Άσκηση 2

Μέτρηση της επιτάχυνσης της βαρύτητας με τη μέθοδο του φυσικού εκκρεμούς

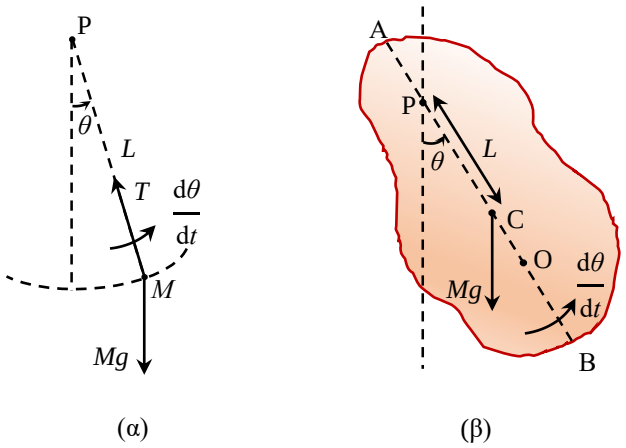
2.1. Σκοπός

Σκοπός της άσκησης είναι ο προσδιορισμός της επιτάχυνσης της βαρύτητας από μετρήσεις της περιόδου των ταλαντώσεων ενός φυσικού εκκρεμούς για διάφορες θέσεις του άξονα περιστροφής του.

2.2. Γενικά

2.2.1. Απλό εκκρεμές

Το απλό ή μαθηματικό εκκρεμές αποτελείται από μια σημειακή μάζα M, προσδεμένη στο ένα άκρο μιας αβαρούς ράβδου, ή ενός αβαρούς, μη εκτατού νήματος, με μήκος L (Σχ. 2.1.α). Το άλλο άκρο της ράβδου ή του νήματος, P, είναι σταθερό και η μάζα μπορεί να κινείται ελεύθερα γύρω από αυτό, υπό την επίδραση ομογενούς βαρυτικού πεδίου, g, εκτελώντας ταλαντώσεις σε κατακόρυφο επίπεδο.



Σχήμα 2.1. (α) Το απλό και (β) το φυσικό εκκρεμές.

Αν αγνοηθούν οι δυνάμεις τριβής, και για μικρές τιμές της γωνίας θ, αποδεικνύεται ότι η μάζα εκτελεί απλή αρμονική κίνηση με περίοδο ταλάντωσης

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{2.1}$$

Το απλό εκκρεμές είναι ένα εξιδανικευμένο μοντέλο, καθώς στην πράξη η ράβδος ή το νήμα έχουν μάζα και η μάζα M δεν είναι σημειακή. Κάθε πραγματικό εκκρεμές είναι ουσιαστικά ένα «φυσικό εκκρεμές».

2.2.2. Φυσικό εκκρεμές

Φυσικό εκκρεμές είναι κάθε στερεό σώμα, με κάποια κατανομή μάζας, αναρτημένο από έναν σταθερό οριζόντιο άξονα που δεν διέρχεται από το κέντρο μάζας του, το οποίο μπορεί ελεύθερα

να περιστρέφεται και να ταλαντώνεται γύρω από αυτό τον άξονα. Στο Σχ. 2.1.β απεικονίζεται ένα στιγμιότυπο της κίνησης ενός σώματος μάζας M αναρτημένου από το σημείο P, το οποίο απέχει απόσταση L από το κέντρο μάζας του σώματος, C, και η ευθεία PC σχηματίζει γωνία θ με την κατακόρυφη. Η ροπή του βάρους γύρω από τον οριζόντιο άξονα περιστροφής που διέρχεται από το P είναι

$$\tau = -MgL\sin\theta \tag{2.2}$$

όπου το αρνητικό πρόσημο δείχνει ότι η ροπή, τ, έχει φορά αντίθετη από αυτήν της γωνιακής μετατόπισης, θ, δρώντας ως ροπή επαναφοράς.

