

Δ ΟΜΑΔΑ

1. Διορθώσεις

Διόρθωση 1 - Διατύπωση για H^1 και απόλυτη συνέχεια

Αυτό:

Στην αρχή του Ερωτήματος 1 γράφεται ότι από το Θεώρημα Εγκλεισμού Sobolev προκύπτει $H^1(I) \rightarrow AC(\bar{I})$.

Είναι λάθος ή ελλιπές γιατί:

Η διατύπωση είναι αδέξια. Δεν είναι η συνήθης μορφή του Sobolev embedding ως εμφύτευση σε χώρο AC με νόρμα AC . Το σωστό είναι ότι σε μία διάσταση κάθε H^1 συνάρτηση έχει έναν απολύτως συνεχή εκπρόσωπο. Μέσω αυτού του εκπροσώπου ορίζονται οι τιμές $u(-1)$, $u(0)$, $u(1)$.

Διορθώστε το σε:

Να γραφεί: «Στη μία διάσταση, κάθε $u \in H^1(-1,1)$ έχει απολύτως συνεχή εκπρόσωπο στο $[-1,1]$. Επομένως οι τιμές $u(-1)$, $u(0)$, $u(1)$ είναι καλά ορισμένες και, για τον εκπρόσωπο αυτόν, ισχύει $u(t) = u(a) + \int_a^t u'(s) ds$.»

Διόρθωση 2 - Έλεγχος διγραμμικότητας

Αυτό:

Το Ερώτημα 1 ζητά να εξεταστεί αν η a είναι συνεχής διγραμμική μορφή, αλλά η λύση εστιάζει σχεδόν αποκλειστικά στη συνέχεια.

Είναι λάθος ή ελλιπές γιατί:

Η διγραμμικότητα είναι προφανής, αλλά πρέπει να αναφερθεί. Επειδή ο όρος $-\lambda u(0) \int v$ είναι γραμμικός ως προς u και ως προς v , η μορφή είναι διγραμμική στον πραγματικό χώρο. Αν ο χώρος θεωρηθεί μιγαδικός, χρειάζεται sesquilinear διατύπωση με συζυγίες.

Διορθώστε το σε:

Να προστεθεί: «Για $\lambda \in \mathbb{R}$ και για πραγματικούς χώρους, η a είναι διγραμμική, διότι κάθε όρος είναι γραμμικός ξεχωριστά ως προς u και ως προς v . Στο μιγαδικό πλαίσιο θα έπρεπε να χρησιμοποιηθεί συζυγώς γραμμική μορφή ως προς τη δεύτερη μεταβλητή.»

Διόρθωση 3 - Η μορφή δεν είναι συμμετρική γενικά

Αυτό:

Η λύση δεν σχολιάζει τη συμμετρία της μορφής.

Είναι λάθος ή ελλιπές γιατί:

Ο τοπικός όρος $\int (u'v' + uv)$ είναι συμμετρικός, αλλά ο μη τοπικός όρος $-\lambda u(0) \int v$ δεν είναι γενικά συμμετρικός, διότι δεν ισούται πάντα με $-\lambda v(0) \int u$. Αυτό δεν επηρεάζει το Lax-Milgram, αλλά επηρεάζει οποιαδήποτε συζήτηση για πρόβλημα ελαχιστοποίησης.

Διορθώστε το σε:

Να προστεθεί προειδοποίηση: «Η μορφή a δεν είναι γενικά συμμετρική για $\lambda \neq 0$. Επομένως στο συγκεκριμένο πρόβλημα χρησιμοποιείται Lax-Milgram για μη συμμετρικές coercive μορφές και όχι απευθείας αρχή ελαχιστοποίησης.»

Διόρθωση 4 - Η φράση «πρέπει $|\lambda| < 2$ » στο Ερώτημα 2

Αυτό:

Στο τέλος του Ερωτήματος 2 γράφεται ότι για να είναι η μορφή πιεστική πρέπει $1 - |\lambda|/2 > 0$, άρα $|\lambda| < 2$.

