$

Ελεύθερες και δεσμευμένες μεταβλητές

Όταν σχηματίζεται ο όρος $\lambda x.\, M$ ο τελεστής λx *δεσμεύει* τη μεταβλητή x στον όρο M. Το φαινόμενο αυτό είναι ανάλογο με την περίπτωση της λογικής, στην οποία οι τελεστές δέσμευσης είναι οι $\forall x$ και $\exists x$. Για παράδειγμα, λέμε ότι στον όρο $\lambda x.\, y\,x$ η x είναι *δεσμευμένη*, ενώ η y *ελεύθερη* μεταβλητή. Η αντικατάσταση $[x := N]$ εκτελείται μόνο στις ελεύθερες εμφανίσεις της x. Π.χ.

$y\,x\,(\lambda x.\, x)[x := N] \;=\; y\,N\,(\lambda x.\, x)$

Ας σημειώσουμε ότι το φαινόμενο των ελεύθερων και δεσμευμένων μεταβλητών εμφανίζεται γενικότερα στα μαθηματικά, για παράδειγμα στην παράσταση

$\sum_{x=1}^{3} x + y$

η x είναι δεσμευμένη μεταβλητή και η y ελεύθερη. Δεν έχει εδώ νόημα να αντικαταστήσουμε τη x με κάποιον αριθμό, έχει όμως νόημα να αντικαταστήσουμε την y με π.χ. το 5 αποκτώντας την παράσταση $\sum_{x=1}^{3} x + 5$. Εδώ δεν ξεχωρίζουμε τις παραστάσεις που διαφέρουν ως προς το όνομα των δεσμευμένων μεταβλητών. Στη λογική, το ανάλογο είναι ο μη διαχωρισμός μεταξύ ενός τύπου και του variant αυτού του τύπου.

Το αποτέλεσμα της αντικατάστασης (των ελεύθερων εμφανίσεων) του x από το N στον λ-όρο M συμβολίζεται με $M[x := N]$. Εδώ θα πρέπει να ληφθεί υπόψη ότι καμία από τις ελεύθερες μεταβλητές του N δεν πρέπει να δεσμευτεί μετά την αντικατάσταση.

Για τον λόγο αυτό τα ονόματα των δεσμευμένων μεταβλητών σε έναν όρο θα επιλέγονται πάντα ώστε να διαφέρουν από τα ονόματα των ελεύθερων μεταβλητών. Άρα γράφουμε $y\,(\lambda xy'.\,x\,y'\,z)$ για τον $y\,(\lambda xy.\,x\,y\,z)$. Η σύμβαση αυτή μπορεί να επεκταθεί και σε περισσότερους από έναν όρους. Αν π.χ. έχουμε τους όρους $M_1, M_2, \ldots M_n$ μπορούμε να φανταστούμε ότι όλες οι δεσμευμένες μεταβλητές που εμφανίζονται στους όρους αυτούς είναι διαφορετικές από τις ελεύθερες μεταβλητές αυτών των όρων. Αυτό βέβαια μπορεί να επιτευχθεί με μετονομασία των δεσμευμένων (και όχι βέβαια των ελεύθερων) μεταβλητών.

Άρα λοιπόν και στην περίπτωση της αντικατάστασης όταν σχηματίζουμε τον όρο $M[x := N]$ μπορούμε να φανταστούμε ότι αυτή η «σύμβαση των μεταβλητών» ισχύει για τους M και N έτσι ώστε, πραγματοποιούμενης της αντικατάστασης, καμία ελεύθερη μεταβλητή του N δεν μπορεί να δεσμευτεί (μετά την αντικατάσταση) από κάποιο λ-τελεστή του M. Π.χ. δεν μπορεί να υπάρξει $(\lambda x.\,x\,y)[y := x] = \lambda x.\,x\,x$ διότι αυτό πρέπει να γίνει $(\lambda x.\,x\,y)[y := x] = (\lambda z.\,z\,y)[y := x] = \lambda z.\,z\,x$.

Η «σύμβαση των μεταβλητών» επιτρέπει να ορίζουμε την αντικατάσταση στον λ-λογισμό χωρίς να λαμβάνουμε κάποια ειδική πρόνοια για τις ελεύθερες και δεσμευμένες μεταβλητές.

Ορισμός 10.3
- *Ένας όρος της μορφής $(\lambda x.\,P)\,Q$ ονομάζεται β-*redex *και ο $P[x := Q]$ ονομάζεται το β-*contractum *του.*

- *Θα λέμε ότι -$M \to_\beta N$ αν ένας υποόρος του M, που είναι redex, αντικαθίσταται από το contractum του και δίνει το N.*

- *Θα λέμε ότι $M \twoheadrightarrow_\beta N$ αν υπάρχουν όροι $M_1, M_2, \ldots M_n$ ώστε*

  $M \equiv M_1$ και $N \equiv M_n$ και για κάθε i $(1 \leq i \leq n-1)$ $M_i \to_\beta M_{i+1}$, δηλαδή $M \to_\beta M_2 \to_\beta \cdots \to_\beta M_{n-1} \to_\beta N$.

- *Ένας όρος M είναι μία β-κανονική μορφή αν δεν υπάρχει όρος N ώστε $M \to_\beta N$ ή, ισοδύναμα, ότι το M δεν περιέχει κανένα redex.*

Η αναγωγή ενός όρου είναι ο «υπολογισμός» του. Όταν στον όρο M υπάρχει ένα redex, τότε «υπολογίζουμε» το redex αντικαθιστώντας το με το contractum του. Η μετάβαση δηλαδή από τον M στον N ($M \twoheadrightarrow_\beta N$) είναι μία διαδικασία υπολογισμού που μας οδηγεί από τον M στον N. π.χ.

$$\begin{array}{llll}
(\lambda x.\,x\,x)\,\lambda z.\,z & \to_\beta & x\,x[x := \lambda z.\,z] & = \;(\lambda z.\,z)\lambda y.\,y \\
(\lambda z.\,z)\,\lambda y.\,y & \to_\beta & z[z := \lambda y.\,y] & = \;\lambda y.\,y \\
(\lambda x.\,x\,x)\,\lambda z.\,z & \twoheadrightarrow_\beta & \lambda y.\,y &
\end{array}$$

