

B ΟΜΑΔΑ

Τα πιο σοβαρά προβλήματα είναι:

- Η άσχετη ενότητα με Dirichlet Σ.Σ.,
- Η ελλιπής χρήση του φασματικού θεωρήματος,
- Η σύγκριση $k > 3$ έναντι $k > |\lambda_0|$, και
- Η παραπλανητική τελική συζήτηση για $0 < k < |\lambda_0|$.

1. Ανισότητα ίχνους

Η απόδειξη είναι ουσιαστικά σωστή. Η ταυτότητα που χρησιμοποιείται είναι

$$u(1)^2 = \int_0^1 u(t)^2 dt + 2 \int_0^1 t u(t) u'(t) dt,$$

(Η ταυτότητα προκύπτει από απλή ολοκλήρωση κατά παράγοντες. Θεωρούμε τη συνάρτηση $t u(t)^2$. Τότε

$$\frac{d}{dt}(t u(t)^2) = u(t)^2 + 2t u(t) u'(t).$$

$$\text{Ολοκληρώνουμε στο } [0, 1]: \int_0^1 \frac{d}{dt}(t u(t)^2) dt = \int_0^1 u(t)^2 dt + 2 \int_0^1 t u(t) u'(t) dt.$$

$$\text{Το αριστερό μέλος είναι } [t u(t)^2]_0^1 = 1 \cdot u(1)^2 - 0 \cdot u(0)^2 = u(1)^2.$$

$$\text{Άρα } u(1)^2 = \int_0^1 u(t)^2 dt + 2 \int_0^1 t u(t) u'(t) dt.$$

Ακολουθεί *Cauchy-Schwarz* και *Young*. Παράγεται σωστά η εκτίμηση

$$|u(1)|^2 \leq \varepsilon \|u'\|_{L^2(0,1)}^2 + \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \|u\|_{L^2(0,1)}^2.$$

Χρειάζονται δύο αυστηροποιήσεις:

- Πρώτον, για $u \in H^1(0,1)$ **πρέπει να αναφερθεί** ότι χρησιμοποιείται ο απολύτως συνεχής εκπρόσωπος στη μία διάσταση.
- Δεύτερον, **ο χώρος θεωρείται ΠΑΝΤΑ πραγματικός και όχι μιγαδικός.**

2. Ασθενής διατύπωση, ελαχιστοποίηση, Lax-Milgram

Η ασθενής μορφή είναι σωστή. Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες προκύπτει ο όρος $-u(1)v(1)$:

$$\int_0^1 (-u'') v \, dx = -u'(1)v(1) + u'(0)v(0) + \int_0^1 u' v' \, dx.$$

Με τις συνοριακές συνθήκες

$$u'(0) = 0, \quad u'(1) = u(1),$$

παίρνουμε

$$a_k(u, v) = \int_0^1 f v \, dx.$$

Το πρόβλημα ελαχιστοποίησης είναι σωστά διατυπωμένο ως

$$J(u) = \frac{1}{2} a_k(u, u) - \int_0^1 f u \, dx,$$

αλλά η εργασία **δεν** πρέπει να λέει ότι προκύπτει μόνο επειδή η a_k είναι συμμετρική.

Για ύπαρξη μοναδικού ελαχιστοποιητή χρειάζεται επιπλέον coercivity, ώστε το J να είναι coercive και αυστηρά κυρτό.

Η απόδειξη της συνέχειας είναι σωστή. Η απόδειξη της πιεστικότητας δίνει

$$a_k(u, u) \geq \frac{1}{2} \|u'\|_{L^2}^2 + (k-3) \|u\|_{L^2}^2,$$

οπότε για $k > 3$ εφαρμόζεται το Θεώρημα Lax-Milgram.

Το $k > 3$ είναι επαρκής συνθήκη, όχι βέλτιστο κατώφλι.

Η κανονικότητα H^2 αναφέρεται σωστά στην ιδέα, αλλά πρέπει να ολοκληρωθεί.

Από την

$$-u'' = f - ku \in L^2(0,1)$$

παίρνουμε $u \in H^2(0,1)$, και έπειτα οι συνοριακές συνθήκες πρέπει να εξαχθούν από την ασθενή εξίσωση με νέα ολοκλήρωση κατά παράγοντες.