Είναι λάθος ή ελλιπές γιατί:

Αυτό δεν είναι ακριβές. Από τη συγκεκριμένη εκτίμηση προκύπτει μια επαρκής συνθήκη για coercivity. Δεν αποδεικνύεται ότι είναι αναγκαία. Η εκφώνηση ζητά μόνο να αποδειχθεί coercivity για $|\lambda| < \sqrt{2}$.

Διορθώστε το σε:

Να γραφεί: «Η παραπάνω εκτίμηση δίνει $a(u,u) \geq (1 - |\lambda|/2) \|u\|_{H^1}^2$. Επομένως η μορφή είναι πιεστική εφόσον $|\lambda| < 2$. Ιδίως, είναι πιεστική για $|\lambda| < \sqrt{2}$, όπως ζητείται.»

Διόρθωση 5 - Συμβολισμός $H^2(\bar{I})$

Αυτό:

Στο Ερώτημα 3 γίνεται λόγος για λύση $u \in H^2(\bar{I}) \cap H_0^1(I)$, ή γενικότερα χρησιμοποιείται σημειογραφία που μοιάζει με κλασική ομαλότητα στο κλειστό διάστημα.

Είναι λάθος ή ελλιπές γιατί:

Για $f \in L^2$ δεν έχουμε αναγκαστικά κλασική C^2 λύση. Το σωστό συμπέρασμα είναι Sobolev κανονικότητα $u \in H^2(I) \cap H_0^1(I)$. Σε μία διάσταση αυτό δίνει συνεχή εκπρόσωπο και κλασική ερμηνεία των Dirichlet συνθηκών, αλλά όχι C^2 γενικά.

Διορθώστε το σε:

Να γραφεί: «Υπάρχει μοναδική $u \in H^2(I) \cap H_0^1(I)$. Η εξίσωση ισχύει σχεδόν παντού στο I .»

Διόρθωση 6 - Από ασθενή σε ισχυρή μορφή στο Ερώτημα 3

Αυτό:

Η λύση δείχνει $u'' \in L^2$, αλλά η διατύπωση είναι μακροσκελής και μπορεί να γίνει καθαρότερη.

Είναι λάθος ή ελλιπές γιατί:

Το κρίσιμο βήμα είναι η ταύτιση της κατανομής $-u''$ με $f - u + \lambda u(0)$. Πρέπει να γραφεί απευθείας και με σωστό πρόσημο.

Διορθώστε το σε:

Να γραφεί: «Από την ασθενή εξίσωση, για κάθε $v \in C_c^\infty(I)$, ισχύει $\int u'v' = \int (f - u + \lambda u(0))v$. Επειδή, ως κατανομές, $\int u'v' = \int (-u'')v$, παίρνουμε $-u'' = f - u + \lambda u(0)$. Άρα $u'' = -f + u - \lambda u(0) \in L^2(I)$, συνεπώς $u \in H^2(I)$.»

Διόρθωση 7 - Διαίρεση με $u(0)$ στο Ερώτημα 4

Αυτό:

Στο Ερώτημα 4 γίνεται διαίρεση με $u(0)$, επειδή ζητείται $u \neq 0$.

Είναι λάθος ή ελλιπές γιατί:

Το ότι $u \neq 0$ δεν συνεπάγεται από μόνο του ότι $u(0) \neq 0$. Πρέπει να αποδειχθεί. Αν $u(0) = 0$, τότε η εξίσωση γίνεται $-u'' + u = 0$ με μηδενικές Dirichlet συνθήκες, οπότε $u = 0$. Άτοπο. Άρα για μη μηδενική λύση ισχύει $u(0) \neq 0$.

Διορθώστε το σε:

Πριν από τη διαίρεση να προστεθεί: «Αν $u(0) = 0$, τότε $-u'' + u = 0$ με $u(-1) = u(1) = 0$. Πολλαπλασιάζοντας με u και ολοκληρώνοντας παίρνουμε $\int (|u'|^2 + |u|^2) = 0$, άρα $u = 0$. Επομένως για μη τετριμμένη λύση πρέπει $u(0) \neq 0$.»

Διόρθωση 8 - Αιτιολόγηση ότι $u = \lambda u(0)\phi$

Αυτό:

Στο Ερώτημα 4 γράφεται ότι λόγω γραμμικότητας η λύση u είναι πολλαπλάσιο της ϕ .