Ο λογισμός αυτός (ο λ-λογισμός του Church) έχει εντυπωσιακή υπολογιστική ισχύ. Διότι αν ορίσουμε τα ψηφία του Church $\bar{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ να είναι οι όροι $\bar{n} = \lambda f \lambda x \overbrace{f(f(\cdots f}^{n \text{ φορές}}(x)\cdots)$ τότε λέμε ότι η συνάρτηση $h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ υπολογίζεται στον λ-λογισμό αν υπάρχει λ-όρος H ώστε όταν $f(n_1, \ldots, n_k) = b$ τότε θα έχουμε $H\bar{n}_1\bar{n}_2 \cdots \bar{n}_1 \twoheadrightarrow_\beta \bar{b}$, δηλαδή ο όρος-πρόγραμμα H εφαρμόζει στα ψηφία $n_1, \ldots, n_k$ και μετά από κάποια βήματα υπολογισμού βγάζει ως αποτέλεσμα το $\bar{b}$, που αντιστοιχεί στην τιμή b της συνάρτησης. Αποδεικνύεται ότι όλες οι νοητά, με οποιονδήποτε τρόπο, υπολογίσιμες συναρτήσεις μπορούν να υπολογιστούν στον λ-λογισμό. Ο λ-λογισμός άλλωστε ήταν το πλαίσιο στο οποίο διατυπώθηκε η θέση του Church.

Ο καθαρός λ-λογισμός ήταν το πρώτο σύστημα που ανέπτυξε ο Church. Στη συνέχεια όμως ανέπτυξε ένα πολύ σημαντικό σύστημα, τον λ-λογισμό με τύπους.

Στον καθαρό λ-λογισμό θεωρήσαμε ότι μια συνάρτηση δεν έχει προκαθορισμένο *πεδίο ορισμού* και *πεδίο τιμών*. Δεν υπάρχουν απαιτήσεις προκαθορισμένου προσδιορισμού, ότι π.χ. μία συνάρτηση (όπως η $n \mapsto n^3$) δέχεται ως ορίσματα φυσικούς αριθμούς και επιστρέφει φυσικούς αριθμούς. Η επιβολή τέτοιου είδους απαιτήσεων γίνεται μέσω των τύπων. Ο κάθε όρος (πρόγραμμα) συνοδεύεται από έναν τύπο, ο οποίος μπορεί να θεωρηθεί ως ένας προσδιορισμός ή σχόλιο (specification) για το τι κάνει ένα πρόγραμμα υπολογισμού, που στην περίπτωσή μας είναι ένας λ-όρος. Ο Curry και ο Church εισήγαγαν τέτοιες εκδοχές λ-λογισμού με τύπους.

Ορισμός 10.4 (Τύποι) *Έστω U ένα αριθμήσιμο πλήθος συμβόλων που θα ονομάζονται* ατομικοί τύποι *ή και* μεταβλητές τύπων. *Το σύνολο των τύπων T ορίζεται επαγωγικά ως εξής:*

A1. Κάθε στοιχείο του U είναι τύπος.

A2. Αν σ και τ τύποι τότε η έκφραση $(\sigma \to \tau)$ είναι τύπος.

Ή χρησιμοποιώντας εναλλακτικό ορισμό

$$T ::= U \mid (T \to T)$$

Διαισθητικά ο τύπος $(\sigma \to \tau)$ θα αντιστοιχεί στους όρους που είναι προγράμματα συναρτήσεων από όρους τύπου σ σε όρους τύπου τ).

Θα χρησιμοποιήσουμε τα $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ για ατομικούς τύπους και τα $\sigma, \tau, \rho \ldots$ γενικά για τύπους. Θα παραλείπουμε τις εξωτερικές παρενθέσεις στη γραφή των τύπων.

Μεταβλητές όρων: Για κάθε τύπο σ υπάρχει ένα αριθμήσιμο πλήθος μεταβλητών τύπου σ. Οι μεταβλητές τύπου σ θα γράφονται ως x^σ (θα νοούνται δηλαδή ως ζεύγη (x, σ)), όπου x είναι ένα σύμβολο μεταβλητής.

Ορισμός 10.5 (Όροι) *Το σύνολο των όρων ορίζεται επαγωγικά ως εξής:*

A1. Κάθε μεταβλητή x^σ είναι όρος τύπου σ.

A2. *Αν M είναι όρος τύπου $\sigma \to \tau$ και N όρος τύπου σ, τότε $(M\,N)$ είναι όρος τύπου τ.*

A3. *Αν M είναι όρος τύπου τ και x^σ μεταβλητή τύπου σ, τότε $(\lambda x^\sigma.\,M)$ είναι όρος τύπου $\sigma \to \tau$.*

Συμβολισμοί: Αν M είναι ένας όρος τύπου σ, πολλές φορές θα γράφουμε $M \in \sigma$ ή και M^σ. Πολλές φορές θα παραλείπουμε τον τύπο στις μεταβλητές, δηλαδή μπορούμε να γράψουμε $\lambda x.\,M$. Θα παραλείπουμε τις εξωτερικές παρενθέσεις. Οι όροι του παραπάνω ορισμού θα λέγονται και όροι Church.

Η αντικατάσταση ορίζεται επίσης με τον ίδιο τρόπο αλλά με την προϋπόθεση ότι μία (ελεύθερη) μεταβλητή τύπου σ αντικαθίσταται μόνο από όρο τύπου σ.

Ένα redex έχει τη μορφή $(\lambda x^\sigma.\,M)\,N$, όπου βέβαια ο $\lambda x^\sigma.\,M$ έχει τύπο $\sigma \to \tau$ ($M \in \tau$) και $N \in \sigma$ (αναγκαστικά για να μπορέσει να σχηματιστεί ο όρος). Το contractum θα είναι το $M[x^\sigma := N]$. Είναι προφανές ότι ο όρος που προκύπτει από μία τέτοια αντικατάσταση έχει τον ίδιο τύπο με τον M.

Ένας όρος του αρχικού συστήματος Church είναι σαν ένας όρος του καθαρού λ-λογισμού με τη διαφορά ότι σε όλες τις μεταβλητές, ελεύθερες και δεσμευμένες, υπάρχει μία απονομή-αναγραφή τύπων. Αν «σβήσουμε» αυτές τις απονομές, ο όρος αυτός μετατρέπεται σε όρο του λ-λογισμού χωρίς τύπους. Ο «μηχανισμός» των τύπων εισάγει μια γραμματική στον σχηματισμό των λ-όρων, αφού οι λ-όροι δεν μπορούν πλέον να σχηματιστούν ελεύθερα παρά μόνον αν έχουν τους κατάλληλους τύπους.

