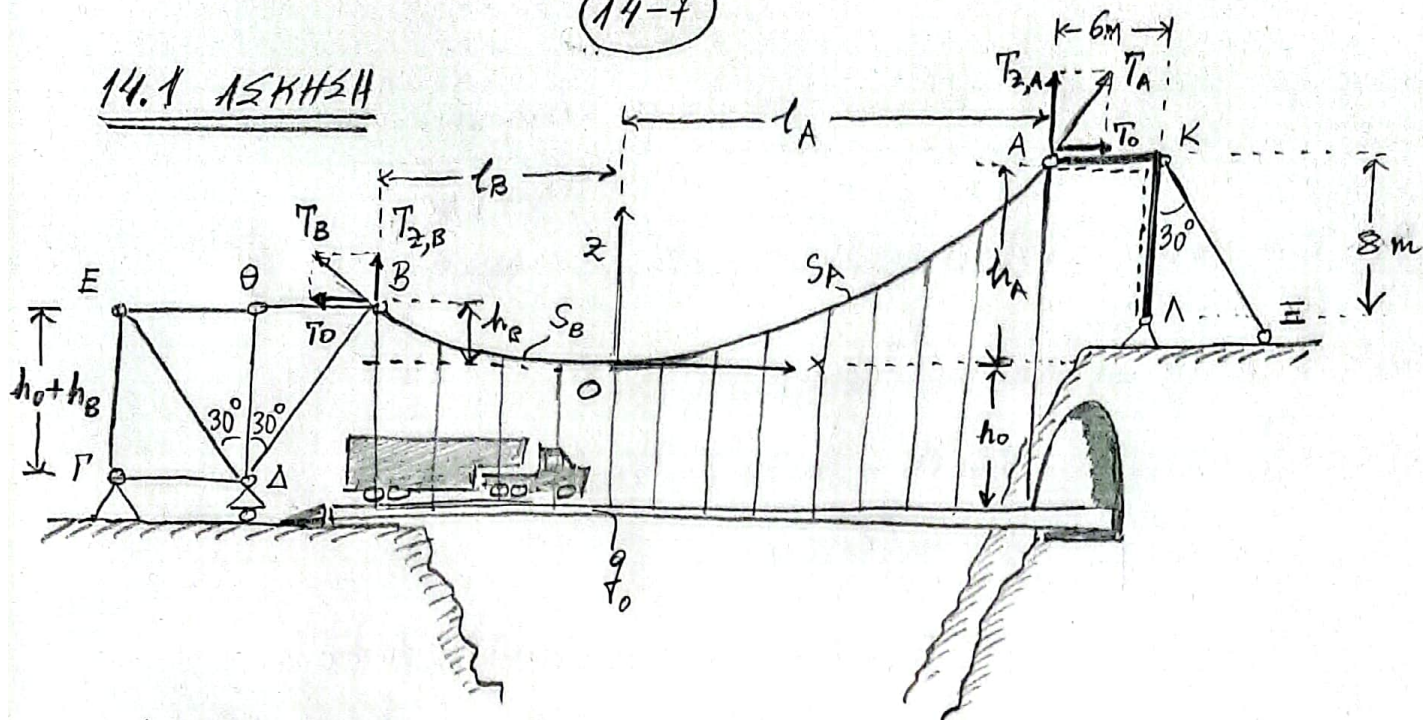


14.1 ΑΣΚΗΣΗ



Δίνονται

$$l_A = 40 \text{ m}, h_A = 10 \text{ m}, h_0 = 12.5 \text{ m}, l_B = 20 \text{ m}, q_0 = 50 \text{ kN/m}$$

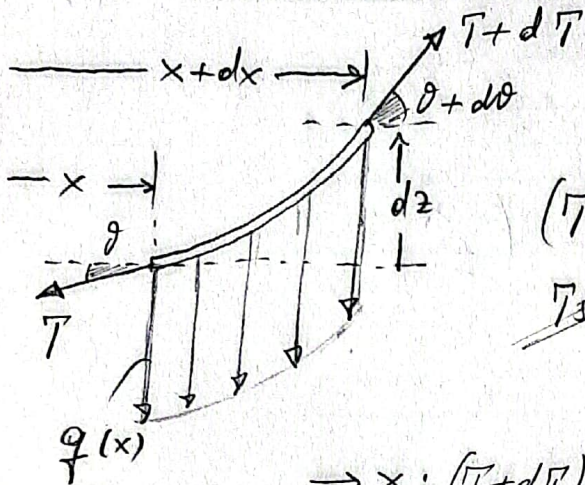
Ζητούνται

- Η εξίσωση του (παράβολου) καλωδίου
- Η οριζόντια σταθερή συνιστώσα T_0 , της δύναμης του καλωδίου
- Η κλίση του παραβολικού καλωδίου
- Η δύναμη h_B
- Το απαιτούμενο μήκος του καλωδίου
- Τις δυνάμεις T_A, T_B στα σημεία αναρτήσεως του καλωδίου
- Τις δυνάμεις των ράβδων του δικτυώματος (ΒΓΔΕΘ) και τα διατμητικά των Ν, Ω, Η του πλαισίου (ΑΚΛ).

