

ΣΑΤΜ 2025-2026
Μαθηματική Ανάλυση
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 7-ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I = \iint_R (x+y) \, dx \, dy$ όπου $R = (x, y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$.

Λύση. Έχουμε

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^2 (x+y) \, dx \right) dy = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} + yx \right]_0^2 dy = \int_0^1 (2+2y) \, dy = [2y+y^2]_0^1 = 3$$

ή

$$I = \int_0^2 \left(\int_0^1 (x+y) \, dy \right) dx = \int_0^2 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^1 dx = \int_0^2 \left(x + \frac{1}{2} \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} \right]_0^2 = 3$$

Άσκηση 2. Δείξτε ότι το εμβαδόν ενός δίσκου ακτίνας R είναι πR^2 .

Λύση. Έστω $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$. Τότε το D σε πολικές συντεταγμένες γράφεται $D^* = \{(r, \vartheta) : 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq R\}$. Άρα

$$E(D) = \iint_D 1 \, dx \, dy = \int_{D^*} r \, dr \, d\vartheta = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R r \, dr \right) d\vartheta = 2\pi \frac{r^2}{2} \Big|_0^R = \pi R^2$$

Άσκηση 3. Έστω $D = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 2-x^2\}$. Υπολογίστε το $I := \iint_D |x| \, dx \, dy$.

Λύση. Οι παραβολές $y = x^2$ και $y = 2-x^2$ τέμνονται στα σημεία $(-1, 1)$ και $(1, 1)$. Το D είναι x -απλό: για σταθερό $x \in [-1, 1]$ το y βρίσκεται μεταξύ x^2 και $2-x^2$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \left(\int_{x^2}^{2-x^2} |x| \, dy \right) dx = 2 \int_{-1}^1 |x|(1-x^2) \, dx \\ &= 4 \int_0^1 x(1-x^2) \, dx = 4 \int_0^1 (x-x^3) \, dx = 4 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = 1. \end{aligned}$$

Άσκηση 4. Έστω $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 1], y \leq x \leq 1\}$. Υπολογίστε το $I = \iint_D \frac{y}{(1+x^3)^5} \, dx \, dy$.

Λύση. Το D είναι και κατακόρυφα και οριζόντια απλό. Θα το θεωρήσουμε ως κατακόρυφα απλό. Για σταθερό $x \in [0, 1]$ το y βρίσκεται μεταξύ 0 και x , άρα

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\int_0^x \frac{y}{(1+x^3)^5} \, dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^3)^5} \, dx \\ &= \frac{1}{6} \int_1^2 \frac{du}{u^5} = -\frac{1}{24} u^{-4} \Big|_1^2 = \frac{1}{24} \left(1 - \frac{1}{16} \right) = \frac{15}{24 \cdot 16}. \end{aligned}$$

Άσκηση 5. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 \left(\int_{2y}^2 \cos(x^2) \, dx \right) dy$,

Λύση. Το χωρίο ολοκλήρωσης είναι το $D = \{(x, y) : 2y \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$. Το χωρίο είναι οριζόντια απλό αλλά και κατακόρυφα απλό αφού

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \frac{x}{2}\}$$

Άρα

$$I = \int_0^2 \left(\int_{y=0}^{\frac{x}{2}} \cos(x^2) \, dy \right) dx = \int_0^2 \cos(x^2) \frac{x}{2} \, dx = \frac{1}{4} \int_0^4 \cos u \, du = \frac{\sin u}{4} \Big|_0^4 = \frac{\sin 4}{4}$$

Άσκηση 6. Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου D που φράσσεται από την παραβολή $y^2 = 6x$ και την ευθεία $x - y = 12$.

Λύση. Οι δύο αυτές καμπύλες τέμνονται στα σημεία $C(24, 12)$ και $C'(6, -6)$. Κάνοντας και ένα σχήμα βλέπουμε ότι

$$E(D) = \iint_D dx dy = \int_{-6}^{12} \left(\int_{y^2/6}^{y+12} dx \right) dy = \int_{-6}^{12} \left(y + 12 - \frac{y^2}{6} \right) dy,$$

το οποίο υπολογίζεται εύκολα.

