

ΕΞ ΑΠΟΣΤΑΣΕΩΣ ΕΞΕΤΑΣΗ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΙΙ, ΣΕΜΦΕ, 7 ΙΟΥΝΙΟΥ 2021

ΟΜΑΔΑ Α

Να απαντήσετε σε ακριβώς ΤΡΙΑ από τα παρακάτω τέσσερα θέματα.

ΘΕΜΑ 1. (α) Έστω $a, b \in \mathbb{R}$.

(i) (0,5 μον) Δείξτε ότι $\frac{ax + by}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \sqrt{a^2 + b^2}$ για κάθε $(x, y) \neq (0, 0)$.

(ii) (1,5 μον) Για ποιές τιμές των $a, b \in \mathbb{R}$ το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{ax + by}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ υπάρχει;

(β) (1,5 μον) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$ και τέτοια ώστε $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \ell \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $f(0, 0) = f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ και $\ell = 0$.

Λύση: (α) (i) Άμεσο από ανισότητα Cauchy-Schwarz:

$$\frac{ax + by}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{(a, b) \cdot (x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

(ii) Αν $a = b = 0$ τότε προφανώς το όριο υπάρχει και είναι ίσο με 0. Ισχυριζόμαστε ότι για κάθε άλλη τιμή των a και b το όριο δεν υπάρχει. Πράγματι, χρησιμοποιώντας τις ακολουθίες $(1/n, 0)$, $(0, 1/n)$ και $(1/n, 1/n)$ βλέπουμε εύκολα ότι αν υπήρχε το όριο $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{ax + by}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ τότε θα έπρεπε

$$a = b = \frac{a + b}{\sqrt{2}}$$

και άρα $a = b = 0$.

(β) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$ θα έχουμε ότι

$$(1) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f_x(0, 0)x - f_y(0, 0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

Επίσης η f είναι και συνεχής στο $(0, 0)$ και άρα

$$f(0, 0) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sqrt{x^2 + y^2} = \ell \cdot 0 = 0.$$

Αντικαθιστώντας στην (1) και λαμβάνοντας ψόψην ότι $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \ell$ παίρνουμε ότι

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f_x(0, 0)x - f_y(0, 0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \ell$$

Από το ερώτημα (α)(ii) (για $a = f_x(0, 0)$ και $b = f_y(0, 0)$) έπεται ότι $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = \ell = 0$. \square

ΘΕΜΑ 2. (α) (1 μον) Έστω C^2 συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$, $f_{xx}(0,0) = f_{yy}(0,0) = 0$ και $f_{xy}(0,0) = 1$. Εξετάστε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια

$$(i) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{|x| + |y|} \quad (ii) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{x^2 + y^2}.$$

(β) (1 μον.) Δίνεται C^1 συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0,0) = 0$ και $f_x(x,y) = 5x$ και $f_y(x,y) = 2y$ για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Δείξτε ότι $|f(x,y)| \leq 25x^2 + 4y^2$ για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(γ) (1,5 μον) Εξετάστε ως προς την παραγωγισιμότητα στο $(0,0)$ την συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y) = \frac{x^3}{x^2 + y^4}$ αν $(x,y) \neq (0,0)$ και $f(0,0) = 0$.

Λύση: (α) (i) Το πρώτης τάξης πολυώνυμο Taylor της f με κέντρο το $(0,0)$ είναι το $T_1(x,y) = 0$. Από το Θεώρημα Taylor έχουμε

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - T_1(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

Άρα

$$(2) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{|x| + |y|} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{|x| + |y|} = 0$$

αφού $\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{|x| + |y|} \leq 1$, για κάθε $(x,y) \neq (0,0)$.

((ii) Το δεύτερης τάξης είναι το $T_2(x,y) = xy$ και από το Θεώρημα Taylor έχουμε

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - xy}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - T_2(x,y)}{x^2 + y^2} = 0$$

Απο την σχέση αυτή παρατηρούμε ότι το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{x^2 + y^2}$ δεν υπάρχει, αφού διαφορετικά θα έπρεπε να υπήρχε και το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ που όμως, όπως ελέγχεται εύκολα με τις ακολουθίες $(1/n, 0)$ και $(1/n, 1/n)$, δεν υπάρχει.

