**ΕΞΕΤΑΣΗ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΙΙ, ΣΕΜΦΕ, 27 ΙΟΥΝΙΟΥ 2022**

**ΝΑ ΓΡΑΦΟΥΝ 4 ΑΠΟ ΤΑ 5 ΘΕΜΑΤΑ. ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ 1h και 30′**

**ΘΕΜΑ 1. (2 μον.)** Δίνεται η δυναμοσειρά $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n} x^n$.

(i) (1 μον.) Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης $R$. Για ποιά $x \in \mathbb{R}$ η δυναμοσειρά συγκλίνει?

(ii) (1 μον.) Δείξτε ότι $f'(x) = \frac{1}{2-x}$ και υπολογίστε τον τύπο της $f(x)$ για κάθε $x \in (-R, R)$.

**ΘΕΜΑ 2. (2,5 μον.)** (α) (i) (0,5 μον.) Συγκλίνει ή όχι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n = -1+1-1+\ldots$ και γιατί;

(ii) (0,5 μον.) Υπάρχει ακολουθία πραγματικών αριθμών $(a_n)$ με $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ τέτοια ώστε η σειρά $a_1 - a_2 + a_3 - \ldots$ να μην συγκλίνει?

(β) (1,5 μον.) Εξετάστε ως προς την σύγκλιση τις παρακάτω σειρές:

$$\text{(i)}(0,5 \text{ μον.}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right), \qquad \text{(ii)}(1 \text{ μον.}) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$$

**ΘΕΜΑ 3. (3 μον.)** (α) (2 μον.) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(0,0) = 0$ και $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$ αν $(x,y) \neq (0,0)$. Δείξτε τα επόμενα:

(i) (0,5 μον. ) Η $f$ είναι συνεχής στο $(0,0)$.

(ii) (0,5 μον. ) Για κάθε $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ με $u_1^2 + u_2^2 = 1$ η $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0)$ υπάρχει.

(iii) ( 1 μον.) Η $f$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$.

(β) (1 μον.) Έστω $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ και $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $(x_0, y_0)$. Αν υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x_0, y_0) = c$ για όλα τα $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ με $u_1^2 + u_2^2 = 1$, δείξτε ότι $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = c = 0$ .

(με $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x,y)$ συμβολίζουμε την παράγωγο της $f$ στο σημείο $(x,y)$ κατά την κατεύθυνση $\mathbf{u}$)

**ΘΕΜΑ 4. (3 μον.)** (α) (1 μον.) Έστω $C^2$ συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(0,0) = 1$, $f_x(0,0) = 1$, $f_y(0,0) = 2$ και $f_{xx}(x,y) = f_{yy}(x,y) = f_{xy}(x,y) = 4$, για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Βρείτε τον τύπο της $f$.

(β) (i) (1 μον.) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση και έστω $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ με $f(x_0, y_0) = f(0,0)$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f_x(\xi x_0, \xi y_0) x_0 + f_y(\xi x_0, \xi y_0) y_0 = 0$.

(ii) (1 μον.) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $f_x(x,y)x + f_y(x,y)y \geq 0$ για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Δείξτε ότι η $f$ έχει στο $(0,0)$ ολικό ελάχιστο.

**ΘΕΜΑ 5. (2,5 μον.)** (α) (1,5 μον.) Βρείτε και ταξινομήστε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης

$$f(x,y) = x^4 + 2x^2 y + y^2 + \frac{2}{3} y^3$$

(β) (1 μον.) Δείξτε ότι υπάρχει παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$, όπου $I$ ανοικτή περιοχή του 0 τέτοια ώστε

$$x e^{f(x)} + f(x) e^x = \cos(x f(x)).$$

Επίσης να υπολογίσετε την $f'(0)$.