Αν η ροπή αδράνειας του σώματος ως προς τον άξονα P είναι I_p τότε, όταν αγνοήσουμε τις δυνάμεις τριβής, η εξίσωση κίνησης του σώματος είναι

$$I_p \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -MgL\sin\theta \tag{2.3}$$

Αν η γωνία θ περιοριστεί σε μικρές τιμές, τότε $\sin\theta \approx \theta$, και η Εξ. (2.3) γίνεται

$$I_p \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -MgL\theta \tag{2.4}$$

η οποία είναι η γνωστή εξίσωση της απλής αρμονικής κίνησης, με γενική λύση την

$$\theta = \theta_0 \sin\left(2\pi\frac{t}{T} + \varphi\right) \tag{2.5}$$

όπου θ_0 είναι το πλάτος της ταλάντωσης, φ η σταθερά φάσης και

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_p}{MgL}} \tag{2.6}$$

είναι η περίοδος της ταλάντωσης.

Η τελευταία εξίσωση μπορεί να γραφεί σε απλούστερη μορφή όταν εισάγουμε την έννοια της **ακτίνας αδράνειας**. Αν I_c είναι η ροπή αδράνειας του σώματος ως προς έναν άξονα παράλληλο προς τον P που περνά από το κέντρο μάζας του σώματος, τότε η ακτίνα αδράνειας ορίζεται ως

$$K_c = \sqrt{\frac{I_c}{M}} \tag{2.7}$$

και αποτελεί ένα μέτρο της κατανομής της μάζας του σώματος γύρω από αυτό τον άξονα.

Από το θεώρημα των παραλλήλων αξόνων έχουμε

$$I_p = I_c + ML^2 \tag{2.8}$$

οπότε, από τις Εξ. (2.6), (2.7) και (2.8), προκύπτει ότι

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{K_c^2 + L^2}{gL}} \tag{2.9}$$

Το μήκος

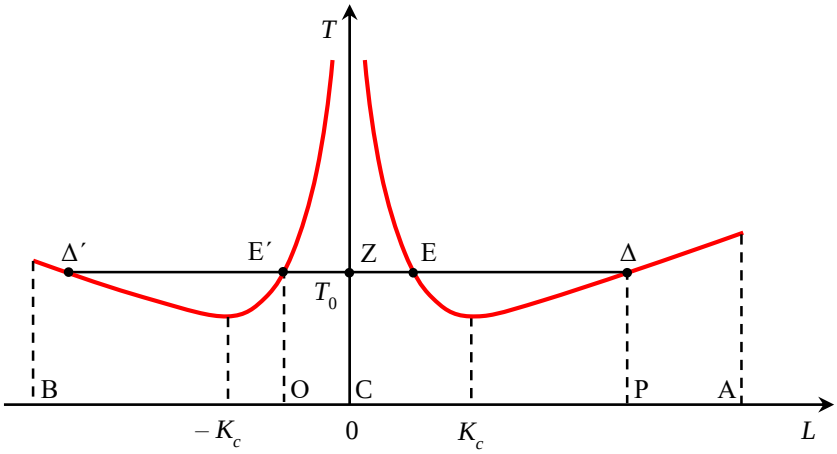
$$L_0 = L + \frac{K_c^2}{L} \tag{2.10}$$

είναι το μήκος ισοδύναμου απλού εκκρεμούς που θα είχε περίοδο ίση με αυτήν του φυσικού εκκρεμούς και εξαρτάται μόνο από την κατανομή της μάζας του φυσικού εκκρεμούς γύρω από τον άξονα περιστροφής του. Με άλλα λόγια, αν όλη η μάζα του σώματος συγκεντρωνόταν σε ένα σημείο Ο (Σχ. 2.1.β) τέτοιο ώστε $(OP) = L_0$, τότε θα είχαμε ένα απλό εκκρεμές με την ίδια περίοδο. Έτσι, βάσει των Εξ. (2.9) και (2.10), η περίοδος της ταλάντωσης του φυσικού εκκρεμούς είναι