(β) Για $(x,y) = (0,0)$ η ανισότητα προφανώς ισχύει. Έστω $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ με $(x,y) \neq (0,0)$. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής έχουμε ότι υπάρχει (ξ, η) στο ανοικτό ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα $(0,0)$ και (x,y) τέτοιο ώστε

$$(3) f(x,y) - f(0,0) = f_x(\xi, \eta)(x - 0) + f_y(\xi, \eta)(y - 0) = 5\xi \cdot x + 2\eta \cdot y$$

Από την (3) και από την ανισότητα Cauchy-Schwarz παίρνουμε

$$(4) |f(x,y)| = |f(x,y) - f(0,0)| = |5\xi x + 2\eta y| \leq \sqrt{25\xi^2 + 4\eta^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$$

Επειδή το (ξ, η) ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα $(0,0)$ και (x,y) , έπεται ότι $|\xi| \leq |x|$ και $|\eta| \leq |y|$ και άρα $\sqrt{25\xi^2 + 4\eta^2} \leq \sqrt{25x^2 + 4y^2}$ οπότε από την (4) $|f(x,y)| \leq \sqrt{25x^2 + 4y^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = 25x^2 + 4y^2$.

(γ) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$ αν και μόνο αν είναι μερικώς παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$ και επιπλέον

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)x - f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Έχουμε

$$f_x(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$$

και

$$f_y(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0$$

Επίσης

$$\frac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)x - f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = -\frac{xy^4}{(x^2 + y^4)\sqrt{x^2 + y^2}}$$

για κάθε $(x, y) \neq (0, 0)$. Αν $x = 0$ τότε προφανώς

$$(5) \quad \frac{xy^4}{(x^2 + y^4)\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

για κάθε $y \neq 0$. Διαφορετικά, από την ανισότητα $a^2 + b^2 \geq 2ab \geq ab$, $a, b \geq 0$, (για $a = |x|$, $b = y^2$) έπεται ότι $x^2 + y^4 \geq |x|y^2$ και άρα

$$(6) \quad \left| \frac{xy^4}{(x^2 + y^4)\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot |y| \leq |y|$$

Από τις (5) και (6) έπεται ότι

$$\left| \frac{xy^4}{(x^2 + y^4)\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq |y|$$

για κάθε $(x, y) \neq (0, 0)$ και άρα, από το κριτήριο παρεμβολής,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^4}{(x^2 + y^4)\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$. □

ΘΕΜΑ 3. (α) (1 μον.) Έστω C^2 συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με το $(0, 0)$ σαγματικό σημείο και $f(0, 0) = 0$. Δείξτε ότι υπάρχουν δύο ακολουθίες (x_n, y_n) και (x'_n, y'_n) στον \mathbb{R}^2 τέτοιες ώστε $\lim(x_n, y_n) = \lim(x'_n, y'_n) = (0, 0)$ και $f(x'_n, y'_n) < 0 < f(x_n, y_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(β) (1 μον.) Βρείτε και ταξινομήστε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x, y) = x^4 - 4xy + 2y^2 - 10$.

(γ) (1,5 μον.) Έστω C^2 συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τις ιδιότητες (i) $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$, (ii) $f_{xx}(x, y) = f_{yy}(x, y) \geq 0$ και $f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}^2(x, y) = 0$, για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Δείξτε ότι το $(0, 0)$ είναι σημείο ολικού ελαχίστου για την f .

Λύση: (α) Αφού το $(0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο δεν είναι τοπικό ακρότατο και άρα σε κάθε περιοχή του $(0, 0)$ υπάρχουν (x, y) και (x', y') με $f(x', y') < f(0, 0) < f(x, y) \Leftrightarrow f(x', y') < 0 < f(x, y)$. Άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε (x_n, y_n) και (x'_n, y'_n) στον ανοικτό δίσκο κέντρου $(0, 0)$ και ακτίνας $r_n = 1/n$ με $f(x'_n, y'_n) < 0 < f(x_n, y_n)$. Επειδή $1/n \rightarrow 0$ έπεται ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (x'_n, y'_n) = (0, 0)$.