Λύση

Κατά την επίλυση γίνεται εξαγωγή των εξισώσεων σχεδιασμού του καλωδίου για επιβάρυνση της θεωρίας (επιβάρυνση παραβολικού καλωδίου, όταν δηλ. φορτίο με ομοιόμορφα καταμετρημένο φορτίο q , και αγνόηση του ιδίου βάρους του καλωδίου).

α) Εξίσωση διαφορικού τμήματος καλωδίου (με γενική περίπτωση $q = q(x)$)



$$\uparrow z: (T+dT)\sin(\theta+d\theta) = q(x)dx + T\sin\theta$$

$$(T+dT)(\sin\theta \cos d\theta + \cos\theta \sin d\theta) = q(x)dx + T\sin\theta$$

$$\cancel{T\sin\theta} + T\cos\theta d\theta + dT\sin\theta + \cos\theta dT d\theta = q(x)dx + \cancel{T\sin\theta}$$

$$\boxed{d(T\sin\theta) = q(x)dx} \quad (1)$$

$$\rightarrow x: (T+dT)\cos(\theta+d\theta) = T\cos\theta$$

$$(T+dT)(\cos\theta \cos d\theta - \sin\theta \sin d\theta) = T\cos\theta$$

$$\cancel{T\cos\theta} - T\sin\theta d\theta + dT\cos\theta - \sin\theta dT d\theta = \cancel{T\cos\theta} \quad 0$$

$$\boxed{d(T\cos\theta) = 0} \quad (2)$$

$$(2) \Rightarrow \underline{T(x)\cos\theta(x) = T_0 = \text{const.} \quad \forall x.} \quad \Rightarrow T(x) = \frac{T_0}{\cos\theta(x)} \quad (3)$$

$$(1), (3) \Rightarrow d(T_0 \tan\theta) = q(x)dx \Rightarrow d\left(T_0 \frac{dz}{dx}\right) = q(x)dx \Rightarrow$$

$$\text{θεωρούμε } \tan\theta = \frac{dz}{dx} \quad (\text{κλίση}) \int$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{q(x)}{T_0}} \quad \begin{array}{l} \text{δενική (} q = q(x) \text{)} \\ \text{διαφορική εξίσωση} \\ \text{καλωδίου} \end{array} \quad (4)$$

Στην ειδική περίπτωση ομοιόμορφα καταμετρημένη φορτίου $q(x) = q_0 = \text{const.}$, (και αγνόησας το ίδιο βάρος, όπως την περίπτωση της κρεμαστή γέφυρας).

$$(4) \xrightarrow{\int} \frac{dz}{dx} = \frac{q_0}{T_0} x + C_1, \quad \left. \frac{dz}{dx} \right|_{x=0} = 0 = \frac{q_0}{T_0} 0 + C_1 \Rightarrow \underline{C_1 = 0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dz}{dx} = \frac{q_0}{T_0} x} \quad (5) \quad \begin{array}{l} \text{κλίση} \\ \text{(απαλομένη)} \\ \text{καλωδίου} \end{array}$$

(14-9)

$$(5) \int \rightarrow z(x) = \frac{q_0}{2T_0} x^2 + C_2, \quad z(0) \equiv 0 = \frac{q_0}{2T_0} 0^2 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0$$

(για να αντιστοιχεί στην αρχική συνθήκη)

$$\Rightarrow \boxed{z(x) = \frac{q_0}{2T_0} x^2} \quad \beta) \frac{\text{Εξίσωση}}{\text{Παραβολικός}} \\ \text{Καλώσιου}$$

β) ! Για δεδομένα να $l_A = 40 \text{ m}$, και $h_A = 10 \text{ m}$

$$(6) \Rightarrow h_A = \frac{q_0}{2T_0} l_A^2 \Rightarrow \boxed{T_0 = \frac{q_0 l_A^2}{2h_A}} \quad (7)$$

$$\boxed{T_0 = \frac{50 \times 40^2}{2 \times 10^2} = 400 \text{ kN}}$$

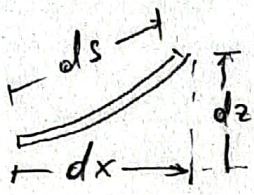
$$\gamma) (5): \boxed{\tan \theta(x) = \frac{dz(x)}{dx} = \frac{q_0}{T_0} x} \quad (7) \quad \cancel{\frac{q_0}{2T_0}} \times \frac{2h_A}{q_0 l_A^2} = \frac{2h_A}{l_A^2} x \quad (8)$$

$$\boxed{\tan \theta(x) = \frac{dz}{dx} = \frac{2 \times 10}{40^2} x = 0.0125 x}$$

$$\delta) (6): \boxed{z(x) = \frac{q_0}{2T_0} x^2} \quad (7) \quad \cancel{\frac{q_0}{2T_0}} \times \frac{2h_A}{q_0 l_A^2} = h_A \left(\frac{x}{l_A} \right)^2 \quad (9)$$

$$\boxed{h_B = h_A \left(\frac{l_B}{l_A} \right)^2 = 10 \left(\frac{20}{40} \right)^2 = 2.5 \text{ m}}$$