10.1 Επεκτάσεις του λ-λογισμού με απλούς τύπους

Το σύστημα του λ-λογισμού με απλούς τύπους που μελετήσαμε είναι αρκετά «φτωχό». Δεν μπορούμε λόγου χάριν να ορίσουμε το ζεύγος $\langle P, Q\rangle$ όταν μας δίνονται δύο όροι P και Q. Μια λοιπόν προφανής επέκταση θα είναι να προσθέσουμε στον μηχανισμό δημιουργίας των τύπων τη δυνατότητα δημιουργίας του γινομένου τύπων $\sigma \times \tau$, όταν σ και τ είναι τύποι. Αυτό θα μας επιτρέψει να ορίσουμε το ζεύγος $\langle P, Q\rangle$.

Επέκταση του συστήματος Church με γινόμενο τύπων

Τύποι: Στον ορισμό των τύπων προσθέτουμε την ακόλουθη πρόταση:

- Αν σ και τ είναι τύποι, τότε $\sigma \times \tau$ είναι τύπος.

Σημείωση: Ο τύπος $\sigma \times \tau$ είναι το (καρτεσιανό) γινόμενο των τύπων σ και τ.

Όροι: Στον ορισμό των όρων προσθέτουμε τα ακόλουθα:

- Αν M είναι όρος τύπου σ και N όρος τύπου τ, τότε $\langle M, N\rangle$ είναι όρος τύπου $\sigma \times \tau$. (δημιουργία ζεύγους)

- Αν M είναι όρος τύπου $\sigma \times \tau$, τότε $\pi^1 M$ είναι όρος τύπου σ και $\pi^2 M$ είναι όρος τύπου τ.

Σημείωση: Ο όρος $\pi^1 M$ είναι η «πρώτη προβολή» του M και ο $\pi^2 M$ η «δεύτερη προβολή».

Υπολογιστική σημασία

Οι καινούργιοι ορισμοί εισάγουν νέες μορφές από redex και contractum. Στα ήδη υπάρχοντα προστίθενται τα εξής:

$$\pi^1 \langle M, N \rangle \to_\beta M$$

$$\pi^2 \langle M, N \rangle \to_\beta N$$

Οι δύο προαναφερθείσες σχέσεις που έχουν τη μορφή $P \to_\beta Q$ σημαίνουν ότι P είναι ένα redex και Q είναι το contractum του.

Ας σημειωθεί ότι ο όρος $\langle M, N \rangle$ είναι το «πακετάρισμα» σε ζεύγος των M και N. Τα $\pi^1 M$, $\pi^2 M$ είναι οι προβολές τους που μας επιτρέπουν να εξαγάγουμε τα συνιστώντα μέρη ενός ζεύγους. Το σύστημα των απλών τύπων του Church δεν έχει την υπολογιστική ισχύ του λ-λογισμού. Έχει όμως την καλή διευθέτηση στη δημιουργία των όρων και επίσης τη σημαντική ιδιότητα (που ασφαλίζει τους υπολογισμούς) ότι κάθε προσπάθεια αναγωγής, με οποιονδήποτε τρόπο και αν αυτή γίνει, θα τερματίσει καταλήγοντας σε μια κανονική μορφή. Δηλαδή την ιδιότητα της ισχυρής κανονικοποίησης. Θα χρησιμοποιήσουμε το σύστημα αυτό για να δώσουμε μια εισαγωγική ιδέα στον ισομορφισμό Curry-Howard.

10.2 Λογική και ο ισομορφισμός Curry-Howard

Στη λογική, όπως είδαμε, κατασκευάζουμε αποδείξεις. Ξεκινώντας από υποθέσεις, με διαδοχικά (λογικά) βήματα οδηγούμαστε στο συμπέρασμα. Αν οι υποθέσεις ταυτίζονται με τα αξιώματα μιας θεωρίας, τότε το συμπέρασμα θα είναι ένα θεώρημα αυτής της θεωρίας. Αν το συμπέρασμα αποδειχθεί χωρίς να βασιζόμαστε σε καμία υπόθεση, τότε η πρόταση-συμπέρασμα είναι λογικά ορθή, δηλαδή έχει μια γενική λογική αναγκαιότητα (ταυτολογία ή λογικά έγκυρη πρόταση). Οι μελέτες μεγάλων μαθηματικών λογικών, όπως οι Frege, Russell, Hilbert, Gentzen και πολλοί άλλοι, επέτρεψαν την τυποποίηση της έννοιας της απόδειξης. Οι εργασίες του Gentzen και ειδικά ο τρόπος που παρουσίασε τις αποδείξεις στο σύστημα της φυσικής απαγωγής επέτρεψαν να διαπιστωθεί μια συγκλονιστική ισομορφία μεταξύ των αποδείξεων και των όρων του λ-λογισμού (προγραμμάτων). Αυτή η αντιστοιχία αποτελεί το κλειδί της δομικής σύνδεσης της λογικής (εν γένει των μαθηματικών) και της πληροφορικής.

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε το σύστημα της φυσικής απαγωγής στην απλή περίπτωση ενός μέρους του προτασιακού λογισμού.

Ορισμός 10.6 (Προτασιακές φόρμουλες) *Ξεκινάμε με ένα αριθμήσιμο σύνολο προτασιακών μεταβλητών*

π.χ. $A, B, C, \ldots, A_1, B_1, C_1, \ldots$ *θα είναι προτασιακές μςταβλητές*

και ορίζουμε

A1. Κάθε προτασιακή μεταβλητή είναι προτασιακή φόρμουλα.

A2. Αν ϕ *και* ψ *είναι προτασιακές φόρμουλες, τότε* $(\phi \to \psi)$ *και* $(\phi \wedge \psi)$ *είναι προτασιακές φόρμουλες.*

Σημείωση: Προτασιακή φόρμουλα είναι κάθε έκφραση (συμβολοσειρά) που κατασκευάζεται με διαδοχικές εφαρμογές των κανόνων 1) και 2). Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε τη λέξη φόρμουλα, αντί (προτασιακός) τύπος που έχουμε ήδη χρησιμοποιήσει στην (προτασιακή) λογική, διότι την τελευταία θα τη χρησιμοποιήσουμε για τους τύπους του λ-λογισμού.

Η φόρμουλα $(\phi \to \psi)$ είναι η συνεπαγωγή με υπόθεση τη ϕ και συμπέρασμα την ψ και η φόρμουλα $(\phi \wedge \psi)$ είναι η σύζευξη των ϕ και ψ. Για λόγους απλότητας θα παραλείπουμε πολλές φορές τις παρενθέσεις.