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L_0}{g}} \tag{2.11}$$

2.3. Μέθοδος

Στο Σχ. 2.2 απεικονίζεται η περίοδος της ταλάντωσης του φυσικού εκκρεμούς ως συνάρτηση της απόστασης L (Εξ. 2.9). Η καμπύλη $T(L)$ αποτελείται από δύο κλάδους συμμετρικούς ως προς το κέντρο μάζας, για το οποίο $L = 0$ και $T = \infty$. Ο ένας κλάδος προκύπτει για θετικές τιμές του L (σημείο Ρ μεταξύ C και A στο Σχ. 2.1.α) και ο άλλος για αρνητικές (σημείο Ρ μεταξύ C και Β στο Σχ. 2.1.α). Ας σημειωθεί ότι στην τελευταία περίπτωση πρέπει να χρησιμοποιηθεί η απόλυτη τιμή της L στην Εξ. (2.9) γιατί, για να υπάρξουν ταλαντώσεις, πρέπει το κέντρο μάζας να είναι χαμηλότερα από τον άξονα Ρ. Επίσης, για καθέναν από τους δύο κλάδους της καμπύλης $T(L)$ υπάρχει ένα ελάχιστο στην T (στις αποστάσεις $L = \pm K_c$).



Σχήμα 2.2. Μεταβολή της περιόδου T του φυσικού εκκρεμούς συναρτήσει της απόστασης L του άξονα περιστροφής από το κέντρο μάζας του εκκρεμούς, κατά μήκος μιας σταθερής ως προς το σώμα ευθείας ΑΒ που περνά από το κέντρο μάζας του.

Η Εξ. (2.10) μπορεί να λάβει τη μορφή της δευτεροβάθμιας εξίσωσης

$$L^2 - L_0 L + K_c^2 = 0 \tag{2.12}$$

που έχει δύο ρίζες, L_1 και L_2, για τις οποίες ισχύει

$$L_1 + L_2 = L_0 \tag{2.13}$$

και

$$L_1 L_2 = K_c^2 \tag{2.14}$$

Οι ρίζες είναι και οι δύο είτε θετικές είτε αρνητικές, κάτι που σημαίνει ότι εκατέρωθεν του κέντρου μάζας υπάρχουν τέσσερα σημεία ανάρτησης (Ε, Δ και Ε΄, Δ΄ στο Σχ. 2.2) για τα οποία προκύπτει η ίδια περίοδος ταλάντωσης (η T_0 στο Σχ. 2.2). Επομένως, για την T_0 του Σχ. 2.2, προκύπτει ότι

$$L_0 = (ZE) + (Z\Delta) = (ZE') + (Z\Delta') = (E'\Delta) = (\Delta E) \tag{2.15}$$

$$K_c^2 = (ZE)(Z\Delta) = (ZE')(Z\Delta') \tag{2.16}$$

Η μέτρηση της περιόδου T για διάφορες τιμές της L επιτρέπει τη σχεδίαση μιας καμπύλης $T(L)$ όπως αυτή του Σχ. 2.2. Ακολούθως, για κάθε περίοδο T_0, με τη μέτρηση των μηκών ZE και $Z\Delta$ μπορούν να υπολογιστούν το μήκος L_0 ισοδύναμου απλού εκκρεμούς από την Εξ. (2.15), συνεπώς και η τιμή της g μέσω της Εξ. (2.11), αλλά και η ακτίνα αδράνειας K_c από την Εξ. (2.16).

Μια δεύτερη, ακριβέστερη μέθοδος προκύπτει όταν η Εξ. (2.9) γραφεί ως

$$\frac{LT^2}{4\pi^2} = \frac{K_c^2}{g} + \frac{1}{g} L^2 \tag{2.17}$$

που είναι της μορφής $y = a + \beta x$, όπου $x = L^2$, $y = LT^2/4\pi^2$, $a = K_c^2/g$ και $\beta = 1/g$.

Αν από τις μετρήσεις της περιόδου T για διάφορες τιμές της L σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της μεταβλητής y συναρτήσει της x, αναμένεται να προκύψει μια ευθεία με κλίση ίση με β, η οποία θα τέμνει τον άξονα των y στο σημείο $y = \alpha$. Μετρώντας πειραματικά τις τιμές των α και β, υπολογίζονται οι τιμές των L_0 και K_c από τις παραπάνω σχέσεις.