3. Αυτοσυζυγής και συμπαγής τελεστής λύσης

Ο σωστός τελεστής λύσης είναι

$$T: L^2(0,1) \rightarrow L^2(0,1), \quad Tf = u,$$

όπου u είναι η λύση του προβλήματος για δεδομένο f .

Για $k > 3$ είναι καλά ορισμένος και φραγμένος.

Η απόδειξη της αυτοσυζυγίας είναι σωστή ως προς τον πυρήνα της:

Αν $u = Tf$ και $v = Tg$, τότε

$$(f, Tg)_{L^2} = a_k(u, v), \quad (g, Tf)_{L^2} = a_k(v, u).$$

Επειδή η a_k είναι συμμετρική, παίρνουμε

$$(Tf, g)_{L^2} = (f, Tg)_{L^2}.$$

Η απόδειξη της συμπαγείας είναι επίσης σωστή:

Ο T είναι φραγμένος από τον $L^2(0,1)$ στον $H^1(0,1)$

και η εμφύτευση $H^1(0,1) \rightarrow L^2(0,1)$ είναι συμπαγής.

Το σοβαρό πρόβλημα είναι η ενότητα 4.1 με Dirichlet συνοριακές συνθήκες. Είναι άσχετη με το πρόβλημα, διότι οι συνοριακές συνθήκες εδώ είναι

$$u'(0) = 0, \quad u'(1) = u(1),$$

όχι

$$u(0) = u(1) = 0.$$

Επιπλέον η απόδειξη που δίνεται για τον Dirichlet τελεστή δείχνει μόνο συμμετρία, όχι πλήρη αυτοσυζυγία μη φραγμένου τελεστή.

4. Ακολουθία ιδιοτιμών

Η σχέση μεταξύ ιδιοτιμών του T και ιδιοτιμών του διαφορικού τελεστή είναι σωστή. Αν

$$Tu_n = \mu_n u_n,$$

τότε

$$-u_n'' = \left(\frac{1}{\mu_n} - k\right) u_n, \quad \lambda_n = \frac{1}{\mu_n} - k.$$

Όμως η χρήση του φασματικού θεωρήματος είναι ελλιπής.

Ένας συμπαγής αυτοσυζυγής τελεστής μπορεί γενικά να έχει πεπερασμένο πλήθος μη μηδενικών ιδιοτιμών.

Εδώ πρέπει να προστεθεί ότι:

Ο T είναι 1-1 και ότι, αν είχε πεπερασμένα πολλές μη μηδενικές ιδιοτιμές, τότε ο άπειρης διάστασης χώρος $L^2(0, 1)$ θα γινόταν πεπερασμένης διάστασης, άτοπο.

Η απόδειξη $\lambda_n \rightarrow +\infty$ πρέπει να βασιστεί στη θετικότητα του T :

$$(Tf, f)_{L^2} = a_k(Tf, Tf) \geq 0.$$

Άρα οι μη μηδενικές ιδιοτιμές μ_n είναι θετικές. Εφόσον $\mu_n \rightarrow 0$ και $\mu_n > 0$, συνεπώς

$$\lambda_n = \frac{1}{\mu_n} - k \rightarrow +\infty.$$

5. Ρητός υπολογισμός του φάσματος

Η περίπτωση $\lambda = 0$ αντιμετωπίζεται σωστά: η μόνη λύση είναι η μηδενική.

Για $\lambda = \omega^2 > 0$, η γενική λύση οδηγεί σωστά στην εξίσωση

$$\omega \tan \omega = -1.$$

Πρέπει όμως να αποκλειστεί ρητά η περίπτωση $\cos \omega = 0$ πριν γίνει η διαίρεση.

Επίσης η μοναδικότητα της ρίζας σε κάθε διάστημα πρέπει να τεκμηριωθεί με παράγωγο.

$$\omega_n \in \left(\frac{(2n-1)\pi}{2}, n\pi \right), \quad \lambda_n = \omega_n^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Το λάθος «αμέτρητα θετικά στοιχεία» πρέπει να διορθωθεί σε «αριθμήσιμα άπειρα θετικά στοιχεία».

Για $\lambda = -\mu^2 < 0$, η εργασία σωστά παίρνει

$$\mu \tanh \mu = 1,$$

και σωστά συμπεραίνει ότι υπάρχει ακριβώς μία θετική λύση μ_0 , άρα μία αρνητική ιδιοτιμή

$$\lambda_0 = -\mu_0^2.$$

Ο χαρακτηρισμός της $\cosh$ ως «υπεκθετικής» είναι λανθασμένος.

