

ΕΞΕΤΑΣΗ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΙΙ, ΣΕΜΦΕ, 12/06/2023

Θέμα 1. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:

(α) (1 μον.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n},$ (β) (1 μον.) $\sum_{n=2}^{\infty} n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right).$

Θέμα 2. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0,0) = 0$ και $f(x,y) = \frac{x^3 + xy^2 + y^3}{x^2 + y^2}$ αν $(x,y) \neq (0,0).$

(α) (1 μον.) Δείξτε, με χρήση του ορισμού της κατά κατεύθυνσης παραγώγου, ότι η f έχει στο $(0,0)$ κατά κατεύθυνση παράγωγο $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0)$ για κάθε $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ μοναδιαίο διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$.

(β) (1 μον.) Εξετάστε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0).$

Θέμα 3. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0,0) = 0$ και $f(x,y) = \frac{|x| \sin x + y^3}{|x| + |y|}$ αν $(x,y) \neq (0,0).$

(1) (0,5 μον.) Εξετάστε αν η f είναι συνεχής στο $(0,0).$

(2) (0,5 μον.) Βρείτε τις $f_x(0,0)$ και $f_y(0,0).$

(3) (1 μον.) Εξετάστε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0).$

Θέμα 4. (1) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, C^2$ -συνάρτηση τέτοια ώστε $f_x + f_y = 0.$

(α) (0,5 μον.) Δείξτε ότι $f_{xx} = f_{yy}.$

(β) (0,5 μον.) Αν επιπλέον $|f_{xx}(x,y)| < |f_{xy}(x,y)|$ για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ έχει η f τοπικά ακρότατα?

(2) (1 μον.) Μελετήστε ως προς τα τοπικά ακρότατα την συνάρτηση $f(x,y) = x^3 - xy + y^2.$

Θέμα 5. (1) (1 μον.) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ C^2 -συνάρτηση. Αν $f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ και $f_{xx}(0,0) = f_{yy}(0,0) = 2$ εξετάστε αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{x^2 + y^2}$$

(Υπόδειξη: Μπορείτε να θέσετε $b = f_{xy}(0,0)$ και να διακρίνετε δύο περιπτώσεις $b = 0$ και $b \neq 0$)

(2) (1 μον.) Δείξτε ότι η εξίσωση $x^2 e^y + x^2 + y - 1 = 0$ ορίζει πεπλεγμένα σε μια περιοχή του σημείου $(0,1)$ μια μοναδική παραγωγίσιμη συνάρτηση $y = f(x)$. Βρείτε τον τύπο της $f'(x)$ και δείξτε ότι η f έχει ολικό μέγιστο στο $x = 0.$