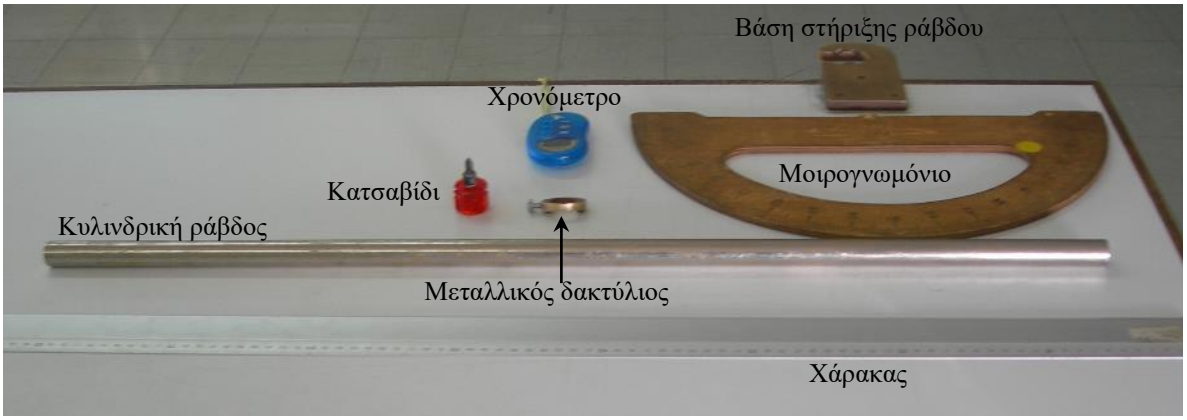
Κατά την μέτρηση της περιόδου, το πλάτος των ταλαντώσεων θα πρέπει να είναι μικρό, ώστε η προσέγγιση $\sin\theta \approx \theta$ να ισχύει σε ικανοποιητικό βαθμό. Η Εξ. (2.9) τροποποιείται για μεγάλα πλάτη θ_0 σε

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{K_c^2 + L^2}{gL}} \left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\theta_0}{2} + \frac{9}{64}\sin^4\frac{\theta_0}{2} + \ldots\right) \tag{2.18}$$

Για $\theta_0 \to 0$ η παρένθεση είναι ίση με τη μονάδα, για $\theta_0 = 5°$ είναι ίση με 1,0005, για 10° είναι 1,0019, για 20° είναι 1,0077 και για 30° είναι 1,0174. Έτσι, για πλάτος ταλάντωσης 5°, η πραγματική περίοδος είναι μεγαλύτερη κατά 0,05 % από την τιμή που προβλέπει η Εξ. (2.9). Επειδή η g είναι αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της T, η τιμή της g που θα βρεθεί γι' αυτό το πλάτος ταλάντωσης θα έχει διπλάσιο σχετικό σφάλμα, δηλαδή θα βρεθεί μικρότερη κατά 0,1 %. Για $\theta_0 = 10°$ αυτό το σφάλμα είναι 0,38 %, για 20° είναι 1,5 % και για 30° είναι 3,5 %. Για τον λόγο αυτό τα πλάτη των ταλαντώσεων δεν θα πρέπει να υπερβαίνουν τις 5°.