Είναι υπερβολική, ή εκθετικού τύπου, συνάρτηση.

6. Η κρίσιμη τιμή $k = |\lambda_0|$

Το βασικό συμπέρασμα είναι σωστό.

Για $k = |\lambda_0| = \mu_0^2$, η ομογενής εξίσωση έχει μη τετριμμένη λύση

$$u_0(x) = \cosh(\mu_0 x),$$

και η πιεστικότητα αποτυγχάνει, επειδή

$$a_k(u_0, u_0) = 0 \quad \text{με } u_0 \neq 0.$$

Η Fredholm εναλλακτική δίνει σωστά ότι το μη ομογενές πρόβλημα έχει λύση αν και μόνο αν

$$\int_0^1 f(x) \cosh(\mu_0 x) dx = 0.$$

Αν η συνθήκη ισχύει, οι λύσεις είναι

$$u = u_p + c \cosh(\mu_0 x).$$

Αν δεν ισχύει, δεν υπάρχει λύση.

Η τελική γενική συμπερασματολογία για $0 < k < |\lambda_0|$ είναι παραπλανητική. Για αυτές τις τιμές η μορφή δεν είναι θετικά coercive και το J δεν έχει ελάχιστο, αλλά το πρόβλημα εξακολουθεί να είναι μοναδικά επιλύσιμο μέσω φασματικής θεωρίας, επειδή το $-k$ δεν ανήκει στο φάσμα του A .

2. Περαιτέρω Διορθώσεις

Διόρθωση 1 - Κανόνας γινομένου στο H^1

Αυτό: Γράφεται ότι για $u \in H^1(I)$ εφαρμόζουμε απλώς τον κανόνα γινομένου

$$\frac{d}{dt}(tu(t)^2) = u(t)^2 + 2tu(t)u'(t).$$

Είναι λάθος / ελλιπές γιατί: Για H^1 συναρτήσεις ο κανόνας γινομένου δεν είναι κλασικός C^1 κανόνας. Ισχύει για τον απολύτως συνεχή εκπρόσωπο στη μία διάσταση, ή με επιχείρημα πυκνότητας.

Διορθώστε το σε: Να γραφεί:

«Στη μία διάσταση κάθε $u \in H^1(0,1)$ έχει απολύτως συνεχή εκπρόσωπο. Για αυτόν τον εκπρόσωπο η συνάρτηση $t \mapsto t|u(t)|^2$ είναι απολύτως συνεχής και ισχύει σχεδόν παντού $u(t)^2 + 2tu(t)u'(t)$.»

Διόρθωση 2 - Απόλυτες τιμές και μιγαδική περίπτωση

Αυτό: Χρησιμοποιείται συχνά $u(1)^2$ αντί για $|u(1)|^2$ και $u(t)^2$ αντί για $|u(t)|^2$.

Είναι λάθος / ελλιπές γιατί: Η εκφώνηση ζητά $|u(1)|^2$. Αν ο χώρος είναι μιγαδικός, η διατύπωση με u^2 είναι λάθος.

Διορθώστε το σε: Να γραφεί παντού $|u(1)|^2$. Σε μιγαδικό χώρο να χρησιμοποιηθεί η ταυτότητα

$$\frac{d}{dt}(t|u|^2) = |u|^2 + 2t\operatorname{Re}(u'\bar{u}).$$

Αν δηλωθεί ρητά ότι όλα γίνονται σε πραγματικούς χώρους, η αρχική μορφή είναι αποδεκτή, αλλά και πάλι η τελική ανισότητα πρέπει να γράφεται με απόλυτη τιμή.

Διόρθωση 3 - Ελαχιστοποίηση και συμμετρία

Αυτό: Η εργασία αφήνει να εννοηθεί ότι η ισοδυναμία με πρόβλημα ελαχιστοποίησης προκύπτει επειδή η a_k είναι συμμετρική.

Είναι λάθος / ελλιπές γιατί: Η συμμετρία δίνει την Euler-Lagrange μορφή, όχι ύπαρξη μοναδικού ελαχιστοποιητή. Χρειάζεται coercivity και συνέχεια της μορφής.

