

Α ΟΜΑΔΑ

1. Διορθώσεις

Διόρθωση 1 — Έλλειψη του παράγοντα v στην απόδειξη διγραμμικότητας

Αυτό: Στη σελίδα 5, στην ανάπτυξη του $a(c_1 u_1 + c_2 u_2, v)$, το δεύτερο ολοκλήρωμα εμφανίζεται ως

$$\int_0^1 (c_1 u_1 + c_2 u_2) dx,$$

χωρίς τον παράγοντα v .

Είναι λάθος ή ελλιπές γιατί: Ο ορισμός της μορφής είναι

$$a(u, v) = \int u'v' + \int uv.$$

Επομένως κάθε φορά που αναπτύσσεται το $a(c_1 u_1 + c_2 u_2, v)$, ο δεύτερος όρος πρέπει να περιέχει v . Χωρίς το v δεν πρόκειται για την ίδια διγραμμική μορφή.

Διορθώστε το σε: Να γραφεί

$$a(c_1 u_1 + c_2 u_2, v) = \int_0^1 (c_1 u_1 + c_2 u_2)'v' dx + \int_0^1 (c_1 u_1 + c_2 u_2) v dx.$$

Από εκεί προκύπτει αμέσως

$$a(c_1 u_1 + c_2 u_2, v) = c_1 a(u_1, v) + c_2 a(u_2, v).$$

Διόρθωση 2 — Υπερβολικά μακρά απόδειξη συνέχειας της a

Αυτό: Στη σελίδα 6 αποδεικνύεται η συνέχεια με τριγωνική ανισότητα και δύο εφαρμογές της Cauchy-Schwarz, καταλήγοντας σε σταθερά $C = 2$. Στη συνέχεια δίνεται εναλλακτική απόδειξη με $C = 1$.

Είναι λάθος ή ελλιπές γιατί: Η μορφή a είναι ακριβώς το εσωτερικό γινόμενο του H^1 . Άρα η συνέχεια προκύπτει άμεσα με μία γραμμή. Η πρώτη απόδειξη δεν είναι λάθος, αλλά είναι περιττή και αποδυναμώνει την παρουσίαση.

Διορθώστε το σε: Να κρατηθεί μόνο:

$$a(u, v) = (u, v)_{H^1}.$$

Επομένως, από την Cauchy-Schwarz στον H^1 ,

$$|a(u, v)| \leq \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}.$$

Άρα η a είναι συνεχής με $M = 1$.

Διόρθωση 3 — Διατύπωση του θεωρήματος Lax–Milgram

Αυτό: Στη σελίδα 4 εμφανίζεται το όνομα ως Lax–Milgaram και η διατύπωση είναι πιο γενική από όσο χρειάζεται.

Είναι λάθος ή ελλιπές γιατί: Πρόκειται για ορθογραφικό λάθος και για περιττή γενικότητα. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα αρκεί η μορφή του θεωρήματος για πραγματικό χώρο Hilbert $V = H^1(0,1)$, συνεχή και coercive διγραμμική μορφή a και $F \in V^*$.

Διορθώστε το σε: Να γραφεί: Έστω V χώρος Hilbert,

$$a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

συνεχής και πιεστική διγραμμική μορφή, και $F \in V^*$. Τότε υπάρχει μοναδικό $u \in V$ τέτοιο ώστε

$$a(u, v) = F(v) \quad \text{για κάθε } v \in V.$$

Αν η a είναι συμμετρική, το u είναι ο μοναδικός ελαχιστοποιητής του

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - F(v).$$

Διόρθωση 4 — Λάθος συμβολισμός για το γραμμικό συναρτησιακό

Αυτό: Στη σελίδα 8 γράφεται ότι θέλουμε να δείξουμε $L(v) \in (H^1)^*$.

Είναι λάθος ή ελλιπές γιατί: Το $L(v)$ είναι αριθμός, όχι συναρτησιακό. Το συναρτησιακό είναι το L . Άρα το σωστό είναι $L \in (H^1(0,1))^*$.

