1. Αποδείξτε ότι για κάθε $L^2(0,1)$, υπάρχει μοναδικό $u \in H^1(0,1)$ που ικανοποιεί την:

$$a(u,v) = \int_0^1 fudx, u \in H^1(0,1) \qquad (1)$$

Ποιο είναι το αντίστοιχο πρόβλημα ελαχιστοποίησης;

Το πρόβλημα είναι μια στάνταρτ εφαρμογή του Θεωρήματος Lax-Milgram. Το πρόβλημα αναφέρεται σε μια *ασθενή μορφή* μιας διαφορικής εξίσωσης, όπου το $a(u,v)$είναι μια διγραμμική μορφή (συνήθως σχετίζεται με όρους παραγώγων. Εδώ για παράδειγμα, μέχρι την παράγωγο 1ης τάξης, αφού το $u \in H^1(0,1)$, δηλαδή, στον χώρο Sobolev 1ης τάξης.) Η ασθενής μορφή συνδέεται συχνά με ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης. Ο στόχος είναι να βρεθεί $u \in H^1(0,1)$, ώστε να ικανοποιεί τη σχέση για κάθε $v \in H^1(0,1)$.

Υπόδειξη: Για να λύσουμε αυτό το πρόβλημα, διαπιστώνουμε την ύπαρξη και τη μοναδικότητα μιας λύσης $u \in H^1(0,1)$ της ασθενούς μορφής της διαφορικής εξίσωσης

$$a(u,v) = \int_0^1 fudx, u \in H^1(0,1)$$

όπου $a(u,v)$ είναι διγραμμική μορφή, (στάνταρτ) της μορφής

$$a(u,v) = \int_0^1 u'v'dx + \int_0^1 uvdx$$

και $f \in L^2(0,1)$.

Η ασθενής διατύπωση αντιστοιχεί στο πρόβλημα ελαχιστοποίησης $\min_{u \in H^1(0,1)} J(u)$, του συναρτησιακού $J(u) = \frac{1}{2}\alpha(u,u) - \int_0^1 fudx$.

2. Έστω $I = (0,1)$.

1. Αποδείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει μία σταθερά $C_\varepsilon > 0$τέτοια ώστε

$$|\, u(1) \,|^2 \leq \varepsilon \parallel u' \parallel_{L^2(I)}^2 + C_\varepsilon \parallel u \parallel_{L^2(I)}^2, \forall u \in H^1(I).$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε πρώτα την ανισότητα Cauchy–Schwarz και στη συνέχεια την ανισότητα Young στη μορφή

$$ab \leq \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2, \forall a,b \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0.$$

Αυτή η μορφή της ανισότητας είναι χρήσιμη για να χειριστούμε το γινόμενο ab και να το εκφράσουμε ως άθροισμα όρων που περιέχουν μόνο a^2και b^2, με δυνατότητα ελέγχου μέσω της παραμέτρου ε.

Στην απόδειξη, εφαρμόστε την ανισότητα ως εξής. Θέτοντας $a = \| u' \|_{L^2(I)}$ και $b = \| u \|_{L^2(I)}$, έχουμε

$$2 \| u' \|_{L^2(I)} \| u \|_{L^2(I)} \leq \varepsilon \| u' \|^2_{L^2(I)} + \frac{1}{\varepsilon} \| u \|^2_{L^2(I)}.$$

Αυτό επιτρέπει στις νόρμες $\| u' \|_{L^2(I)}$και $\| u \|_{L^2(I)}$να εμφανιστούν ως ξεχωριστοί όροι.

2. Αποδείξτε ότι, αν η σταθερά $k > 0$είναι επαρκώς μεγάλη, τότε για κάθε $f \in L^2(I)$, υπάρχει μοναδική λύση $u \in H^2(I)$ του προβλήματος συνοριακών συνθηκών

$$\begin{cases} -u'' + ku = f, \quad x \in (0,1), \\ \quad u'(0) = 0, \\ u'(1) = u(1). \end{cases}$$

Ποια είναι η ασθενής διατύπωση του προβλήματος;

Ποιο είναι το αντίστοιχο πρόβλημα ελαχιστοποίησης;

3. Υποθέτουμε ότι το $k > 0$είναι επαρκώς μεγάλο. Έστω Tο τελεστής

$$T: L^2(I) \to L^2(I), Tf = u,$$

όπου u είναι η μοναδική λύση του προβλήματος του Ερωτήματος 2. Αποδείξτε ότι ο T είναι αυτοσυζυγής και συμπαγής στο $L^2(I)$.