Παράδειγμα:

A1. Η προτασιακή μεταβλητή A είναι προτασιακή φόρμουλα.

A2. Η έκφραση $(((A \to A) \to C) \wedge B)$ είναι προτασιακή φόρμουλα (ελέγξτε αν έχει κατασκευαστεί σωστά σύμφωνα με τις προδιαγραφές του ορισμού).

10.3 Σύστημα αποδείξεων φυσικής απαγωγής

Οι αποδείξεις στο σύστημα φυσικής απαγωγής θα είναι δέντρα όπου στους κόμβους των δέντρων θα υπάρχουν προτασιακές φόρμουλες, στη ρίζα των δέντρων θα υπάρχει η προτασιακή φόρμουλα που αποδεικνύεται, και στα φύλλα των δέντρων θα υπάρχουν (αν παραμένουν ζωντανές) οι υποθέσεις στις οποίες βασίζεται η αποδεικνυόμενη φόρμουλα. Οι υποθέσεις στα φύλλα του δέντρου θα είναι ομαδοποιημένες σε πακέτα υποθέσεων (όπου κάθε πακέτο θα αποτελείται από εμφανίσεις της ίδιας φόρμουλας σε διαφορετικά φύλλα). Επίσης θα υπάρχουν και πακέτα υποθέσεων που έχουν εκφορτιστεί (κατά την πορεία της απόδειξης) και τα οποία δεν θα μετράνε ως (ζωντανές) αποδείξεις.

Τα παραπάνω γίνονται πιο ακριβή και πιο κατανοητά με τους ακόλουθους ορισμούς.

Ορισμός 10.7 *Θα ονομάζουμε* δέντρο με φόρμουλες *κάθε δέντρο, με μονή ή διπλή διακλάδωση, στους κόμβους του οποίου υπάρχουν προτασιακές φόρμουλες, π.χ.*

$$\dfrac{\dfrac{A \qquad B}{A \wedge B}}{A \to (A \wedge B)}$$ *είναι δέντρο με φόρμουλες.*

Τα δέντρα που εξετάζουμε διακλαδώνονται προς τα πάνω, π.χ. όταν γράφουμε $\dfrac{\phi \quad \psi}{\chi}$ έχουμε διπλή διακλάδωση, ενώ όταν γράφουμε $\dfrac{\phi}{\chi}$ έχουμε μονή διακλάδωση.

Ορισμός 10.8 *Ένα δέντρο με φόρμουλες και με πακέτα υποθέσεων είναι ένα δέντρο με φόρμουλες όπου στα φύλλα του δέντρου σε κάθε φόρμουλα έχει αντιστοιχηθεί ένας φυσικός αριθμός. Ο περιορισμός είναι ότι σε διαφορετικές φόρμουλες πρέπει να αντιστοιχούν διαφορετικοί αριθμοί ενώ σε διαφορετικές εμφανίσεις της ίδιας φόρμουλας (ίδια φόρμουλα σε διαφορετικά φύλλα) μπορεί να αντιστοιχηθεί ο ίδιος αριθμός. Το πολυσύνολο όλων των εμφανίσεων στα φύλλα του δέντρου μιας φόρμουλας* ϕ *στην οποία έχει αντιστοιχηθεί ο αριθμός* i *λέγεται πακέτο υποθέσεων* i*. Τα πακέτα υποθέσεων χωρίζονται σε δύο ξεχωριστές κατηγορίες. Τα ζωντανά πακέτα υποθέσεων και τα εκφορτισμένα πακέτα υποθέσεων. Όταν θέλουμε να παρουσιάσουμε ότι μια συγκεκριμένη εμφάνιση μιας φόρμουλας* ϕ *σε ένα φύλλο ανήκει στο ζωντανό πακέτο* i *γράφουμε* ϕ^i*, ενώ όταν ανήκει στο εκφορτισμένο πακέτο* i *γράφουμε* $\overline{\phi}^{\,i}$ *. Επίσης, στα δέντρα με φόρμουλες και πακέτα υποθέσεων, επιτρέπουμε να υπάρχουν φυσικοί αριθμοί και στις διακλαδώσεις* $\dfrac{\phi \quad \psi}{\chi}$ *και* $\dfrac{\phi}{\chi}$ *, δηλαδή επιτρέπουμε το δέντρο να έχει στους κόμβους τη μορφή* $\dfrac{\phi \quad \psi}{\chi}\, i$ *ή* $\dfrac{\phi}{\chi}\, i$ *.*

Παράδειγμα:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{A}^{\,1} \quad \overline{A}^{\,1}}{A \wedge A}}{A \to (A \wedge A)}\,1 \qquad A^2}{(A \to (A \wedge B)) \wedge A}$$

είναι δέντρο με φόρμουλες και πακέτα υποθέσεων. Ας επισημάνουμε ότι το πολυσύνολο με μοναδική εμφάνιση την A^2 στην αναπαράσταση του δέντρου είναι το ανοικτό πακέτο υποθέσεων 2, ενώ το πολυσύνολο με τις δύο εμφανίσεις $\overline{A}^{\,1}$ στην αναπαράσταση του δέντρου είναι το εκφορτισμένο πακέτο υποθέσεων 1.

Θα συμβολίζουμε τα ανοικτά πακέτα υποθέσεων i με μέλη μια φόρμουλα ϕ με $[\phi]_i$. Δηλαδή $[\phi]_i$ θα συγκεντρώνει όλες τις φόρμουλες ϕ στα φύλλα του δέντρου στις οποίες έχει αντιστοιχηθεί ο αριθμός i (και οι οποίες συγκροτούν ανοικτό πακέτο). Αντίστοιχα τα εκφορτισμένα πακέτα τα συμβολίζουμε με $\overline{[\phi]}_i$. Σημειώστε ότι $[\phi]_i$ είναι διαφορετικό από το $[\phi]_j$ αν $i \neq j$. Το ίδιο συμβαίνει και για τα εκφορτισμένα πακέτα. Ένα πακέτο υποθέσεων είναι πάντα προσδιορισμένο είτε ως ανοικτό είτε ως εκφορτισμένο πακέτο υποθέσεων. Αν αποφασίσουμε για ένα ανοικτό πακέτο υποθέσεων $[\phi]_i$ να αλλάξουμε τον προσδιορισμό του σε εκφορτισμένο, τότε το συμβολίζουμε (το μετατρέπουμε σε) $\overline{[\phi]}_i$.