Διορθώστε το σε: Να γραφεί:

$$L: H^1(0,1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad L(v) = \int_0^1 f v \, dx.$$

Θα δείξουμε ότι

$$L \in (H^1(0,1))^*.$$

Διόρθωση 5 — Συνέχεια του L και επιλογή σταθεράς

Αυτό: Στη σελίδα 8 γράφεται ότι επειδή $f \in L^2$, $\|f\|_{L^2} < \infty$, άρα υπάρχει $C > 0$ τέτοια ώστε $\|f\|_{L^2} \leq C$ και $|L(v)| \leq C \|v\|_{H^1}$.

Είναι λάθος ή ελλιπές γιατί: Η σκέψη είναι σωστή αλλά αδέξια. Δεν χρειάζεται αφηρημένη ύπαρξη σταθεράς. Η φυσική σταθερά είναι $C = \|f\|_{L^2}$.

Διορθώστε το σε: Να γραφεί:

$$|L(v)| = \left| \int_0^1 f v \, dx \right| \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{H^1}.$$

Επομένως $L \in (H^1)^*$ και

$$\|L\|_{(H^1)^*} \leq \|f\|_{L^2}.$$

Διόρθωση 6 — Ισοδυναμία με πρόβλημα ελαχιστοποίησης

Αυτό: Στη σελίδα 10 υπολογίζεται η πρώτη μεταβολή και καταλήγει ότι για ελαχιστοποίηση πρέπει

$$a(u, v) - L(v) = 0 \quad \text{για κάθε } v.$$

Αυτό είναι σωστό ως συνθήκη Euler-Lagrange, αλλά δεν ολοκληρώνει πλήρως την απόδειξη καθολικού και μοναδικού ελαχίστου.

Είναι λάθος ή ελλιπές γιατί: Μηδενισμός πρώτης μεταβολής σημαίνει στάσιμο σημείο. Για να είναι καθολικός ελαχιστοποιητής χρειάζεται να χρησιμοποιηθεί ότι a είναι θετική ορισμένη/coercive. Στο παρόν πρόβλημα αυτό είναι εύκολο επειδή

$$a(h, h) = \|h\|_{H^1}^2.$$

Διορθώστε το σε: Να προστεθεί: Αν u ικανοποιεί $a(u, v) = L(v)$ για κάθε v , τότε για κάθε $w \in H^1$, με $h = w - u$, έχουμε

$$J(w) - J(u) = \frac{1}{2} a(h, h) \geq 0.$$

Επειδή $a(h, h) = 0$ μόνο όταν $h = 0$, ο ελαχιστοποιητής είναι μοναδικός.

Διόρθωση 7 — Περιορισμός $\varepsilon > 0$ στην πρώτη μεταβολή

Αυτό: Στη σελίδα 10 χρησιμοποιείται $\varepsilon > 0$ και γράφεται ότι $u + \varepsilon v \in V$ για κάθε $v \in V$.

Είναι λάθος ή ελλιπές γιατί: Ο χώρος $V = H^1(0,1)$ είναι γραμμικός χώρος. Επομένως $u + \varepsilon v \in V$ για κάθε πραγματικό ε , όχι μόνο για $\varepsilon > 0$. Για παράγωγο Gâteaux συνήθως λαμβάνουμε $\varepsilon \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon \rightarrow 0$.

Διορθώστε το σε: Να γραφεί: Για κάθε $v \in H^1(0,1)$ και κάθε $\varepsilon \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$u + \varepsilon v \in H^1(0,1).$$

Υπολογίζουμε την παράγωγο ως προς ε στο $\varepsilon = 0$.

