

## ΕΞΕΤΑΣΗ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΙΙ, ΣΕΜΦΕ, 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2022

**ΘΕΜΑ 1.** Εξετάστε ως προς την σύγκλιση τις παρακάτω σειρές:

$$(i)(1 \text{ μον.}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! 2^n}{n^n} \quad (ii)(0,5 \text{ μον.}) \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad (iii)(0,5 \text{ μον.}) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

**ΘΕΜΑ 2.** Δίνεται η δυναμοσειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ .

(i) (1 μον.) Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης  $R$  και το ακριβές διάστημα σύγκλισης.

(ii) (1 μον.) Βρείτε τον τύπο της συνάρτησης  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ ,  $x \in (-R, R)$ .

**ΘΕΜΑ 3.** Έστω

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{αν } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{αν } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(1) (1 μον.) Δείξτε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $(0, 0)$ .

(2) (1 μον.) Δείξτε ότι η  $f$  έχει κατευθυνόμενες παραγώγους στο  $(0, 0)$  ως προς οποιαδήποτε κατεύθυνση  $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ .

(3) (1 μον.) Εξετάστε αν η  $f$  διαφορίσιμη στο  $(0, 0)$ .

**ΘΕΜΑ 4.** (α) (1,5 μον.) Μελετήστε ως προς τα τοπικά ακρότατα την συνάρτηση

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy$$

(β) (1,5 μον.) Έστω  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  με συνεχείς μερικές παραγώγους έως και δεύτερης τάξης και τέτοια ώστε (i)  $f(0, 0) = f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$  και (ii) Υπάρχει  $M \in \mathbb{R}$  με  $|f_{xx}(x, y)|, |f_{xy}(x, y)|, |f_{yy}(x, y)| \leq M$  για κάθε  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Δείξτε ότι  $|f(x, y)| \leq \frac{M}{2} (|x| + |y|)^2$ .

**ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 1 ώρα και 30'**