Υπόδειξη: Ένας τελεστής T, που ορίζεται σε έναν χώρο Hilbert H, λέγεται *αυτοσυζυγής* ή *συμμετρικός*, εάν ικανοποιεί την ιδιότητα

$$\langle Tu, v \rangle_H = \langle u, Tv \rangle_H, \forall u, v \in D(T),$$

όπου $\langle \cdot,\cdot \rangle_H$ είναι το εσωτερικό γινόμενο στον χώρο Hκαι $D(T)$είναι το πεδίο ορισμού του T. Για παράδειγμα, ο ταυτοτικός τελεστής $I: H \to H,\ Iu = u$, είναι αυτοσυζυγής, επειδή $\langle Iu, v \rangle_H = \langle u, Iv \rangle_H, \forall u, v \in H$. Επιβεβαιώστε επίσης ότι ο διαφορικός τελεστής $A = -\frac{d^2}{dx^2}$, με $D(A) = H^2(0,1) \cap H^1_0(0,1)$, είναι αυτοσυζυγής στο $L^2(0,1)$.

Ένας γραμμικός τελεστής $T: X \to Y$, όπου X και Y είναι χώροι Banach ή Hilbert, λέγεται *συμπαγής* αν μετασχηματίζει κάθε φραγμένο σύνολο του X σε σχετικά συμπαγές σύνολο του Y. Δηλαδή, για κάθε φραγμένη ακολουθία $(x_n) \subset X$, η ακολουθία $(Tx_n) \subset Y$ περιέχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Οι συμπαγείς τελεστές είναι ιδιαίτερα χρήσιμοι, επειδή μετασχηματίζουν φραγμένες ακολουθίες σε ακολουθίες που έχουν συγκλίνουσες υπακολουθίες.

Σημαντικές ιδιότητες των συμπαγών τελεστών:

(i) Αν (x_n)είναι φραγμένη ακολουθία στο X, τότε η (Tx_n)έχει συγκλίνουσα υπακολουθία στο Y.
(ii) Σε πεπερασμένη διάσταση, κάθε γραμμικός τελεστής είναι συμπαγής.

4. Κάθε συμπαγής γραμμικός τελεστής είναι φραγμένος. Συμπεράνετε ότι υπάρχει ακολουθία $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ με $|\lambda_n| \to \infty$ και ακολουθία $(u_n) \subset C^2([0,1])$ τέτοια ώστε $-u_n'' = \lambda_n u_n$στο $(0,1)$, με συνοριακές συνθήκες $u_n'(0) = 0, u_n'(1) = u_n(1)$, και κανονικοποίηση $\| u_n \|_{L^2(I)}= 1$. Αποδείξτε ότι $\lambda_n \to +\infty$.

5. Έστω Σ το σύνολο όλων των τιμών $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες υπάρχει μη μηδενική λύση $u \neq 0$ του προβλήματος συνοριακών τιμών

$-u'' = \lambda u$ στο $(0,1)$, $u'(0) = 0, u'(1) = u(1)$.

Βρείτε τα θετικά στοιχεία του Σ.

Δείξτε ότι υπάρχει ακριβώς μία αρνητική τιμή $\lambda_0 < 0$ στο Σ.

6. Τι συμβαίνει στο Ερώτημα 2 όταν $k = |\lambda_0|$?

3.

Έστω $I = (0,2)$ και ο χώρος $H^1(I)$. Ορίζουμε τη διγραμμική μορφή

$$a(u,v) = \int_0^2 u'(t)v'(t)\,dt + \left(\int_0^1 u(t)\,dt\right)\left(\int_0^1 v(t)\,dt\right), u,v \in H^1(I).$$

1. Εξετάστε αν η $a(u,v)$ είναι συνεχής, συμμετρική διγραμμική μορφή στο $H^1(I)$, και ότι η $a(u,u) = 0$ συνεπάγεται ότι $u = 0$.

2. Αποδείξτε ότι η aείναι πιεστική, δηλαδή ότι υπάρχει σταθερά $\alpha > 0$τέτοια ώστε

$$a(u,u) \geq \alpha \| u \|^2_{H^1(I)}, \forall u \in H^1(I).$$

Υπόδειξη: Προσπαθήστε να αποδείξετε το αποτέλεσμα με απαγωγή σε άτοπο. Αν η aδεν ήταν πιεστική, θα υπήρχε ακολουθία $(u_n) \subset H^1(I)$ τέτοια ώστε $a(u_n,u_n) \to 0$ και $\| u_n \|_{H^1(I)}= 1$. Έστω ότι (u_{n_k}) είναι υπακολουθία της (u_n) τέτοια ώστε η (u_{n_k})να συγκλίνει ασθενώς στο $H^1(I)$και ισχυρά στο $L^2(I)$σε κάποιο όριο u. Δείξτε ότι $u = 0$, και καταλήξτε σε αντίφαση.