Διόρθωση 8 — Φυσική σημασία: λείπει η συνάρτηση δοκιμής v

Αυτό: Στη σελίδα 11, στην παραγωγή της ασθενούς μορφής από την ισχυρή εξίσωση, εμφανίζεται ολοκλήρωμα του τύπου

$$\int_0^1 (-u'' + u) dx = \int_0^1 f dx.$$

Είναι λάθος ή ελλιπές γιατί: Για ασθενή διατύπωση πρέπει να πολλαπλασιάσουμε με αυθαίρετη συνάρτηση δοκιμής $v \in H^1(0,1)$. Χωρίς το v δεν προκύπτει η μορφή $a(u, v) = L(v)$.

Διορθώστε το σε: Να γραφεί:

$$\int_0^1 (-u'' + u) v dx = \int_0^1 f v dx, \quad \text{για κάθε } v \in H^1(0,1).$$

Με ολοκλήρωση κατά μέρη παίρνουμε

$$\int_0^1 u' v' dx + \int_0^1 u v dx - [u' v]_0^1 = \int_0^1 f v dx.$$

Αν $u'(0) = u'(1) = 0$, ο συνοριακός όρος μηδενίζεται.

Διόρθωση 9 — Αυστηρή εξαγωγή Neumann συνοριακών συνθηκών

Αυτό: Στη σελίδα 11 δηλώνεται ότι η ασθενής μορφή ταυτίζεται με το πρόβλημα Neumann

$$-u'' + u = f, \quad u'(0) = u'(1) = 0.$$

Είναι λάθος ή ελλιπές γιατί: Η δήλωση είναι σωστή, αλλά αν παρουσιαστεί ως μαθηματικό συμπέρασμα από την ασθενή λύση, χρειάζεται απόδειξη κανονικότητας και εξαγωγής συνοριακών όρων. Η άσκηση δεν το απαιτεί, αλλά η φυσική ερμηνεία πρέπει να είναι ακριβής.

Διορθώστε το σε: Να προστεθεί: Από τη weak ταυτότητα με $\varphi \in C_c^\infty(0,1)$ προκύπτει

$$-u'' + u = f$$

σε κατανομές. Άρα

$$u'' = u - f \in L^2$$

και $u \in H^2(0,1)$. Κατόπιν, με ολοκλήρωση κατά μέρη για γενικό $v \in H^1$, παίρνουμε

$$u'(1)v(1) - u'(0)v(0) = 0 \quad \text{για κάθε } v,$$

άρα

$$u'(0) = u'(1) = 0.$$

Διόρθωση 10 — Ο όρος «ομογενές πρόβλημα Neumann»

Αυτό: Στη σελίδα 11 αναφέρεται ότι το πρόβλημα ταυτίζεται με το «ομογενές πρόβλημα Neumann».

Είναι λάθος ή ελλιπές γιατί: Αν $f \neq 0$, το πρόβλημα δεν είναι ομογενές ως διαφορική εξίσωση. Ομογενείς είναι οι συνοριακές συνθήκες Neumann.

Διορθώστε το σε: Να γραφεί: Το αντίστοιχο ισχυρό πρόβλημα είναι το μη ομογενές ελλειπτικό πρόβλημα

$$-u'' + u = f \quad \text{στο } (0,1),$$

με ομογενείς συνοριακές συνθήκες Neumann

$$u'(0) = u'(1) = 0.$$

Διόρθωση 11 — Πραγματικοί ή μιγαδικοί χώροι Hilbert

Αυτό: Η εργασία γράφει τη μορφή a ως διγραμμική και συμμετρική χωρίς συζυγή. Αυτό είναι σωστό μόνο αν το μάθημα δουλεύει πάνω από $\mathbb{R}$.

Είναι λάθος ή ελλιπές γιατί: Σε μιγαδικούς χώρους Hilbert η σωστή μορφή είναι sesquilinear/Hermitian και χρειάζονται συζυγή στον δεύτερο παράγοντα.