Διορθώστε το σε: Να γραφεί:

«Επειδή η a_k είναι συνεχής, συμμετρική και coercive, το συναρτησιακό

$$J(u) = \frac{1}{2} a_k(u, u) - (f, u)_{L^2}$$

είναι coercive και αυστηρά κυρτό. Άρα έχει μοναδικό ελαχιστοποιητή, του οποίου η Euler-Lagrange εξίσωση είναι η ασθενής διατύπωση.»

Διόρθωση 4 - Το $k > 3$ ως μη βέλτιστη επαρκής συνθήκη

Αυτό: Η εργασία καταλήγει σε $k > 3$ και στη συνέχεια το εμφανίζει σαν «κρίσιμη τιμή» που εξαρτάται από τη σταθερά ίχνους.

Είναι λάθος / ελλιπές γιατί: Το 3 προκύπτει από συγκεκριμένη μη βέλτιστη ανισότητα ίχνους. Δεν είναι το ακριβές φασματικό κατώφλι.

Διορθώστε το σε: Να γραφεί:

«Η εκτίμηση αποδεικνύει ύπαρξη και μοναδικότητα για $k > 3$. Η συνθήκη αυτή είναι επαρκής, όχι βέλτιστη. Από τη φασματική ανάλυση προκύπτει ότι το ακριβές κατώφλι θετικότητας είναι $k > |\lambda_0|$, όπου

$$\lambda_0 = -\mu_0^2, \quad \mu_0 \tanh \mu_0 = 1.$$

»

Διόρθωση 5 - H^2 κανονικότητα και συνοριακές συνθήκες

Αυτό: Γράφεται ότι αφού $f - ku \in L^2$, έχουμε $u \in H^2$ και οι συνοριακές συνθήκες έχουν κλασική ερμηνεία.

Είναι λάθος / ελλιπές γιατί: Το ότι οι συνοριακές συνθήκες έχουν νόημα δεν αποδεικνύει ότι ικανοποιούνται. Πρέπει να εξαχθούν από την ασθενή διατύπωση.

Διορθώστε το σε: Μετά το $u \in H^2$ να προστεθεί:

$$0 = a_k(u, v) - (f, v)_{L^2}$$

και, με ολοκλήρωση κατά παράγοντες,

$$0 = \int_0^1 (-u'' + ku - f) v \, dx + (u'(1) - u(1))v(1) - u'(0)v(0).$$

Επειδή $-u'' + ku = f$, μένει

$$(u'(1) - u(1))v(1) - u'(0)v(0) = 0 \quad \forall v \in H^1(0,1).$$

Οι τιμές $v(0)$ και $v(1)$ είναι ανεξάρτητες, άρα

$$u'(0) = 0, \quad u'(1) = u(1).$$

Διόρθωση 6 - Ενότητα Dirichlet στο Ερώτημα 3

Αυτό: Υπάρχει βοηθητική ενότητα « $T = -d^2/dx^2$ με Dirichlet B.C. είναι αυτοσυζυγής».

Είναι λάθος / ελλιπές γιατί: Το πρόβλημα δεν έχει Dirichlet συνθήκες αλλά

$$u'(0) = 0, \quad u'(1) = u(1).$$

Επιπλέον η απόδειξη δείχνει μόνο συμμετρία, όχι πλήρη αυτοσυζυγία μη φραγμένου τελεστή.

Διορθώστε το σε: Να διαγραφεί όλη η ενότητα 4.1. Η αυτοσυζυγία πρέπει να αποδειχθεί απευθείας για τον τελεστή λύσης T , δηλαδή για τον φραγμένο τελεστή

$$T: L^2(0,1) \rightarrow L^2(0,1).$$

Διόρθωση 7 - Ορισμός αυτοσυζυγίας για φραγμένο T

Αυτό: Δίνεται γενικός ορισμός με $D(T)$, σαν να πρόκειται για μη φραγμένο τελεστή.

Είναι λάθος / ελλιπές γιατί: Ο T του Ερωτήματος 3 είναι φραγμένος τελεστής $L^2 \rightarrow L^2$ με πεδίο ορισμού όλο το L^2 . Δεν χρειάζεται συζήτηση περί $D(T)$. Επιπλέον, για μη φραγμένους τελεστές, η απλή συμμετρία δεν αρκεί για αυτοσυζυγία.