Στη συνέχεια θα ορίσουμε την «Π είναι απόδειξη της φόρμουλας ϕ από τα πακέτα υποθέσεων $[\phi_1]_{j_1}, \ldots, [\phi_k]_{j_k}$». Η απόδειξη Π θα είναι ένα δέντρο με φόρμουλες και πακέτα υποθέσεων στο οποίο τα ανοικτά πακέτα υποθέσεων θα είναι τα $[\phi_1]_{j_1}, \ldots, [\phi_k]_{j_k}$ και για τα εκφορτισμένα θα υπάρχει μια καταγραφή του «σε ποιο σημείο» της απόδειξης έχει γίνει η εκφόρτισή τους. Η απόδειξη-δέντρο κατασκευάζεται με βάση τον ακόλουθο επαγωγικό ορισμό.

Ορισμός 10.9 *Επαγωγικά.*

A1. Για κάθε φόρμουλα ϕ και κάθε $i \in \mathbb{N}$ το δέντρο

$$\phi$$

με μοναδικό κόμβο τη ϕ είναι απόδειξη της ϕ από το πακέτο υποθέσεων $[\phi]_i$. Σ' αυτήν την περίπτωση το (ζωντανό) πακέτο υποθέσεων $[\phi]_i$ (πακέτο i) αποτελείται αποκλειστικά από τη ϕ και η απόδειξη μπορεί να παρασταθεί επίσης με ϕ^i.

A2. Αν Π_1 είναι απόδειξη της ϕ και Π_2 απόδειξη της ψ (και στις δύο περιπτώσεις αντίστοιχα από κάποια πακέτα υποθέσεων έτσι ώστε να μην είναι δυνατόν για πακέτο υποθέσεων $[\phi]_i$ της Π_1 και $[\psi]_i$ της Π_2 να έχουμε $\phi \neq \psi$), τότε το δέντρο

$$\frac{\Pi_1 \qquad \Pi_2}{\phi \wedge \psi}$$

είναι απόδειξη της $\phi \wedge \psi$ από πακέτα υποθέσεων που καθορίζονται από τους αριθμούς που έχουν αποδοθεί στα φύλλα του ενιαίου δέντρου $\dfrac{\Pi_1 \qquad \Pi_2}{\phi \wedge \psi}$ και οι οποίοι έχουν κληρονομηθεί από τα δέντρα Π_1 και Π_2 (δηλαδή κάθε πακέτο υποθέσεων $[\phi]_i$ του $\dfrac{\Pi_1 \qquad \Pi_2}{\phi \wedge \psi}$ είναι πακέτο υποθέσεων είτε του Π_1 είτε του Π_2, εκτός από την περίπτωση που έχουμε για κάποιο i να υπάρχει πακέτο $[\phi]_i$ της Π_1 και $[\phi]_i$ της Π_2 και στην οποία περίπτωση ενοποιούμε το πακέτο $[\phi]_i$, δηλαδή σ' αυτό το πακέτο θα περιλαμβάνονται όλες οι εμφανίσεις της ϕ^i και στα δύο δέντρα Π_1 και Π_2).

[Σχηματικά, τον σχηματισμό της νέας απόδειξης θα τον εμφανίζουμε ως

$$\frac{\begin{matrix}\vdots \\ \phi\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots \\ \psi\end{matrix}}{\phi \wedge \psi}$$

όπου $\begin{matrix}\vdots \\ \phi\end{matrix}$ είναι η απόδειξη Π_1 και $\begin{matrix}\vdots \\ \psi\end{matrix}$ η απόδειξη Π_2.]

A3. Αν Π είναι απόδειξη της $\phi \wedge \psi$ από κάποια πακέτα υποθέσεων, τότε $\dfrac{\Pi}{\phi}$ είναι απόδειξη της ϕ και $\dfrac{\Pi}{\psi}$ είναι απόδειξη της ψ, και οι δύο με τα ίδια πακέτα υποθέσεων.

[Παριστάνουμε αυτές τις αποδείξεις αντίστοιχα με $\dfrac{\overset{\vdots}{\phi \wedge \psi}}{\phi}$ *και* $\dfrac{\overset{\vdots}{\phi \wedge \psi}}{\psi}$

.]

A4. Αν Π *είναι απόδειξη της* ψ *από πακέτα υποθέσεων στα οποία περιλαμβάνεται το πακέτο* $[\phi]_i$ *τότε* $\dfrac{\Pi}{\phi \to \psi}\, i$ *είναι απόδειξη της* $\phi \to \psi$ *από τα ίδια πακέτα υποθέσεων εκτός του ότι το πακέτο* $[\phi]_i$ *έχει μεταταχθεί στα εκφορτισμένα, δηλαδή το* $[\phi]_i$ *έχει πάψει να είναι ανοικτό πακέτο (άρα είναι εκφορτισμένο).*

[Σχηματικά μπορούμε να περιγράψουμε τα πιο πάνω λέγοντας ότι αν $\begin{matrix}[\phi]_i\\ \vdots \\ \psi\end{matrix}$ *είναι απόδειξη της* ψ*, τότε* $\dfrac{\begin{matrix}\overline{[\phi]}_i\\ \vdots \\ \psi\end{matrix}}{\phi \to \psi}\, i$ *είναι απόδειξη της* $\phi \to \psi$*.]*

A5. Αν Π *είναι απόδειξη της* ψ *από κάποια πακέτα υποθέσεων και* ϕ *μια φόρμουλα, τότε το δέντρο* $\dfrac{\Pi}{\phi \to \psi}$ *είναι απόδειξη της* $\phi \to \psi$ *από τα ίδια πακέτα υποθέσεων.*

[Ο μηχανισμός αυτός αντιστοιχεί κατά μία έννοια στην εκφόρτιση ενός «φαινομενικού» πακέτου υποθέσεων $[\phi]_i$*, όπου το* i *δεν υπάρχει στα πακέτα υποθέσεων της απόδειξης* Π*.]*

A6. Με τη συμβολική αναπαράσταση και τις ίδιες προδιαγραφές του ορισμού που χρησιμοποιήσαμε για τη σύζευξη το δέντρο $\dfrac{\overset{\vdots}{\phi \to \psi} \qquad \overset{\vdots}{\phi}}{\psi}$ *είναι απόδειξη της* ψ *στην περίπτωση που* $\overset{\vdots}{\phi \to \psi}$ *είναι απόδειξη της* $\phi \to \psi$ *και* $\overset{\vdots}{\phi}$ *είναι απόδειξη της* ϕ*.*

Παρατηρήσεις - Συμβολισμοί

Η δημιουργία της απόδειξης Π της φόρμουλας ϕ δημιουργεί ένα δέντρο στο οποίο κρατούνται σημειώσεις για τις υποθέσεις (ζωντανές ή εκφορτισμένες) και της ακριβούς θέσης που εκφορτίζεται ένα πακέτο υποθέσεων.