Είναι λάθος ή ελλιπές γιατί:

Η γραμμικότητα μόνη της δεν αρκεί· χρειάζεται και μοναδικότητα του Dirichlet προβλήματος $-w'' + w = g$. Για κάθε σταθερά c , η λύση του $-w'' + w = c$ με μηδενικές Dirichlet συνθήκες είναι $c\phi$.

Διορθώστε το σε:

Να γραφεί: «Επειδή ο τελεστής $-d^2/dt^2 + 1$ με μηδενικές Dirichlet συνθήκες είναι αντιστρέψιμος, η λύση του προβλήματος με δεξί μέλος τη σταθερά $\lambda u(0)$ είναι μοναδικά ίση με $\lambda u(0)\phi$.»

Διόρθωση 9 - Αποτίμηση $[S(f)](0)$ στο Ερώτημα 5

Αυτό:

Στο Ερώτημα 5 χρησιμοποιείται η ποσότητα $[S(f)](0)$ χωρίς να αιτιολογείται γιατί είναι καλά ορισμένη.

Είναι λάθος ή ελλιπές γιατί:

Αν $f \in L^2$, τότε $S(f) \in H^2(I) \cap H_0^1(I)$. Στη μία διάσταση $H^2(I) \hookrightarrow C^1([-1, 1])$, άρα η τιμή στο 0 έχει νόημα.

Διορθώστε το σε:

Να προστεθεί: «Η ποσότητα $[S(f)](0)$ είναι καλά ορισμένη, διότι $S(f) \in H^2(I)$ και σε μία διάσταση $H^2(I)$ εμφυτεύεται συνεχώς στο $C^1([-1, 1])$.»

Διόρθωση 10 - Μοναδικότητα στο Ερώτημα 5

Αυτό:

Η λύση δίνει τύπο για το u όταν $\lambda \neq \lambda_0$, αλλά δεν διατυπώνει πλήρως το επιχείρημα μοναδικότητας.

Είναι λάθος ή ελλιπές γιατί:

Η μοναδικότητα προκύπτει επειδή η εξίσωση $u(0)(1 - \lambda\phi(0)) = [S(f)](0)$ καθορίζει μοναδικά το $u(0)$, και έπειτα η σχέση $u = S(f) + \lambda u(0)\phi$ καθορίζει μοναδικά όλη τη u .

Διορθώστε το σε:

Να προστεθεί: «Εφόσον $1 - \lambda\phi(0) \neq 0$, η τιμή $u(0)$ καθορίζεται μοναδικά. Μετά, από τον τύπο $u = S(f) + \lambda u(0)\phi$, καθορίζεται μοναδικά ολόκληρη η λύση.»

Διόρθωση 11 - Παρονομαστής μηδέν στο Ερώτημα 6

Αυτό:

Στο Ερώτημα 6 εμφανίζεται ξανά ο τύπος $u = S(f) + \lambda([S(f)](0)/(1 - \lambda\phi(0)))\phi$, ενώ στην κρίσιμη περίπτωση $1 - \lambda\phi(0) = 0$.

Είναι λάθος ή ελλιπές γιατί:

Αυτό είναι μαθηματικά μη νόμιμο. Στην κρίσιμη περίπτωση απαγορεύεται να χρησιμοποιηθεί ο τύπος που προέκυψε με διαίρεση διά του $1-\lambda\phi(0)$.

Διορθώστε το σε:

Να διαγραφεί αυτός ο τύπος από το Ερώτημα 6 και να γραφεί: «Για $\lambda=\lambda_0$ ισχύει $u=S(f)+\lambda_0 u(0)\phi$. Η εξίσωση στο $t=0$ δίνει την αναγκαία και ικανή συνθήκη $[S(f)](0)=0$. Αν αυτή ισχύει, τότε $u(0)=c$ είναι αυθαίρετο και όλες οι λύσεις είναι $u=S(f)+c\lambda_0\phi$.»

Διόρθωση 12 - Ισοδύναμη συνθήκη λύσιμότητας στο Ερώτημα 6

Αυτό:

Η εργασία δίνει τη συνθήκη $[S(f)](0)=0$, που είναι σωστή, αλλά δεν τη συνδέει με άμεση συνθήκη πάνω στο f .