Άσκηση 7. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 \left(\int_{y=\sqrt{x}}^1 \sqrt{1+y^3} dy \right) dx$ αντιστρέφοντας τη σειρά ολοκλήρωσης.

Λύση. Έχουμε $D = \{(x, y) : \sqrt{x} \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1\} = \{(x, y) : 0 \leq x \leq y^2, 0 \leq y \leq 1\}$. Άρα

$$I = \int_0^1 \int_0^{y^2} \sqrt{1+y^3} dx dy = \int_0^1 \sqrt{1+y^3} y^2 dy = \frac{1}{3} \int_1^2 \sqrt{u} du = \frac{1}{3} \frac{2}{3} \left[t^{3/2} \right]_1^2 = \frac{2}{9} (\sqrt{8} - 1)$$

Άσκηση 8. Έστω $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2x, x \geq 1, y \geq 0\}$. Να υπολογιστεί το $I := \iint_D \frac{x}{x^2 + y^2} dx dy$.

Λύση. Παρατηρούμε ότι $(x, y) \in D$ αν και μόνο αν $x = r \cos \vartheta$ και $y = r \sin \vartheta$ όπου

$$r \leq 2 \cos \vartheta, \quad r \cos \vartheta \geq 1$$

Κάνοντας ένα σχήμα βλέπουμε ότι το D σε πολικές συντεταγμένες μετασχηματίζεται στο

$$D^* = \{(r, \vartheta) : 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{4}, \frac{1}{\cos \vartheta} \leq r \leq 2 \cos \vartheta\}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D^*} \frac{r \cos \vartheta}{r^2} r dr d\vartheta = \iint_D \cos \vartheta dr d\vartheta \\ &= \int_0^{\pi/4} \cos \vartheta \left(\int_{1/\cos \vartheta}^{2 \cos \vartheta} dr \right) d\vartheta = \int_0^{\pi/4} (2 \cos^2 \vartheta - 1) d\vartheta \\ &= \int_0^{\pi/4} \cos(2\vartheta) d\vartheta = \frac{1}{2} \sin(2\vartheta) \Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Άσκηση 9. Έστω $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 1/2\}$. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I := \iint_D \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dx dy.$$

Λύση. Θέτουμε $x = r \cos \vartheta$ και $y = r \sin \vartheta$. Παρατηρούμε ότι $(x, y) \in D$ αν και μόνο αν $(r, \vartheta) \in D^*$ όπου $D^* = \{(r, \vartheta) : \pi/6 \leq \vartheta \leq 5\pi/6, \frac{1}{2 \sin \vartheta} \leq r \leq 1\}$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D^*} \frac{r^3 \sin^3 \vartheta}{(r^2)^{3/2}} r dr d\vartheta = \iint_{D^*} r \cdot \sin^3 \vartheta dr d\vartheta \\ &= \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \sin^3 \vartheta \left(\int_{\frac{1}{2 \sin \vartheta}}^1 r dr \right) d\vartheta = \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \sin^3 \vartheta \left(1 - \frac{1}{4 \sin^2 \vartheta} \right) d\vartheta \\ &= \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \sin^3 \vartheta d\vartheta - \frac{1}{8} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \sin \vartheta d\vartheta. \end{aligned}$$

Τα δύο αυτά ολοκλήρωματα υπολογίζονται με στοιχειώδη τρόπο.

Άσκηση 10. Έστω $D = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$. Να υπολογιστεί το

$$I := \iint_D (x - y) dx dy.$$

Λύση. Θέτουμε $x = r \cos \vartheta$ και $y = r \sin \vartheta$. Τότε το D μετασχηματίζεται στο

$$D^* = \{(r, \vartheta) : 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \vartheta \leq \pi\}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi \left(\int_1^2 (r \cos \vartheta - r \sin \vartheta) r dr \right) d\vartheta = \int_0^\pi (\cos \vartheta - \sin \vartheta) d\vartheta \cdot \int_1^2 r^2 dr \\ &= \left(\sin \vartheta \Big|_0^\pi + \cos \vartheta \Big|_0^\pi \right) \cdot \frac{r^3}{3} \Big|_1^2 = -\frac{14}{3}. \end{aligned}$$