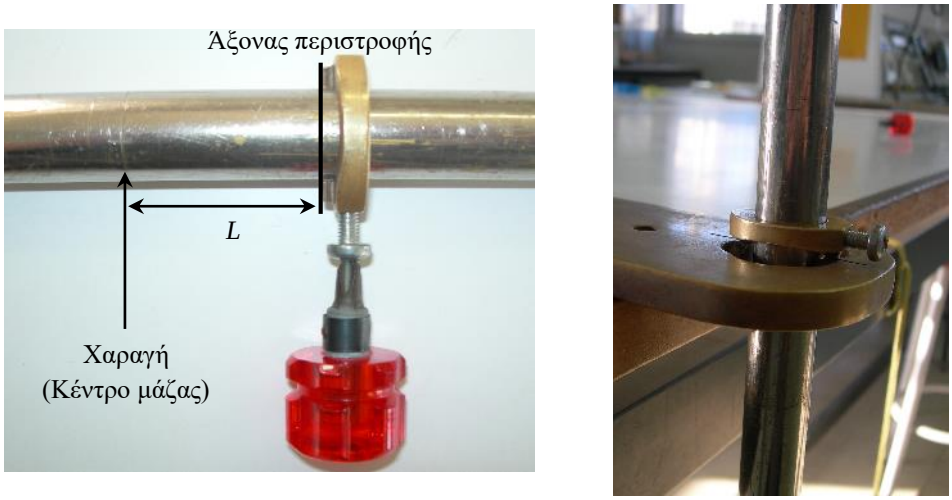
2.4. Πειραματική διάταξη

Το φυσικό εκκρεμές που θα χρησιμοποιηθεί στην άσκηση είναι μια κυλινδρική ράβδος από ορείχαλκο που φαίνεται στο Σχ. 2.3.



Σχήμα 2.3. Η πειραματική διάταξη της άσκησης.

Μία χαραγή στο μέσο της ράβδου σημειώνει τη θέση του κέντρου μάζας της (Σχ. 2.4). Ένας μεταλλικός δακτύλιος, που μπορεί να μετακινηθεί και να στερεωθεί σε οποιοδήποτε σημείο της ράβδου με το σφίξιμο μιας βίδας, έχει στο κάτω μέρος του μία ακμή που αποτελεί τον άξονα στήριξης της ράβδου σε ακίνητη βάση. Η ευθεία επαφής της βάσης με την ακμή είναι ο άξονας περιστροφής του εκκρεμούς, συνεπώς η απόσταση αυτού του άξονα από τη χαραγή (κέντρο μάζας) είναι η απόσταση L, η οποία μετριέται με τη βοήθεια ενός χάρακα.



Σχήμα 2.4. Η τοποθέτηση της ράβδου στην ακίνητη βάση και η απόσταση L.

Η διάταξη περιλαμβάνει επίσης ένα ψηφιακό χρονόμετρο χειρός, για τη μέτρηση των περιόδων ταλάντωσης, και ένα μοιρογνωμόνιο, για την εκτίμηση του πλάτους ταλάντωσης.

Βιβλιογραφία

1. C. Kittel et al., *Μηχανική (Μαθήματα Φυσικής Berkeley*, Τόμος 1) (Αθήνα, ^{2}1998), σ. 219-224, 272-273.
2. R. A. Serway, J. W. Jewett, *Φυσική για επιστήμονες και μηχανικούς: Μηχανική – Ταλαντώσεις και Μηχανικά Κύματα – Θερμοδυναμική – Σχετικότητα* (Αθήνα, 2012), Τ1.5.
3. D. Kleppner, R. Kolenkow, *Εισαγωγή στη Μηχανική* (Αθήνα, 2018), 7.7.
4. H. D. Young, R. A. Freedman, *Πανεπιστημιακή Φυσική με Σύγχρονη Φυσική*, Τόμος Α: *Μηχανική – Κύματα – Θερμοδυναμική* (Αθήνα, ^{4}2022), 14.5, 14.6.
5. ΕΜΠ, Τομέας Φυσικής, ΣΕΜΦΕ, *Εργαστηριακές Ασκήσεις Φυσικής*, Τόμος Ι (Αθήνα, ^{2}2010), σ. 57-66.

2.5. Εκτέλεση

Παρατηρήσεις

(α) Για μεγαλύτερη ακρίβεια στη μέτρηση των περιόδων ταλάντωσης, T, θα μετριέται ο συνολικός χρόνος t για έναν αριθμό, N, πλήρων ταλαντώσεων, οπότε η περίοδος της ταλάντωσης θα είναι $T = t/N$ με $\delta T = \delta t/N$, όπου $\delta t = 0{,}1$ s.

(β) Ως αρχή της ταλάντωσης θα θεωρείται η στιγμή μιας μέγιστης απομάκρυνσης και όχι όταν αφήνεται ελεύθερη η ράβδος, ή οποιαδήποτε άλλη τυχαία στιγμή.

(γ) Χρειάζεται προσοχή στην ακριβή καταμέτρηση του αριθμού των ταλαντώσεων, καθώς αυτή είναι η πιθανότερη πηγή μεγάλου σφάλματος.