Αν με $\overset{\Pi}{\psi}$ συμβολίσουμε την απόδειξη Π της φόρμουλας ψ και με $\begin{matrix}[\phi]_i\\ \Pi \\ \psi\end{matrix}$ την απόδειξη Π της ψ όπου μεταξύ των πακέτων υποθέσεων υπάρχει το $[\phi]_i$, ομοίως δε με $\begin{array}{c}\overline{[\phi]_i}\\ \Pi\\ \psi\end{array}$ την απόδειξη της ψ όπου το πακέτο $[\phi]_i$ έχει «καταστεί» εκφορτισμένο (έχει εκφορτιστεί), τότε μπορούμε να διατυπώσουμε συνοπτικά τον ορισμό των αποδείξεων:

π.χ. η $\begin{array}{c}[\psi]_i\\ \psi\\ \psi\end{array}$ είναι απόδειξη, η $\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ \phi\end{array}\qquad\begin{array}{c}\Pi_2\\ \psi\end{array}}{\phi\wedge\psi}$ είναι απόδειξη (αφού έχουμε ενοποιήσει τα πακέτα υποθέσεων των $\begin{array}{c}\Pi_1\\ \phi\end{array}$ και $\begin{array}{c}\Pi_2\\ \psi\end{array}$) η $\dfrac{\begin{array}{c}\overline{[\phi]_i}\\ \Pi\\ \psi\end{array}}{\phi\to\psi}\,\mathrm{i}$ είναι απόδειξη κ.ο.κ.

Παράδειγμα 10.10 *A1.* $\dfrac{\dfrac{}{A}\;{}^{1}}{A\to A}\;{}^{1}$. *Δηλαδή το A είναι απόδειξη από την υπόθεση A (δηλαδή το πακέτο $[A]_1$). Άρα μπορούμε να εκφορτίσουμε το πακέτο A^1 και να πάρουμε το $A\to A$ χωρίς υποθέσεις.*

A2. $\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A}\;{}^{1}}{B\to A}}{A\to(B\to A)}\;{}^{1}$. *(Η εισαγωγή του B αντιστοιχεί στην περίπτωση 5 του ορισμού. Δηλαδή το $B\to A$ εισάγεται στην πορεία της απόδειξης χωρίς το B να περιέχεται στα ανοικτά πακέτα υποθέσεων.)*

A3. $\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A}\;{}^{2}\qquad\dfrac{}{B}\;{}^{1}}{A\wedge B}}{(B\to(A\wedge B)}\;{}^{1}}{A\to(B\to(A\wedge B))}\;{}^{2}$ *είναι απόδειξη του $A\to(B\to(A\wedge B))$ χωρίς υποθέσεις.*

Σημειώστε ότι όλες οι υποαποδείξεις

A^2*,* B^1*,* $\dfrac{A^2\qquad B^1}{A\wedge B}$ *,* $\dfrac{\dfrac{A^2\qquad\dfrac{}{B}\;{}^{1}}{A\wedge B}}{B\to(A\wedge B)}\;{}^{1}$ *είναι αποδείξεις των αντίστοιχων φορμουλών από τα αντίστοιχα πακέτα υποθέσεων.*

Ως ένα άλλο παράδειγμα απόδειξης θεωρήστε το ακόλουθο δέντρο

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A\to(B\to C)}\;{}^{1}\qquad\dfrac{}{A}\;{}^{2}}{B\to C}\qquad\dfrac{\dfrac{}{A\to B}\;{}^{3}\qquad\dfrac{}{A}\;{}^{2}}{B}}{C}}{A\to C}\;{}^{2}}{(A\to B)\to(A\to C)}\;{}^{3}}{(A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))}\;{}^{1}$$

ΚΑΝΟΝΕΣ ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ ΤΩΝ ΑΠΟΔΕΙΞΕΩΝ

Οι κανόνες μπορούν να χωριστούν σε δύο κατηγορίες. Τους κανόνες *εισαγωγής* και του κανόνες *απαλοιφής*.

- Κανόνες εισαγωγής:

  Οι κανόνες $\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \phi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \psi\end{array}}{\phi \wedge \psi}$ και $\dfrac{\begin{array}{c}\overline{[\phi]_i}\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\phi \to \psi}\,\mathrm{i}$.

- Κανόνες απαλοιφής:

  Οι κανόνες $\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \phi \wedge \psi\end{array}}{\phi}$, $\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \phi \wedge \psi\end{array}}{\psi}$ και $\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \phi \to \psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \phi\end{array}}{\psi}$.

Οι κανόνες εισαγωγής εισάγουν τον σύνδεσμο στη φόρμουλα του συμπεράσματός τους, ενώ οι κανόνες απαλοιφής τον απομακρύνουν.

10.4 Redex και contractum στις αποδείξεις φυσικής απαγωγής

Η παρουσίαση των αποδείξεων με το σύστημα της φυσικής απαγωγής εισάγει μια έννοια redex και την αντίστοιχη του contractum.

Ορισμός 10.11 *Κάθε απόδειξη της μορφής στο αριστερό μέρος είναι redex και η αντίστοιχη μορφή στο δεξιό μέρος είναι το contractum αυτού του redex.*

Redex	Contractum
$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\overline{[\phi]_i}\\ \Pi\\ \psi\end{array}}{\phi \to \psi}\,i \qquad \begin{array}{c}\Pi_2\\ \phi\end{array}}{\psi}$	$\begin{array}{c}\Pi_2\\ [\phi]_i\\ \Pi\\ \psi\end{array}$
$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ \phi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Pi_2\\ \psi\end{array}}{\phi \wedge \psi}}{\phi}$	$\begin{array}{c}\Pi_1\\ \phi\end{array}$
$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ \phi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Pi_2\\ \psi\end{array}}{\phi \wedge \psi}}{\psi}$	$\begin{array}{c}\Pi_2\\ \psi\end{array}$

Σημείωση: Για να σχηματιστεί η απόδειξη $\begin{array}{c}\Pi_2\\ [\phi]_i\\ \Pi\\ \psi\end{array}$ *κάθε φύλλο* ϕ *στην απόδειξη* $\begin{array}{c}[\phi]_i\\ \Pi\\ \psi\end{array}$ *που ανήκει στο πακέτο υποθέσεων* i *έχει αντικατασταθεί με την απόδειξη* $\begin{array}{c}\Pi_2\\ \phi\end{array}$*. Είναι εύκολο να δούμε ότι αυτό που προκύπτει είναι απόδειξη.*

Παρατήρηση: Το redex δημιουργείται όταν έχουμε την εφαρμογή ενός κανόνα εισαγωγής και αμέσως μετά την εφαρμογή ενός κανόνα απαλοιφής (και στις δύο περιπτώσεις για τον ίδιο σύνδεσμο). Κατά μία έννοια μια τέτοια ακολουθία είναι μια άσκοπη εναλλαγή αποδείξεων (detour) η οποία δημιουργεί απόδειξη κατά έμμεσο τρόπο. Η αποκατάσταση έρχεται όταν η απόδειξη αυτή (το redex) αντικατασταθεί με την ευθεία απόδειξη (που είναι το contractum).