ε) Μήκος καλώδιου



$$ds = \sqrt{dx^2 + dz^2} = dx \left[1 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} =$$

$$= dx \left[1 + n \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 + \frac{n(n-1)}{2} \left(\frac{dz}{dx} \right)^4 + \dots \right] \quad \underline{\underline{(8)}}$$

$$= dx \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2h_A}{l_A^2} x \right)^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2} \left(\frac{2h_A}{l_A^2} x \right)^4 + \dots \right]$$

$$= dx \left(1 + 2 \frac{h_A^2}{l_A^4} x^2 - 2 \frac{h_A^4}{l_A^8} x^4 + \dots \right)$$

$$S_A = \int_0^{l_A} ds = \int_0^{l_A} \left(1 + 2 \frac{h_A^2}{l_A^4} x^2 - 2 \frac{h_A^4}{l_A^8} x^4 + \dots \right) dx =$$

$$= l_A + \frac{2}{3} \frac{h_A^2}{l_A^4} l_A^3 - \frac{2}{5} \frac{h_A^4}{l_A^8} l_A^5 + \dots = \Delta$$

$$\Rightarrow S_A = l_A \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{h_A}{l_A} \right)^2 - \frac{2}{5} \left(\frac{h_A}{l_A} \right)^4 + \dots \right] \quad (10)$$

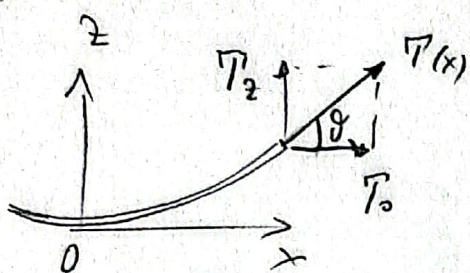
$$\boxed{S_A \approx 40 \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{10}{40} \right)^2 - \frac{2}{5} \left(\frac{10}{40} \right)^4 \right] = 40 \left(1 + \frac{2}{3} \times 0.0625 - \frac{2}{5} \times 0.0039 \right) =}$$

$$\underline{\underline{= 41.61 \text{ m}}}$$

Αναλόγως προκύπτει το $S_B = \int_0^{l_B} ds = \int_0^{l_B} \left(1 + \frac{2h_A^2}{l_A^4} x^2 - \frac{2h_A^4}{l_A^8} x^4 \right) dx$

02)

14-11



$$T(x) = \sqrt{T_0^2 + T_z^2}$$

$$T_z = T_0 \tan \theta$$

$$\Rightarrow T(x) = T_0 \sqrt{1 + \tan^2 \theta} \quad (7) \quad \frac{q_0 l_A^2}{2h_A} \sqrt{1 + \left(\frac{2h_A}{l_A^2}\right)^2 x^2} = D \quad (8)$$

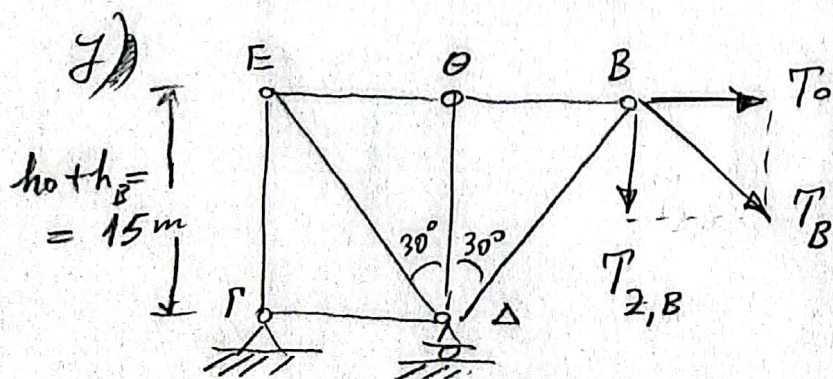
$$\Rightarrow T(x) = q_0 \sqrt{\left(\frac{l_A^2}{2h_A}\right)^2 + x^2} \quad (11)$$

$$T_A = q_0 \sqrt{\left(\frac{l_A^2}{2h_A}\right)^2 + l_A^2} = q_0 l_A \sqrt{\left(\frac{l_A}{2h_A}\right)^2 + 1} =$$

$$= 50 \times 40 \sqrt{\left(\frac{40}{2 \times 10}\right)^2 + 1} \cong 4472 \text{ kN}$$

$$T_B = q_0 \sqrt{\left(\frac{l_A^2}{2h_A}\right)^2 + (-l_B)^2} =$$

$$= 50 \times \sqrt{\left(\frac{40^2}{2 \times 10}\right)^2 + 20^2} \cong 4123 \text{ kN}$$



$$T_{2,B} = \sqrt{T_B^2 - T_0^2} =$$

$$= \sqrt{4123^2 - 400^2} \cong$$

$$\cong 4104.0 \text{ kN}$$