Διορθώστε το σε: Να γραφεί:

«Επειδή T είναι φραγμένος τελεστής στο $L^2(0,1)$, είναι αυτοσυζυγής όταν

$$(Tf, g)_{L^2} = (f, Tg)_{L^2} \quad \forall f, g \in L^2(0,1).$$

»

Διόρθωση 8 - Φασματικό θεώρημα και απειρία ιδιοτιμών

Αυτό: Γράφεται ότι από το φασματικό θεώρημα υπάρχει αριθμήσιμο σύνολο μη μηδενικών ιδιοτιμών μ_n με $\mu_n \rightarrow 0$.

Είναι λάθος / ελλιπές γιατί: Ένας συμπαγής αυτοσυζυγής τελεστής μπορεί γενικά να έχει πεπερασμένα πολλές μη μηδενικές ιδιοτιμές. Εδώ πρέπει να αποδειχθεί ότι οι μη μηδενικές ιδιοτιμές είναι άπειρες.

Διορθώστε το σε: Να προστεθεί:

«Ο T είναι 1-1. Πράγματι, αν $Tf = 0$, τότε η λύση είναι $u = 0$ και από την ασθενή διατύπωση προκύπτει $f = 0$. Αν ο T είχε πεπερασμένα πολλές μη μηδενικές ιδιοτιμές, τότε,

επειδή $\ker T = \{0\}$, το φασματικό θεώρημα θα έδινε πεπερασμένη διάσταση για το $L^2(0,1)$, άτοπο. Άρα οι μη μηδενικές ιδιοτιμές είναι άπειρες και μπορούν να αριθμηθούν ως

$$\mu_n \neq 0, \quad \mu_n \rightarrow 0.$$

»

Διόρθωση 9 - Απόδειξη $\lambda_n \rightarrow +\infty$ και πρώτο ενικό

Αυτό: Υπάρχει φράση τύπου «Μπορώ να αποδείξω ότι $\lambda_n \rightarrow +\infty$...».

Είναι λάθος / ελλιπές γιατί: Το ύφος πρώτου ενικού δεν είναι αποδεκτό σε τελική μαθηματική εργασία. Επιπλέον πρέπει να αποδειχθεί αυστηρά ότι οι μ_n είναι θετικές.

Διορθώστε το σε: Να γραφεί:

«Για $u = Tf$ έχουμε

$$(Tf, f)_{L^2} = (u, f)_{L^2} = a_k(u, u) \geq 0.$$

Άρα T είναι θετικός. Αν

$$Tu_n = \mu_n u_n, \quad u_n \neq 0,$$

τότε

$$\mu_n \|u_n\|_{L^2}^2 = (Tu_n, u_n)_{L^2} \geq 0.$$

Επειδή $\mu_n \neq 0$, παίρνουμε $\mu_n > 0$. Εφόσον $\mu_n \rightarrow 0$,

$$\lambda_n = \frac{1}{\mu_n} - k \rightarrow +\infty.$$

»

Διόρθωση 10 - Διαίρεση με $\cos \omega$

Αυτό: Στο Ερώτημα 5 διαιρούν με $\cos \omega$ γράφοντας απλώς «αν $\cos \omega \neq 0$ ».

Είναι λάθος / ελλιπές γιατί: Πρέπει να αποκλειστεί ρητά η περίπτωση $\cos \omega = 0$.

Διορθώστε το σε: Να προστεθεί:

«Αν $\cos \omega = 0$, τότε από

$$-\omega \sin \omega = \cos \omega$$

θα είχαμε

$$-\omega \sin \omega = 0,$$

άτοπο αφού $\omega > 0$ και $\sin \omega = \pm 1$. Άρα $\cos \omega \neq 0$, και μπορούμε να διαιρέσουμε ώστε να πάρουμε

$$\omega \tan \omega = -1.$$

»

Διόρθωση 11 - Μονοτονία της $g(\omega) = \omega \tan \omega$

Αυτό: Η εργασία δηλώνει ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα

$$\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}, n\pi \right)$$

χωρίς απόδειξη.

Είναι λάθος / ελλιπές γιατί: Η μοναδικότητα της ρίζας απαιτεί αιτιολόγηση της μονοτονίας.

Διορθώστε το σε: Να προστεθεί:

$$g'(\omega) = \tan \omega + \omega \sec^2 \omega = \frac{\sin \omega \cos \omega + \omega}{\cos^2 \omega}.$$

Στα διαστήματα αυτά ισχύει

$$\sin \omega \cos \omega \geq -\frac{1}{2}, \quad \omega > \frac{\pi}{2} > \frac{1}{2}.$$

Άρα

$$\sin \omega \cos \omega + \omega > 0,$$

και συνεπώς $g'(\omega) > 0$. Επομένως υπάρχει ακριβώς μία λύση σε κάθε διάστημα.