Ορισμός 10.12 *Μια απόδειξη που δεν περιέχει redex λέγεται κανονική απόδειξη.*

Θεώρημα 10.13 *Αν υπάρχει απόδειξη μιας φόρμουλας τότε υπάρχει και κανονική απόδειξη της ίδιας φόρμουλας. Μάλιστα, όπως θα δούμε και στον ισομορφισμό του Curry-Howard, ισχύει το ισχυρότερο αποτέλεσμα ότι κάθε απόδειξη μιας φόρμουλας ϕ μετατρέπεται σε κανονική απόδειξη της ϕ με οποιαδήποτε διαδοχική αντικατάσταση ενός redex με το αντίστοιχο contractum (ισχυρή κανονικοποίηση).*

10.5 Ισομορφισμός Curry-Howard

Πρόκειται για μια αντιστοιχία μεταξύ των αποδείξεων και των λ-όρων με τύπους η οποία σέβεται την αναγωγή, δηλαδή τη μετάβαση από redex σε contractum. Το γενικό σχήμα είναι ότι κάθε απόδειξη μιας φόρμουλας ϕ αντιστοιχεί σε έναν όρο τύπου ϕ (υπάρχει ταύτιση φορμουλών και τύπων). Και αν θεωρήσουμε ότι οι όροι τύπου σ είναι προγράμματα τύπου σ ο ισομορφισμός μπορεί σχηματικά να διατυπωθεί

$$\text{ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ} \longleftarrow \text{———} \longrightarrow \text{ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ}$$

$$\text{ΦΟΡΜΟΥΛΕΣ} \longleftarrow\!\!\text{————————} \longrightarrow \text{ΤΥΠΟΙ}$$

Δηλαδή κάθε απόδειξη μιας φόρμουλας μπορεί να νοηθεί ως ένα πρόγραμμα ενός τύπου. Η φόρμουλα περιγράφει το τι αποδεικνύει η απόδειξη, ενώ ο τύπος περιγράφει το τι κάνει το πρόγραμμα (το specification του προγράμματος).

Στη συνέχεια δίνεται η περιγραφή του ισομορφισμού.

Ορισμός 10.14 *Αν ταυτίσουμε τους ατομικούς τύπους και τις προτασιακές μεταβλητές και στη συνέχεια κάθε φόρμουλα $(\phi \to \psi)$ την ταυτίσουμε με τον τύπο $(\phi \to \psi)$ και κάθε φόρμουλα $(\phi \wedge \psi)$ με τον τύπο $(\phi \times \psi)$ μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι φόρμουλες και οι τύποι ταυτίζονται.*

Για παράδειγμα η προτασιακή φόρμουλα $(A \to B) \wedge (C \to A)$ είναι ο τύπος $(A \to B) \times (C \to A)$, όπου A, B, C είναι προτασιακές μεταβλητές (ή ατομικοί τύποι).

Θα χρησιμοποιούμε τα γράμματα A, B, C για τις προτασιακές μεταβλητές (το ίδιο για τους ατομικούς τύπους) και τα ϕ, ψ,... για τις προτασιακές φόρμουλες (ή το ίδιο για τους τύπους του συστήματος Church).

Ορισμός 10.15 *Σε κάθε απόδειξη Π της φόρμουλας ϕ από τα πακέτα υποθέσεων $[\phi_1]_{i_1}, \ldots, [\phi_k]_{i_k}$ θα αντιστοιχήσουμε με μοναδικό τρόπο έναν όρο N τύπου ϕ (δηλαδή N^ϕ) με ελεύθερες μεταβλητές $x_{i_1}^{\phi_1}, \ldots, x_{i_k}^{\phi_k}$ του αρχικού συστήματος Church με γινόμενο τύπων, ως εξής*

(ο ορισμός θα δίνει και την αντίστροφη αντιστοιχία, δηλαδή για κάθε όρο N μια απόδειξη του συστήματος Church. Για να έχουμε την ακριβή αντιστοιχία θα υποθέσουμε ότι αν x_i^σ και x_j^τ είναι μεταβλητές του συστήματος με τύπους και αν $\sigma \neq \tau$ τότε και οι δείκτες i και j θα είναι διαφορετικοί, δηλαδή $i \neq j$. Εδώ π.χ. το i είναι ο δείκτης σε μια αρίθμηση των συμβόλων μεταβλητών του αρχικού συστήματος Church):

A1. Σε κάθε απόδειξη ϕ^i (από το πακέτο υποθέσεων $[\phi]_i$) αντιστοιχούμε τη μεταβλητή x_i^ϕ (και αντιστρόφως).

A2. Αν $\overset{\Pi_1}{\phi}$ και $\overset{\Pi_2}{\psi}$ αντιστοιχούν στα N^ϕ και M^ψ τότε η απόδειξη $\dfrac{\overset{\Pi_1}{\phi} \qquad \overset{\Pi_2}{\psi}}{\phi \wedge \psi}$ αντιστοιχεί στον όρο $\langle N^\phi, M^\psi \rangle$ (τύπου $\phi \wedge \psi$).

A3. Αν η $\overset{\Pi}{\phi \wedge \psi}$ αντιστοιχεί στον $N^{\phi \wedge \psi}$ τότε η απόδειξη $\dfrac{\overset{\Pi}{\phi \wedge \psi}}{\phi}$ αντιστοιχεί στον $\pi^1 M$ και η $\dfrac{\overset{\Pi}{\phi \wedge \psi}}{\psi}$ αντιστοιχεί στον $\pi^2 M$.