(β) Έχουμε $f(x, y) = x^4 - 4xy + 2y^2 - 10$ και άρα

$$\begin{aligned}f_x(x, y) &= 4x^3 - 4y, f_y(x, y) = -4x + 4y, \\f_{xx}(x, y) &= 12x^2, f_{xy}(x, y) = -4, f_{yy}(x, y) = 4\end{aligned}$$

και άρα

$$(7) \quad \Delta(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}^2(x, y) = 48x^2 - 16$$

Τα κρίσιμα σημεία της f είναι οι λύσεις του συστήματος

$$\begin{aligned}x^3 - y &= 0 \\-x + y &= 0\end{aligned}$$

απ' όπου

$$y = x$$

και

$$x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x + 1 \text{ ή } x = -1$$

Άρα τα κρίσιμα σημεία είναι τα $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(-1, -1)$. Από την (7) έχουμε

$$\Delta(0, 0) < 0, \quad \Delta(1, 1) = \Delta(-1, -1) > 0$$

Επειδή $f_{xx}(1, 1) = f_{xx}(-1, -1) > 0$ έχουμε ότι τα σημεία $(-1, -1)$ είναι τοπικά ελάχιστα για την f ενώ το $(0, 0)$ σαγματικό.

(γ) Έστω $(x, y) \neq (0, 0)$. Από τον Τύπο Taylor έχουμε ότι υπάρχει (ξ, η) στο ανοικτό ευθ. τμήμα με άκρα τα $(0, 0)$ και (x, y) τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned}f(x, y) &= f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y + \frac{1}{2}(f_{xx}(\xi, \eta)x^2 + 2f_{xy}(\xi, \eta)xy + f_{yy}(\xi, \eta)y^2) \\&= f(0, 0) + \frac{1}{2}(f_{xx}(\xi, \eta)x^2 + 2f_{xy}(\xi, \eta)xy + f_{yy}(\xi, \eta)y^2)\end{aligned}$$

Αφού $f_{xx}(x, y) = f_{yy}(x, y) \geq 0$ και $f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) = f_{xy}^2(x, y)$, θέτοντας

$$a = f_{xx}(\xi, \eta) = f_{yy}(\xi, \eta)$$

έχουμε ότι $a \geq 0$ και $|f_{xy}(\xi, \eta)| = a$.

Διακρίνουμε τις επόμενες δυνατές περιπτώσεις:

(1) $a = 0$. Τότε $f_{xy}(\xi, \eta) = 0$ και

$$f(x, y) = f(0, 0) + \frac{1}{2}(f_{xx}(\xi, \eta)x^2 + 2f_{xy}(\xi, \eta)xy + f_{yy}(\xi, \eta)y^2) = f(0, 0).$$

(2) $a > 0$ και $f_{xy}(\xi, \eta) = -a$. Τότε

$$\begin{aligned}f(x, y) &= f(0, 0) + \frac{1}{2}(f_{xx}(\xi, \eta)x^2 + 2f_{xy}(\xi, \eta)xy + f_{yy}(\xi, \eta)y^2) \\&= f(0, 0) + \frac{a}{2}(x^2 - 2xy + y^2) = f(0, 0) + \frac{a}{2}(x - y)^2 \geq f(0, 0)\end{aligned}$$

(3) $a > 0$ και $f_{xy}(\xi, \eta) = a$. Τότε

$$\begin{aligned}f(x, y) &= f(0, 0) + \frac{1}{2}(f_{xx}(\xi, \eta)x^2 + 2f_{xy}(\xi, \eta)xy + f_{yy}(\xi, \eta)y^2) \\&= f(0, 0) + \frac{a}{2}(x^2 + 2xy + y^2) = f(0, 0) + \frac{a}{2}(x + y)^2 \geq f(0, 0)\end{aligned}$$

Άρα σε κάθε περίπτωση $f(x, y) \geq f(0, 0)$. Επειδή το (x, y) είναι ένα οποιοδήποτε σημείο του \mathbb{R}^2 διάφορο του $(0, 0)$ έπεται ότι η f έχει στο $(0, 0)$ ολικό ελάχιστο. \square

ΘΕΜΑ 4. (α) Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή όχι, δικαιολογώντας την απάντησή σας:

(i) (0,5 μον.) Έστω (a_n) αύξουσα ακολουθία με $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}(a - a_n)$ συγκλίνει.