Διόρθωση 12 - «Αμέτρητα θετικά στοιχεία»

Αυτό: Γράφεται ότι τα $\lambda_n = \omega_n^2$ είναι «αμέτρητα θετικά στοιχεία».

Είναι λάθος / ελλιπές γιατί: Υπάρχει μία θετική ιδιοτιμή για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Το σύνολο είναι αριθμήσιμα άπειρο, όχι αμέτρητο.

Διορθώστε το σε: Να γραφεί:

«Τα $\lambda_n = \omega_n^2$, $n = 1, 2, \dots$, αποτελούν αριθμήσιμα άπειρο σύνολο θετικών ιδιοτιμών και $\lambda_n \rightarrow +\infty$.»

Διόρθωση 13 - «Υπεκθετική» ιδιοσυνάρτηση

Αυτό: Η $\cosh(\mu_0 x)$ χαρακτηρίζεται ως «υπεκθετική».

Είναι λάθος / ελλιπές γιατί: Η $\cosh$ είναι υπερβολική συνάρτηση, δηλαδή συνδυασμός εκθετικών, όχι υπερεκθετική:

$$\cosh(\mu x) = \frac{e^{\mu x} + e^{-\mu x}}{2}.$$

Διορθώστε το σε: Να γραφεί:

«Η αρνητική ιδιοτιμή αντιστοιχεί στην **υπερβολική**, ή **εκθετικού τύπου**, ιδιοσυνάρτηση

$$u_0(x) = \cosh(\mu_0 x).$$

»

Διόρθωση 14 - Μεταβλητή στο γράφημα των θετικών ριζών

Αυτό: Στο γράφημα των θετικών ιδιοτιμών χρησιμοποιείται η μεταβλητή k στην εξίσωση

$$\tan k = -\frac{1}{k}.$$

Είναι λάθος / ελλιπές γιατί: Το k είναι ήδη παράμετρος του αρχικού προβλήματος. Η φασματική μεταβλητή είναι ω . Η χρήση του k δημιουργεί σύγχυση.

Διορθώστε το σε: Το γράφημα, αν παραμείνει, πρέπει να έχει οριζόντιο άξονα ω και τίτλο/εξίσωση

$$\tan \omega = -\frac{1}{\omega},$$

ή ισοδύναμα

$$\omega \tan \omega = -1.$$

Διόρθωση 15 - Fredholm: προσδιορισμός τελεστή

Αυτό: Η Fredholm εναλλακτική διατυπώνεται για ένα γενικό $Lu = f$ χωρίς σαφή ορισμό του L και του πεδίου του.

Είναι λάθος / ελλιπές γιατί: Πρέπει να οριστεί ο αυτοσυζυγής τελεστής A και το πεδίο του, ώστε να είναι σαφές τι σημαίνει $\ker(A + kI)$.

Διορθώστε το σε: Να γραφεί:

«Θεωρούμε

$$A = -\frac{d^2}{dx^2}, \quad D(A) = \{u \in H^2(0,1): u'(0) = 0, u'(1) = u(1)\}.$$

Για $k = |\lambda_0|$, έχουμε

$$\ker(A + kI) = \text{span}\{\cosh(\mu_0 x)\}.$$

Η εξίσωση $(A + kI)u = f$ είναι λύσιμη αν και μόνο αν

$$f \perp \ker(A + kI).$$

»

Διόρθωση 16 - Περίπτωση $0 < k < |\lambda_0|$

Αυτό: Η τελική σύνοψη αφήνει να εννοηθεί ότι για $k < |\lambda_0|$ δεν υπάρχει εγγύηση λύσης.

Είναι λάθος / ελλιπές γιατί: Για $0 < k < |\lambda_0|$ η μορφή δεν είναι θετικά coercive, αλλά ο $A + kI$ είναι αντιστρέψιμος επειδή $-k$ δεν είναι ιδιοτιμή του A .

