

Ε ΟΜΑΔΑ

2. Διορθώσεις

Διόρθωση 1 - Αιτιολόγηση Fubini στην αυτοσυζυγία

Αυτό: Στο Ερώτημα 3 γράφεται ότι επειδή οι συναρτήσεις είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμες, το Fubini επιτρέπει την αλλαγή σειράς ολοκλήρωσης.

Είναι λάθος/ελλιπές γιατί: Η τετραγωνική ολοκληρωσιμότητα των f και g από μόνη της δεν είναι η σωστή αιτιολόγηση. Πρέπει να ελεγχθεί ότι το ολοκλήρωμα της απόλυτης τιμής του $K(x,t)f(t)g(x)$ στο τετράγωνο είναι πεπερασμένο.

Διορθώστε το σε: «Επειδή $K \in L^2((0,1)^2)$ και $f(t)g(x) \in L^2((0,1)^2)$, έχουμε $K(x,t)f(t)g(x) \in L^1((0,1)^2)$ από Cauchy-Schwarz. Άρα εφαρμόζεται Fubini.»

Διόρθωση 2 - Πραγματικός/μιγαδικός χώρος Hilbert

Αυτό: Η αυτοσυζυγία γράφεται χωρίς συζυγίες στο εσωτερικό γινόμενο.

Είναι λάθος/ελλιπές γιατί: Αν ο χώρος Hilbert θεωρείται μιγαδικός, το εσωτερικό γινόμενο είναι συζυγές στο ένα όρισμα. Χωρίς συζυγίες, η απόδειξη ισχύει μόνο για πραγματικό L^2 .

Διορθώστε το σε: Να δηλωθεί είτε «εργαζόμαστε στον πραγματικό χώρο $L^2(0,1)$ » είτε να γραφεί: $(Tf, g) = \iint K(x,t)f(t)\bar{g}(x) dt dx$ και να χρησιμοποιηθεί $K(x,t) = \overline{K(t,x)}$ με συζυγία.

Διόρθωση 3 - Χρήση του Ερωτήματος 5 μέσα στο Ερώτημα 4

Αυτό: Στο Ερώτημα 4 η απόδειξη της θετικότητας αρχίζει με «Για ευκολία, χρησιμοποιούμε το αποτέλεσμα του Ερωτήματος 5».

Είναι λάθος/ελλιπές γιατί: Η σειρά της παρουσίασης γίνεται ανάποδη. Δεν είναι μαθηματικό λάθος αν το Ερώτημα 5 αποδειχθεί αμέσως μετά, αλλά σε τελική λύση δημιουργεί αίσθηση κυκλικότητας.

Διορθώστε το σε: Να μεταφερθεί η απόδειξη ότι $u = Tf$ ικανοποιεί $u'' = -f$, $u(0) = 0$, $u'(1) = 0$ πριν από τη θετικότητα, ή να προστεθεί ως μικρό lemma μέσα στο Ερώτημα 4.

Διόρθωση 4 - H^2 κανονικότητα

Αυτό: Στο Ερώτημα 5 γράφεται ότι επειδή η u' εκφράζεται ως ολοκλήρωμα L^2 συνάρτησης, είναι «εξ ορισμού» απολύτως συνεχής.

Είναι λάθος/ελλιπές γιατί: Η ιδέα είναι σωστή, αλλά η διατύπωση «εξ ορισμού» είναι αδέξια. Χρειάζεται να χρησιμοποιηθεί ότι στο πεπερασμένο διάστημα $L^2 \subset L^1$ και ότι το αόριστο ολοκλήρωμα L^1 συνάρτησης είναι απολύτως συνεχές.

Διορθώστε το σε: «Επειδή $f \in L^2(0,1) \subset L^1(0,1)$, η συνάρτηση $u'(x) = \int_x^1 f(t)dt$ είναι απολύτως συνεχής και $u'' = -f$ σχεδόν παντού. Επιπλέον $u = Tf \in L^2$ και $u' \in L^2$, άρα $u \in H^2(0,1)$.»

Διόρθωση 5 - Περίπτωση $\lambda \neq 0$ στο φάσμα

Αυτό: Στο Ερώτημα 6 τίθεται αμέσως $\omega^2 = 1/\lambda$.

Είναι λάθος/ελλιπές γιατί: Αυτό προϋποθέτει ότι $\lambda > 0$. Η θετικότητα του T έχει αποδειχθεί, αλλά πρέπει να συνδεθεί ρητά με τις ιδιοτιμές. Διαφορετικά μένει ανοικτή η περίπτωση $\lambda < 0$.