Διορθώστε το σε: Αν θεωρούνται πραγματικές συναρτήσεις, να δηλωθεί ρητά. Αν θεωρούνται μιγαδικές, να γραφεί

$$a(u, v) = \int_0^1 u' \overline{v'} dx + \int_0^1 u \overline{v} dx$$

και

$$L(v) = \int_0^1 f \overline{v} dx,$$

ανάλογα με τη σύμβαση του εσωτερικού γινομένου.

Διόρθωση 12 — Τελική παρουσίαση

Αυτό: Η εργασία δίνει πολλούς ορισμούς, υπενθυμίσεις, φυσικές ερμηνείες και αναφορές για μία άσκηση που λύνεται ουσιαστικά σε λίγες γραμμές.

Είναι λάθος ή ελλιπές γιατί: Δεν είναι μαθηματικό λάθος, αλλά κάνει τη λύση να φαίνεται μη φυσική και δυσανάλογη με το ζητούμενο. Σε εξέταση ή εργασία Συναρτησιακής Ανάλυσης προτιμάται η οικονομία και η σαφής επαλήθευση των υποθέσεων.

Διορθώστε το σε: Να κρατηθεί η ουσία: ορισμός V , a και L , συνέχεια, πιεστικότητα, εφαρμογή Lax–Milgram, συναρτησιακό J και σύντομη απόδειξη ελαχιστοποίησης. Όλα τα υπόλοιπα να μεταφερθούν σε σύντομο σχόλιο ή να διαγραφούν.

2. Τμήματα που πρέπει να διαγραφούν ή να συμπτυχθούν

Σελίδα 3 — Εκτενής ορισμός του H^1

Να συμπτυχθεί. Αρκεί μία γραμμή:

$$V = H^1(0,1), \quad (u, v)_{H^1} = \int u'v' + \int uv.$$

Ο πλήρης ορισμός $W^{1,p}$ δεν χρειάζεται για τη λύση.

Σελίδα 4 — Μεγάλη υπενθύμιση για L^2

Να συμπτυχθεί. Αρκεί ότι $f \in L^2$ και $v \in H^1 \subset L^2$, άρα $\int f v$ έχει νόημα και εκτιμάται με την Cauchy–Schwarz.

Σελίδα 5 — Αναλυτική απόδειξη διγραμμικότητας γραμμή προς γραμμή

Να διαγραφεί ή να περιοριστεί σε μία πρόταση.

Εφόσον a είναι άθροισμα ολοκληρωμάτων γραμμικών εκφράσεων, η διγραμμικότητα είναι άμεση.

Σελίδα 6 — Πρώτη απόδειξη συνέχειας με σταθερά $C = 2$

Να διαγραφεί. Η επόμενη απόδειξη με $C = 1$ μέσω Cauchy–Schwarz στο H^1 είναι ακριβέστερη, συντομότερη και φυσικότερη.

Σελίδα 8 — Υπενθύμιση του δυικού χώρου και πλήρης γραμμικότητα του L

Να συμπτυχθεί. Δεν είναι αναγκαίο να αποδειχθεί γραμμή προς γραμμή ότι το L είναι γραμμικό. Το ουσιώδες είναι η φραγμένη εκτίμηση.

Σελίδα 10 — Μακροσκελής υπολογισμός πρώτης μεταβολής

Να αντικατασταθεί από σύντομη απόδειξη:

$$J(u + h) - J(u) = \frac{1}{2} a(h, h),$$

όταν $a(u, v) = L(v)$. Αυτό αποδεικνύει άμεσα την καθολική και μοναδική ελαχιστοποίηση.

Σελίδα 11 — Φυσική σημασία

Να διαγραφεί από την κύρια λύση ή να μεταφερθεί σε παράρτημα. Δεν ζητείται από την άσκηση και περιέχει τυπικό λάθος στην ασθενή παραγωγή, επειδή λείπει η συνάρτηση δοκιμής v .

Σελίδα 12 — Αναφορές

Μπορούν να παραμείνουν μόνο αν ζητείται βιβλιογραφία. Δεν έχουν μαθηματική λειτουργία στην απόδειξη.