3. Συμπεράνετε ότι για κάθε $f \in L^2(I)$, υπάρχει μοναδικό $u \in H^1(I)$που ικανοποιεί

$$a(u,v) = \int_0^2 fv\,dx, \forall v \in H^1(I).$$

Ποιο είναι το αντίστοιχο πρόβλημα ελαχιστοποίησης;

4. Δείξτε ότι η λύση του προηγούμενου προβλήματος ανήκει στο $H^2(I)$, και ειδικότερα ότι $u \in C^1(\bar{I})$.

Προσδιορίστε την εξίσωση και τις συνοριακές συνθήκες που ικανοποιεί το u.

Υπόδειξη: Είναι βολικό να ορίσετε την $g(x) = \left(\int_0^1 u\,(t)\,dt\right)\chi_{(0,1)}(x)$, όπου $\chi_{(0,1)}$είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του (0, 1).

5. Υποθέστε ότι $f \in C(\bar{I})$, και έστω u η λύση του προβλήματος. Αποδείξτε ότι $u \in W^{2,p}(I)$ για κάθε $p < \infty$. Δείξτε ότι $u \in C^2(I)$ αν και μόνο αν $\int_I f = 0$.

6. Προσδιορίστε ρητά τη λύση u όταν η f είναι σταθερή.
7. Θέστε $u = T(f)$, όπου uείναι η λύση του προβλήματος και $f \in L^2(I)$. Εξετάστε αν ο Tείναι αυτοσυζυγής και συμπαγής τελεστής από το $L^2(I)$ στον εαυτό του.

8. Μελετήστε τις ιδιοτιμές του T.

4. Έστω το διάστημα I=(−1,+1) Θεωρήστε τη διγραμμική $a(u,v)$ μορφή ορισμένη στο χώρο $H_0^1(I)$ (δηλαδή, στο χώρο των συναρτήσεων που ανήκουν στον $H^1(I)$ και μηδενίζονται στα άκρα του I)

$$a(u,v) = \int_{-1}^{1} (u'(t)v'(t) - u(t)v(t)\lambda u(0)v)\,dt -, \forall u,v \in H_0^1(I)$$

όπου λ∈ℝ είναι μία σταθερά.

1. Εξετάστε αν $a(u,v)$ είναι μια συνεχής διγραμμική μορφή στον $H_0^1(I)$.
2. Αποδείξτε ότι αν $|\lambda| < \sqrt{2}$, η διγραμμική μορφή a είναι πιεστική (coercive).

Υπόδειξη: Εξετάστε αν $|u(0)| < \|u'\|_{L^2(I)}$ για κάθε $u \in H_0^1(I)$.

3. Συμπεράνετε ότι αν $|\lambda| < \sqrt{2}$, τότε για κάθε $f \in L^2(I)$, υπάρχει μια μοναδική λύση $u \in H^2(\bar{I}) \cap H_0^1(I)$ του προβλήματος:

$$\begin{cases} -u'' + u - \lambda u(0) = f \sigma\tau o I \\ u(-1) = u(1) = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

4. Αποδείξτε ότι υπάρχει μια μοναδική τιμή $\lambda = \lambda_0 \in \mathbb{R}$, που πρέπει να υπολογιστεί ρητά, τέτοια ώστε το πρόβλημα:

$$\begin{cases} -u'' + u = \lambda u(0) \sigma\tau o I \\ u(-1) = u(1) = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

να έχει λύση $u \not\equiv 0$.

[Υπόδειξη: Εισάγετε τη μοναδική λύση φ του προβλήματος:

$$\begin{cases} -\varphi'' + \varphi = 1 \sigma\tau o I \\ \varphi(-1) = \varphi(1) = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

και υπολογίστε τη ρητά.]

5. Αποδείξτε ότι αν $\lambda \neq \lambda_0$, τότε για κάθε $f \in L^2(I)$, υπάρχει μια μοναδική λύση $u \in H^2(I) \cap H_0^1(I)$ του προβλήματος (1).