Διορθώστε το σε: «Αν $Tf = \lambda f$ και $f \neq 0$, τότε $\|f\|_{-2}^2 = (Tf, f) > 0$. Άρα $\lambda > 0$. Θέτουμε λοιπόν $\omega^2 = 1/\lambda$.»
Εναλλακτικά, να εξεταστεί χωριστά $\lambda < 0$ και να αποκλειστεί με υπερβολικές συναρτήσεις.

Διόρθωση 6 - Το 0 στο φάσμα

Αυτό: Γράφεται ότι επειδή ο T είναι συμπαγής τελεστής σε απειροδιάστατο χώρο, το 0 ανήκει υποχρεωτικά στο φάσμα του.

Είναι λάθος/ελλιπές γιατί: Η πρόταση είναι σωστή, αλλά πρέπει να δοθεί η τυπική αιτιολόγηση. Το κρίσιμο σημείο είναι ότι ένας συμπαγής τελεστής σε απειροδιάστατο χώρο δεν μπορεί να είναι αντιστρέψιμος με φραγμένο αντίστροφο.

Διορθώστε το σε: «Αν $0 \notin \sigma(T)$, τότε T^{-1} υπάρχει και είναι φραγμένος. Τότε $I = T^{-1}T$ θα ήταν συμπαγής, άτοπο σε απειροδιάστατο χώρο. Επομένως $0 \in \sigma(T)$. Επειδή $\ker T = \{0\}$, το 0 δεν είναι ιδιοτιμή.»

Διόρθωση 7 - Φασματικό θεώρημα και πληρότητα της βάσης

Αυτό: Στο Ερώτημα 7 γράφεται ότι το σύστημα των ιδιοσυναρτήσεων ενός συμπαγούς αυτοσυζυγούς τελεστή αποτελεί πλήρη ΟΚΒ του H .

Είναι λάθος/ελλιπές γιατί: Όπως είναι γραμμένο, είναι υπερβολικά γενικό. Γενικά οι ιδιοσυναρτήσεις των μη μηδενικών ιδιοτιμών είναι πλήρεις στο $(\ker T)^\perp$. Χρειάζεται να χρησιμοποιηθεί ότι εδώ $\ker T = \{0\}$.

Διορθώστε το σε: «Από το φασματικό θεώρημα, οι ιδιοσυναρτήσεις για μη μηδενικές ιδιοτιμές σχηματίζουν ΟΚΒ του $(\ker T)^\perp$. Από το Ερώτημα 4 έχουμε $\ker T = \{0\}$. Άρα η οικογένεια (e_k) είναι ΟΚΒ όλου του $L^2(0,1)$.»

Διόρθωση 8 - Υπολογισμός $a_k(x^3)$

Αυτό: Στο Ερώτημα 9γ η λύση γράφει ότι εφαρμόζεται το ίδιο μοτίβο παραγοντικών ολοκληρώσεων και δίνει απευθείας τον τελικό τύπο.

Είναι λάθος/ελλιπές γιατί: Ο τελικός τύπος είναι σωστός, αλλά η απόδειξη είναι υπερβολικά συμπυκνωμένη. Στους συντελεστές Fourier πολυωνύμων είναι εύκολο να χαθεί δύναμη του ρ_k ή αριθμητικός παράγοντας.

Διορθώστε το σε: Να προστεθεί ο ενδιάμεσος υπολογισμός $\int_0^1 x^3 \sin(\rho x) dx = 3 \sin \rho / \rho^2 - 6 \sin \rho / \rho^4$, επειδή $\cos \rho = 0$. Άρα $a_k(x^3) = 3\sqrt{2}(-1)^k / \rho_k^2 - 6\sqrt{2}(-1)^k / \rho_k^4$.

Διόρθωση 9 - Ολοκλήρωση κατά μέρη στο Ερώτημα 10

Αυτό: Στο Ερώτημα 10 γίνεται ολοκλήρωση κατά μέρη για $f \in H^1$ χωρίς να σχολιαστεί η νομιμότητα και η σημασία του $f(0)$.

Είναι λάθος/ελλιπές γιατί: Για H^1 συναρτήσεις οι σημειακές τιμές νοούνται μέσω του συνεχούς εκπροσώπου στη μία διάσταση. Η ολοκλήρωση κατά μέρη είναι ασθενής/ Sobolev ολοκλήρωση κατά μέρη.

Διορθώστε το σε: Να προστεθεί: «Στη μία διάσταση $H^1(0,1) \subset C([0,1])$, άρα $f(0)$ έχει νόημα. Επειδή f έχει απολύτως συνεχή εκπρόσωπο και $\cos(\rho_k x)$ είναι C^1 , η ολοκλήρωση κατά μέρη είναι νόμιμη.»

Διόρθωση 10 - Φραγμένο των g_n στο H^1 στο Ερώτημα 11

Αυτό: Η εργασία δείχνει ότι η ακολουθία g_n είναι φραγμένη στο L^2 και μετά γράφει ότι η g_n είναι φραγμένη στο H^1 .