1. Μετρήστε το μήκος H και τη διάμετρο δ της ράβδου και εκτιμήστε τα σφάλματα στις δύο μετρήσεις.

2. Στερεώστε τον δακτύλιο σε απόσταση από το κέντρο της ράβδου περίπου ίση με το 1/20 του ολικού μήκους αυτής. Τοποθετήστε τη ράβδο στη βάση της, ώστε να μπορεί να εκτελεί ταλαντώσεις.

3. Μετρήστε τον συνολικό χρόνο για ένα αριθμό πλήρων ταλαντώσεων της ράβδου για αρχικό πλάτος 5° και ακολούθως για αρχικό πλάτος 20°.

4. Με τον άξονα του εκκρεμούς στην ίδια απόσταση L από το κέντρο της ράβδου όπως στο προηγούμενο βήμα, μετρήστε τον συνολικό χρόνο για έναν αριθμό, N, πλήρων ταλαντώσεων της ράβδου, φροντίζοντας το πλάτος της ταλάντωσης να μην υπερβαίνει τις 5°.

5. Επαναλάβετε το βήμα 4 για άλλες 9 διαφορετικές θέσεις του άξονα περιστροφής, καταλήγοντας στο άκρο της ράβδου, και καταχωρήστε τις μετρήσεις στις πρώτες τέσσερις στήλες του Πίνακα Ι

Πίνακας Ι

A/A	L (m)	N	t (s)	T (s)	$x = L^2$ (m^2)	$y = LT^2/4\pi^2$ ($m \cdot s^2$)

2.6. Επεξεργασία των μετρήσεων

1. Υπολογίστε την περίοδο της ταλάντωσης για πλάτος 5° και για 20°. Υπάρχει διαφορά που να είναι μεγαλύτερη από τα σφάλματα δT στις δύο περιόδους; Αν ναι, αυτή είναι όσο προβλέπεται θεωρητικά;

2. Συμπληρώστε τις υπόλοιπες στήλες του Πίνακα Ι.

3. Από τις τιμές του Πίνακα Ι, σχεδιάστε τη μεταβολή της περιόδου T συναρτήσει της απόστασης L.

4. Επιλέξτε 3 διαφορετικές τιμές της περιόδου T και μετρήστε τα αντίστοιχα μήκη (ZE) και ($Z\Delta$). Με τη βοήθεια των Εξ. (2.15), (2.16) και (2.11), συμπληρώστε τον Πίνακα ΙΙ.

Πίνακας ΙΙ

T (s)	(ZE) (m)	($Z\Delta$) (m)	L_0 (m)	K_c (m)	g (m/s^2)

5. Υπολογίστε τη μέση τιμή και το σφάλμα των μεγεθών K_c και g.

6. Με βάση τις τιμές του Πίνακα Ι, σχεδιάστε την καμπύλη του y ως συνάρτηση του x. Εφόσον προκύψει γραμμική σχέση, όπως προβλέπει η Εξ. (2.18), εφαρμόστε τη μέθοδο ελαχίστων

τετραγώνων και προσδιορίστε τις τιμές των $\alpha \pm \delta\alpha$ και $\beta \pm \delta\beta$. Από τις τιμές αυτές προσδιορίστε τα μεγέθη $g \pm \delta g$ και $K_c \pm \delta K_c$.

7. Συγκρίνετε τις τιμές των μεγεθών g και K_c που υπολογίσατε στα βήματα 5 και 6, και σχολιάστε τις δύο μεθόδους που χρησιμοποιήθηκαν

8. Η επιτάχυνση της βαρύτητας στην Αθήνα είναι $g = 9{,}80\ \text{m/s}^2$, τιμή που θεωρείται ακριβής, ενώ για κύλινδρο μήκους H και ακτίνας α η ακτίνα αδράνειας υπολογίζεται θεωρητικά από την εξίσωση

$$K_c = \sqrt{H^2/12 + a^2/4}$$

Συμφωνούν τα αποτελέσματά σας με αυτές τις τιμές; Σχολιάστε την επιτυχία του πειράματος.