Διορθώστε το σε: Να γραφεί:

«Για $0 < k < |\lambda_0|$, η μέθοδος Lax-Milgram/ελαχιστοποίησης δεν εφαρμόζεται ως θετικό πρόβλημα. Παρ' όλα αυτά, επειδή $-k \notin \sigma(A)$, το πρόβλημα έχει μοναδική λύση για κάθε $f \in L^2(0,1)$. Η μοναδική κρίσιμη θετική τιμή είναι $k = |\lambda_0|$.»

4. Τμήματα που πρέπει να διαγραφούν ή να αντικατασταθούν

4.1 Ενότητα 4.1: Dirichlet B.C. αυτοσυζυγία

Αιτιολόγηση: Είναι άσχετη με την άσκηση, διότι οι δοθείσες συνοριακές συνθήκες είναι

$$u'(0) = 0, \quad u'(1) = u(1),$$

όχι Dirichlet. Επιπλέον αποδεικνύεται μόνο συμμετρία, όχι αυτοσυζυγία μη φραγμένου τελεστή.

Προτεινόμενη ενέργεια: Να διαγραφεί πλήρως. Αν χρειάζεται σχόλιο αυτοσυζυγίας, να αντικατασταθεί από την άμεση απόδειξη αυτοσυζυγίας του φραγμένου τελεστή λύσης T .

4.2 Παράγραφος πρώτου ενικού στο Ερώτημα 4

Αιτιολόγηση: Η φράση «Μπορώ να αποδείξω...» είναι ύφος πρόχειρου draft ή απάντησης συνομιλιακού τύπου. Δεν έχει θέση σε τελική μαθηματική εργασία.

Προτεινόμενη ενέργεια: Να αντικατασταθεί από αυστηρή απόδειξη θετικότητας του T και του συμπεράσματος

οι μ_n τείνουν στο μηδέν από θετικές τιμές και άρα $\lambda_n \rightarrow +\infty$.

4.3 Γραφικές απεικονίσεις

Αιτιολόγηση: Τα γραφήματα δεν είναι απαραίτητα για την απόδειξη. Το γράφημα θετικών ριζών χρησιμοποιεί k αντί για ω , πράγμα που συγκρούεται με τη βασική παράμετρο του προβλήματος.

Προτεινόμενη ενέργεια: Να διαγραφούν από το κύριο κείμενο ή να μεταφερθούν σε παράρτημα μετά από διόρθωση της μεταβλητής. Το κύριο κείμενο πρέπει να βασίζεται σε αναλυτική απόδειξη ύπαρξης και μοναδικότητας των ριζών.

4.4 Φυσικές ερμηνείες και ορολογία «υπεκθετική»

Αιτιολόγηση: Δεν ζητούνται από την εκφώνηση και περιλαμβάνουν λανθασμένο όρο. Η $\cosh$ δεν είναι υπερεκθετική.

Προτεινόμενη ενέργεια: Να αφαιρεθούν ή να περιοριστούν σε μία ουδέτερη φράση:

«Η αρνητική ιδιοτιμή έχει υπερβολική ιδιοσυνάρτηση $\cosh(\mu_0 x)$.»

4.5 Τελική γενική συμπερασματολογία για $k < |\lambda_0|$

Αιτιολόγηση:

Η τωρινή διατύπωση συγχέει coercivity, ελαχιστοποίηση και επιλυσιμότητα.

Για $0 < k < |\lambda_0|$ δεν υπάρχει θετική coercivity, αλλά υπάρχει μοναδική λύση.

Προτεινόμενη ενέργεια: Να ξαναγραφεί πλήρως με διάκριση:

- $k > |\lambda_0|$: θετική coercivity.
- $k = |\lambda_0|$: Fredholm με συνθήκη συμβατότητας.
- $0 < k < |\lambda_0|$: αντιστρεψιμότητα χωρίς θετικό πρόβλημα ελαχιστοποίησης.

4.6 Εκτενείς γενικές εισαγωγές και boilerplate ορισμοί

Αιτιολόγηση: Δεν είναι μαθηματικά λάθος, αλλά διογκώνουν την εργασία και δίνουν ύφος εγχειριδίου. Σε τελική λύση αρκεί η χρήση των θεωρημάτων με έλεγχο των υποθέσεών τους.

Προτεινόμενη ενέργεια: Να συμπτυχθούν. Να μείνουν μόνο όσα είναι αναγκαία για την απόδειξη:

- Ορισμός της μορφής, συνέχεια,
- coercivity,
- Lax-Milgram,
- Συμπαγότητα,
- Φασματικό θεώρημα,
- Fredholm.