[Υπόδειξη: Σκεφτείτε τον γραμμικό τελεστή S:g↦v, όπου $g \in L^2(I)$ και v είναι η μοναδική λύση του προβλήματος**:**

$$\begin{cases} -v'' + v = g \text{ στο } I \\ v(-1) = v(1) = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

Γράψτε το πρόβλημα (1) ως εξής:

$$u - \lambda u(0)\varphi = S(f) \,]$$

6. Αναλύστε πλήρως το πρόβλημα (1) όταν $\lambda=\lambda_0$.

Υπόδειξη: Βρείτε μια απλή απαραίτητη και ικανή συνθήκη για το S(f) ώστε το πρόβλημα (1) να έχει λύση.

5. Έστω $H = L^2(0,1)$ εφοδιασμένος με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο

$$(f, g)_{L^2} = \int_0^1 f(x) g(x)\, dx.$$

Ορίζουμε τον τελεστή $T: H \to H$ ως εξής:

$$(Tf)(x) = x \int_x^1 f(t)\, dt + \int_0^x t f(t)\, dt, 0 \leq x \leq 1.$$

1. Εξετάστε αν ο Tείναι φραγμένος τελεστής.

2. **2.** Αποδείξτε ότι ο Tείναι συμπαγής τελεστής.
3. **3.** Αποδείξτε ότι ο Tείναι αυτοσυζυγής.
4. **4.** Δείξτε ότι $(Tf,f)_{L^2} \geq 0, \forall f \in H$ και ότι $(Tf,f)_{L^2} = 0$ αν και μόνο αν $f = 0$.
5. **5.** Θέστε $u = Tf$. Δείξτε ότι $u \in H^2(0,1)$ και υπολογίστε την u''. Εξετάστε αν $u(0) = 0, u'(1) = 0$.
6. **6.** Καθορίστε το φάσμα και τις ιδιοτιμές του T. Εξετάστε ειδικά την περίπτωση $\lambda = 0$.

Για τα επόμενα ερωτήματα, θέτουμε

$$e_k(x) = \sqrt{2}\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi x\right), k = 0,1,2,\dots$$

7. Εξετάστε αν η ακολουθία (e_k)αποτελεί ορθοκανονική βάση του H.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το Ερώτημα 6.

8. Αποδείξτε ότι η ακολουθία $(\tilde{e}_k)$, όπου

$$\tilde{e}_k(x) = \sqrt{2}\cos\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi x\right), k = 0,1,2,\dots$$

είναι επίσης ορθοκανονική βάση του H.

Υπόδειξη: Θεωρήστε τις συναρτήσεις $e_k(1-x)$.

Για κάθε $f \in H$, συμβολίζουμε με $a_k(f)$τις συνιστώσες της fως προς τη βάση (e_k), δηλαδή

$$a_k(f) = \int_0^1 f(x)\, e_k(x)\, dx.$$

9. Υπολογίστε τα $a_k(f)$ για τις εξής συναρτήσεις:

α. $f(x) = \chi_{[a,b]}(x), 0 \leq a < b \leq 1$.

β. $f(x) = x^2$.

γ. $f(x) = x^3$.

Στα επόμενα δύο ερωτήματα θα δώσουμε χαρακτηρισμό του χώρου $H^1(0,1)$ μέσω των συντελεστών Fourier $a_k(f)$ των συναρτήσεων $f \in L^2(0,1)$, ως προς τη βάση (e_k).

10. Υποθέστε ότι $f \in H^1(0,1)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει σταθερά $a \in \mathbb{R}$, που εξαρτάται από την f, τέτοια ώστε $(\rho_k a_k(f) + a)_{k\geq 0} \in \ell^2$, όπου $\rho_k = \left(k+\frac{1}{2}\right)\pi$. Δηλαδή ότι $\sum_{k=0}^{\infty} | \rho_k a_k(f) + a |^2 < \infty$. Ισοδύναμα, μπορεί κανείς να γράψει $(k a_k(f) + a)_{k\geq 0} \in \ell^2$, με αλλαγή της σταθεράς a.

    Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε ολοκλήρωση κατά μέρη στον υπολογισμό του $a_k(f)$.

11. Αντίστροφα, έστω ότι $f \in L^2(0,1)$ και ότι υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $(\rho_k a_k(f) + a)_{k\geq 0} \in \ell^2$. Αποδείξτε ότι $f \in H^1(0,1)$.

    Υπόδειξη: Ορίστε $g = f + \frac{a}{\sqrt{2}}$ και $g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(g) e_k(x)$. Εξετάστε αν η ακολουθία (g_n') παραμένει φραγμένη στο $L^2(0,1)$.