A4. Αν $\overset{\overset{[\phi]_i}{\Pi}}{\psi}$ αντιστοιχεί στον όρο M^ψ τότε η απόδειξη $\dfrac{\overset{\overset{\overline{[\phi]}_i}{\Pi}}{\psi}}{\phi \to \psi}\, i$ αντιστοιχεί στον όρο $\lambda x_i^\phi M^\psi$.

A5. Αν $\overset{\Pi}{\psi}$ αντιστοιχεί στον όρο M^ψ τότε $\dfrac{\overset{\Pi}{\psi}}{\phi \to \psi}$ αντιστοιχεί στον όρο $\lambda x^\phi M^\psi$ τύπου $(\phi \to \psi)$ (όπου x μπορεί να είναι το πρώτο νέο σύμβολο μεταβλητής). Εδώ στην απόδειξη δεν εκφορτίζουμε κανένα πακέτο υποθέσεων και αντίστοιχα στον όρο χρησιμοποιούμε τη μεταβλητή x^ϕ που δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον M^ψ.

Η αντιστοιχία που ορίσαμε είναι ισομορφισμός διότι σέβεται την «πράξη» της αναγωγής, δηλαδή αν μία απόδειξη Q προκύψει από την P με την αναγωγή ενός redex, τότε ο αντίστοιχος της Q όρος N προκύπτει από τον αντίστοιχο της P όρο M με την αναγωγή του αντίστοιχου redex. Θα παρουσιάσουμε την ισοδυναμία σε μία χαρακτηριστική περίπτωση.

Έστω ότι η απόδειξη $\overset{\Pi_2}{\phi}$ αντιστοιχεί στον όρο N^ϕ και η απόδειξη $\overset{\overset{[\phi]_i}{\Pi_2}}{\psi}$ στον όρο M^ψ (που έχει ελεύθερη μεταβλητή x_i^ϕ). Τότε σύμφωνα με την αντιστοιχία

Curry-Howard η απόδειξη $\dfrac{\begin{matrix}\overline{[\phi]}_i\\ \Pi_1\\ \psi\end{matrix}}{\phi \to \psi}\,\mathrm{i}$ αντιστοιχεί στον όρο $\lambda x_i^{\phi} M^{\psi}$ και η από-δειξη $\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\overline{[\phi]}_i\\ \Pi_1\\ \psi\end{matrix}}{\phi \to \psi}\,\mathrm{i} \qquad \begin{matrix}\Pi_2\\ \phi\end{matrix}}{\psi}$ (που είναι redex) αντιστοιχεί στον όρο $(\lambda x_i^{\phi} M^{\psi}) N^{\phi}$ (που κι αυτός είναι -το αντίστοιχο- redex). Είναι εύκολο να δούμε ότι το contractum της $\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\overline{[\phi]}_i\\ \Pi_1\\ \psi\end{matrix}}{\phi \to \psi}\,\mathrm{i} \qquad \begin{matrix}\Pi_2\\ \phi\end{matrix}}{\psi}$ που είναι η απόδειξη $\begin{matrix}\Pi_2\\ [\phi]_1\\ \Pi_1\\ \psi\end{matrix}$ αντιστοιχεί στον όρο $M^{\psi}[x_i^{\phi} := N]$ που είναι το contractum του $(\lambda x_i^{\phi} M^{\psi}) N^{\phi}$.

Παρατήρηση 10.16 *Ο ισομορφισμός των Curry-Howard εισάγει μια αναπάντεχη και εκπληκτική ισοδυναμία μεταξύ των αποδείξεων και των τυποποιημένων λ-όρων (προγραμμάτων). Αποκαλύπτει τις κρυμμένες υπολογιστικές πτυχές των μαθηματικών αποδείξεων. Η περίπτωση που εξετάσαμε είναι η στοιχειωδέστερη δυνατή. Η ισοδυναμία όμως αυτή μπορεί να επεκταθεί και στους υπόλοιπους συνδέσμους και ποσοδείκτες αλλά ακόμα και στα γνωστά αξιώματα των μαθηματικών. Αυτό οδηγεί στην αποκάλυψη του υπολογιστικού περιεχομένου των μαθηματικών θεωριών, ακόμα και με την έννοια ότι αναλύοντας μια μαθηματική απόδειξη μπορούμε να εξαγάγουμε ένα χρήσιμο πρόγραμμα για τον υπολογισμό μιας συνάρτησης! Είναι μια συναρπαστική και πολύ ζωντανή ερευνητική περιοχή.*

Βιβλιογραφία κεφαλαίου 10

Ξ3, Ξ4, Ξ7, Ξ9, Ξ10.

(Οι αναφορές παραπέμπουν στη βιβλιογραφία στο τέλος του βιβλίου)

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνική

Ε1. Μητακίδης, Γ. (1992). *Από τη Λογική στο Λογικό Προγραμματισμό.* Αθήνα: Καρδαμίτσας.

Ε2. Μπόριτσιτς, Μ. (1995). *Λογική και Απόδειξη.* Θεσσαλονίκη: Ζήτη.

Ε3. Τζουβάρας, Α. (1987). *Στοιχεία Μαθηματικής Λογικής.* Θεσσαλονίκη: Ζήτη.

Ε4. Τουρλάκης, Γ. (2011). *Μαθηματική Λογική - Θεωρία και Πράξη.* Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.

Ξένη

Ξ1. Ebbinghaus, H.D., Flum, J. and Thomas, W. (1994). *Mathematical Logic.* New York: Springer-Verlag.

Ξ2. Enderton, H.B. (1972). *A mathematical introduction to logic.* New York: Academic Press.

Ξ3. Gentzen, G.(1969). *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*, by M.E. Szabo (editor). Amsterdam: North–Holland.

Ξ4. Girard, J.Y. (1989). *Proofs and Types.* Cambridge: Cambridge University Press.

Ξ5. Goldstern, M. and Judah, H. (1995). *The Incompleteness Phenomenon.* Mass: A K Peters.

Ξ6. Hamilton, A.G. (1998). *Logic for mathematicians.* Cambridge: Cambridge University Press.

Ξ7. Kleene, S.C. (1962). *Introduction to Metamathematics.* Amsterdam: North-Holland.

Ξ8. Mendelson, E. (1997). *Introduction to Mathematical Logic.* London: Chapman & Hall/CRC.

Ξ9. Van Dalen, D. (1994). *Logic and Structure.* Berlin: Springer-Verlag.

Ξ10. Troelstra, A.S. and Schwichtenberg, H. (1996). *Basic Proof Theory.* Cambridge: Cambridge University Press.