Είναι λάθος/ελλιπές γιατί: Για το φραγμένο στο H^1 χρειάζονται δύο έλεγχοι: φραγμένο της L^2 νόρμας και φραγμένο της L^2 νόρμας της παραγώγου.

Διορθώστε το σε: Να προστεθεί: «Επειδή g_n είναι ορθογώνιες προβολές του g στην ΟΚΒ (e_k), έχουμε $\|g_n\|_2 \leq \|g\|_2$. Επίσης $\|g_n'\|_2^2 = \sum_{k=0}^n |\rho_k a_k(g)|^2 \leq C$. Άρα (g_n) είναι φραγμένη στο H^1 .»

Διόρθωση 11 - Σημειογραφία ρ_k και λ_k

Αυτό: Στην εργασία χρησιμοποιούνται ταυτόχρονα λ για ιδιοτιμή του T και k ως δείκτης. Η τελική σημειογραφία είναι σωστή, αλλά χρειάζεται σταθερή εισαγωγή του ρ_k .

Είναι λάθος/ελλιπές γιατί: Σε προφορικό ή γραπτό έλεγχο, η ανάμιξη λ , ω_k και ρ_k μπορεί να οδηγήσει σε σύγχυση μεταξύ ιδιοτιμής και συχνότητας.

Διορθώστε το σε: Να δηλωθεί καθαρά: «Θέτουμε $\rho_k = (k+1/2)\pi$. Τότε οι ιδιοσυχνότητες είναι ρ_k , οι ιδιοσυναρτήσεις είναι $\sin(\rho_k x)$, και οι ιδιοτιμές του T είναι $\lambda_k = 1/\rho_k^2$.»

3. Τμήματα που πρέπει να διαγραφούν, να μετακινηθούν ή να αντικατασταθούν

Δεν υπάρχει στην εργασία της Ε Ομάδας κάποιο μεγάλο τμήμα που πρέπει να διαγραφεί πλήρως ως άσχετο. Η λύση είναι σχετικά οικονομική. Παρ' όλα αυτά, τα παρακάτω σημεία πρέπει να αφαιρεθούν από την τωρινή μορφή ή να αντικατασταθούν.

1. Στο Ερώτημα 4, να αφαιρεθεί η φράση «Για ευκολία, χρησιμοποιούμε το αποτέλεσμα του Ερωτήματος 5» και να αντικατασταθεί από σύντομη απόδειξη των ιδιοτήτων του $u=Tf$ ή να μετακινηθεί το Ερώτημα 5 πριν από το Ερώτημα 4. Αιτιολόγηση: η τωρινή σειρά δίνει αίσθηση κυκλικότητας.
2. Στο Ερώτημα 3, να αφαιρεθεί η διατύπωση «επειδή οι συναρτήσεις είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμες, εφαρμόζεται Fubini». Αιτιολόγηση: δεν είναι η σωστή υπόθεση του Fubini. Πρέπει να ελεγχθεί L^1 ολοκληρωσιμότητα του $K(x,t)f(t)g(x)$.
3. Στο Ερώτημα 6, να διαγραφεί/αντικατασταθεί το πέρασμα « $\lambda \neq 0 \Rightarrow \omega^2=1/\lambda$ » χωρίς προηγούμενη εξήγηση. Αιτιολόγηση: πρέπει πρώτα να αποδειχθεί ότι $\lambda > 0$ ή να αποκλειστούν οι αρνητικές ιδιοτιμές.
4. Στο Ερώτημα 7, να αντικατασταθεί η γενική φράση «το σύστημα των ιδιοσυναρτήσεων ενός συμπαγούς αυτοσυζυγούς τελεστή αποτελεί πλήρη ΟΚΒ» με τη σωστή εκδοχή που περιλαμβάνει το $(\ker T)^\perp$. Αιτιολόγηση: η γενική φράση είναι ανακριβής χωρίς την υπόθεση $\ker T = \{0\}$.
5. Στο Ερώτημα 9γ, να αντικατασταθεί η φράση «εφαρμόζοντας το ίδιο μοτίβο» από έναν σαφή ενδιάμεσο υπολογισμό. Αιτιολόγηση: το αποτέλεσμα είναι σωστό, αλλά το βήμα είναι υπερβολικά συμπιεσμένο.

6. Στο Ερώτημα 11, να προστεθεί πριν από την επίκληση ανακλαστικότητας η ρητή απόδειξη ότι $\|g_n\|_2$ και $\|g_n'\|_2$ είναι ομοιόμορφα φραγμένες. Αιτιολόγηση: χωρίς αυτό δεν έχει αποδειχθεί ότι η g_n είναι φραγμένη στο H^1 .