(ii) (0,5 μον.) Έστω (a_n) ακολουθία θετικών αριθμών τέτοια ώστε η ακολουθία $(n^2 a_n)$ είναι άνω φραγμένη. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

(iii) (0,5 μον.) Έστω $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ φθίνουσα και μηδενική ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ αποκλίνει. Τότε η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει για $x \in [-1, 1)$ και αποκλίνει παντού αλλού.

(β) (i) (1 μον.) Εξετάστε ως προς την σύγκλιση τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\sin \frac{1}{n}\right)$.

(ii) (1 μον.) Βρείτε όλα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$ συγκλίνει.

Λύση: (i) Αφού (a_n) αύξουσα με $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$, έπεται ότι η $b_n = a - a_n$ είναι φθίνουσα με $\lim b_n = 0$. Από κριτήριο Leibniz η εναλλάσσουσα σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (a - a_n)$ συγκλίνει.

(ii) Έχουμε ότι υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ με $0 < n^2 a_n \leq M \Leftrightarrow a_n \leq \frac{M}{n^2}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

συγκλίνει, από κριτήριο σύγκρισης και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

(iii) Αφού η (a_n) είναι φθίνουσα και μηδενική ακολουθία, η εναλλάσσουσα σειρά $a_0 - a_1 + a_2 - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ συγκλίνει (κριτήριο Leibniz). Άρα η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει για $x = -1$ και συνεπώς, αν R είναι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς, θα πρέπει $R \geq 1$. Από την άλλη μεριά, $R \leq 1$, αφού από υπόθεση η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ αποκλίνει που σημαίνει ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ αποκλίνει για $x = 1$. Άρα $R = 1$ και η δυναμοσειρά συγκλίνει για $x \in [-1, 1)$ και αποκλίνει παντού αλλού.

(β) (i) Έχουμε $\arctan\left(\sin \frac{1}{n}\right) > 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\arctan\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\arctan\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - \arctan 0}{x - 0} = (\arctan x)'_{x=0} = \frac{1}{1+x^2} \Big|_{x=0} = 1$$

και ομοίως

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Επειδή η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ δεν συγκλίνει, από οριακό κριτήριο σύγκλισης, έπεται και ότι και η $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ δεν συγκλίνει.

(ii) Θέτουμε $a_n = \frac{n!}{n^n}$. Έχουμε

$$(8) \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

και άρα $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1/e$. Συνεπώς $R = e$ και αν $|x| < e$ η δυναμοσειρά συγκλίνει ενώ αν $|x| > e$ αποκλίνει. Μένει να εξετάσουμε την σύγκλιση στα σημεία $x = e$ και $x = -e$.

Στο $x = e$ η δυναμοσειρά παίρνει την μορφή $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, όπου $b_n = a_n e^n$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} \stackrel{(8)}{=} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n e = \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} > 1$$

αφού $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$. Άρα η (b_n) είναι γνησίως αύξουσα, οπότε η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ δεν συγκλίνει. Συνεπώς η δυναμοσειρά δεν συγκλίνει για $x = e$.

Στο $x = -e$ η δυναμοσειρά παίρνει την μορφή $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n e^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ που πάλι δεν συγκλίνει. Πράγματι, αν η $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ συνέκλινε θα έπρεπε $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n b_n = 0$. Αλλά τότε και $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$, που είναι άτοπο, αφού η (b_n) είναι γνησίως αύξουσα και άρα $b_n \geq b_1 = e$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Από τα παραπάνω έχουμε ότι η δυναμοσειρά συγκλίνει σε κάθε $x \in (-e, e)$ και αποκλίνει παντού αλλού. \square