Είναι λάθος ή ελλιπές γιατί:

Η εκφώνηση ζητά συνθήκη για το $S(f)$, άρα η απάντηση είναι επαρκής. Ωστόσο, για πληρότητα μπορεί να δοθεί η συνθήκη με Green function.

Διορθώστε το σε:

Προαιρετικά να προστεθεί: «Αν G είναι η Green συνάρτηση του $-d^2/dt^2+1$ με Dirichlet συνθήκες, τότε $[S(f)](0)=\int_{-1}^1 G(0,s)f(s)ds$. Εδώ $G(0,s)=\sinh(1-|s|)/(2\cosh(1))$. Άρα η συνθήκη γράφεται $\int_{-1}^1 \sinh(1-|s|)f(s)ds=0$.»

3. Τμήματα που πρέπει να διαγραφούν ή να αντικατασταθούν

3.1 Η φράση $H^1(I) \rightarrow AC(\bar{I})$ ως «Θεώρημα Εγκλεισμού Sobolev»

Να μη διατηρηθεί όπως είναι. Πρέπει να αντικατασταθεί από τη διατύπωση περί απολύτως συνεχούς εκπροσώπου των H^1 συναρτήσεων στη μία διάσταση. Η τωρινή μορφή είναι αδέξια και μπορεί να θεωρηθεί λειτουργικά ανακριβής.

3.2 Η φράση «για να είναι πιεστική πρέπει $|\lambda| < 2$ »

Να αντικατασταθεί. Η σωστή διατύπωση είναι ότι η συγκεκριμένη εκτίμηση αποδεικνύει coercivity για $|\lambda| < 2$, άρα και για $|\lambda| < \sqrt{2}$. Δεν έχει αποδειχθεί αναγκαιότητα του $|\lambda| < 2$.

3.3 Η μη αναγκαία εξήγηση για τη βάση $\cosh/\sinh$ λόγω συμμετρικού διαστήματος

Στο Ερώτημα 4 γράφεται ότι επειδή ο χώρος $H_0^1(-1,1)$ ορίζεται σε συμμετρικό διάστημα επιλέγουμε τη βάση $\cosh, \sinh$. Αυτό είναι περιττό και εν μέρει παραπλανητικό. Η επιλογή $\cosh/\sinh$ είναι απλώς βολική βάση λύσεων της ODE $y''-y=0$, όχι συνέπεια του χώρου H_0^1 . Να διαγραφεί ή να αντικατασταθεί από: «Ισοδύναμα, γράφουμε τη γενική λύση ως $C_1 \cosh(t)+C_2 \sinh(t)$.»

3.4 Το τμήμα του Ερωτήματος 6 με τον τύπο που έχει παρονομαστή $1-\lambda\phi(0)$

Να διαγραφεί πλήρως από την κρίσιμη περίπτωση. Όταν $\lambda=\lambda_0$, ο παρονομαστής $1-\lambda\phi(0)$ είναι μηδέν. Η διαίρεση δεν επιτρέπεται. Πρέπει να χρησιμοποιηθεί η αδιαίρετη σχέση $u=S(f)+\lambda_0 u(0)\phi$.

3.5 Η υπερβολικά εκτεταμένη παραγωγή της ασθενούς μορφής στο Ερώτημα 3

Δεν είναι λάθος, αλλά μπορεί να συμπτυχθεί σημαντικά. Σε τελική μεταπτυχιακή λύση αρκούν 5-6 γραμμές: πολλαπλασιασμός με $v \in H_0^1$, ολοκλήρωση κατά μέρη, μηδενισμός συνοριακών όρων λόγω $v(-1)=v(1)=0$, και τελική μορφή $a(u,v)=(f,v)$.

3.6 Οι ορθογραφικές και υφολογικές επαναλήψεις

Να διορθωθούν μικρά επαναλαμβανόμενα λάθη όπως «Απο», «αφου», «συνδιασμός», «φράσουμε», καθώς και η υπερβολική επανάληψη απλών βημάτων. Δεν επηρεάζουν την ορθότητα, αλλά μειώνουν την ποιότητα τελικής εργασίας.