

Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωσης (2025–26)

Υποδείξεις για τις Ασκήσεις – Φυλλάδιο 2

1. Έστω $X \neq \emptyset$ και $\varphi : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ εξωτερικό μέτρο. Αποδείξτε ότι αν $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ είναι μια ακολουθία ξένων ανά δύο φ -μετρήσιμων συνόλων, τότε για κάθε $E \subseteq X$ ισχύει ότι

$$\varphi\left(E \cap \left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right)\right) = \sum_{n=1}^\infty \varphi(E \cap A_n).$$

Υπόδειξη: Αν A, B είναι ξένα φ -μετρήσιμα σύνολα και $E \subseteq X$, τότε

$$\begin{aligned}\varphi(E \cap (A \cup B)) &= \varphi(E \cap (A \cup B) \cap A) + \varphi(E \cap (A \cup B) \cap A^c) \\ &= \varphi(E \cap A) + \varphi(E \cap B).\end{aligned}$$

Με επαγωγή έπεται ότι

$$\varphi\left(E \cap \left(\bigcup_{n=1}^N A_n\right)\right) = \sum_{n=1}^N \varphi(E \cap A_n)$$

για ξένα ανά δύο φ -μετρήσιμα σύνολα $A_1, A_2, \dots, A_N$ και κάθε $E \subseteq X$.

Έστω $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ μια ακολουθία ξένων ανά δύο φ -μετρήσιμων συνόλων, και έστω $E \subseteq X$. Για κάθε $N \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\sum_{n=1}^N \varphi(E \cap A_n) \leq \varphi\left(E \cap \left(\bigcup_{n=1}^N A_n\right)\right) \leq \varphi\left(E \cap \left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right)\right),$$

όπου η ανισότητα ισχύει λόγω της μονοτονίας του εξωτερικού μέτρου. Αφήνοντας το $N \rightarrow \infty$ συμπεραίνουμε ότι

$$\sum_{n=1}^\infty \varphi(E \cap A_n) \leq \varphi\left(E \cap \left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right)\right),$$

Η αντίστροφη ανισότητα προκύπτει από την υποπροσθετικότητα του εξωτερικού μέτρου:

$$\varphi\left(E \cap \left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right)\right) = \varphi\left(\bigcup_{n=1}^\infty (E \cap A_n)\right) \leq \sum_{n=1}^\infty \varphi(E \cap A_n).$$

2. (α) Έστω $\varphi : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ ένα εξωτερικό μέτρο στο μη κενό σύνολο X , και έστω $A \subseteq X$. Αποδείξτε ότι το A είναι φ -μετρήσιμο αν και μόνο αν για κάθε $B \subseteq A$ και κάθε $C \subseteq X \setminus A$ ισχύει ότι $\varphi(B \cup C) = \varphi(B) + \varphi(C)$.

(β) Έστω $\varphi_1, \varphi_2 : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ εξωτερικά μέτρα στο μη κενό σύνολο X . Αποδείξτε ότι η $\varphi = \max\{\varphi_1, \varphi_2\}$ είναι επίσης εξωτερικό μέτρο.

Υπόδειξη: (α) ($\implies$) Από τις $B \subseteq A$ και $C \subseteq A^c$ έπεται ότι

$$(B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A) = B, \quad (B \cup C) \cap A^c = (B \cap A^c) \cup (C \cap A^c) = C.$$

Εφόσον το A είναι φ -μετρήσιμο,

$$\varphi(B \cup C) = \varphi((B \cup C) \cap A) + \varphi((B \cup C) \cap A^c) = \varphi(B) + \varphi(C).$$

($\impliedby$) Έστω $E \subseteq X$. Θέτουμε $B = E \cap A \subseteq A$ και $C = E \cap A^c \subseteq A^c$. Τότε, $E = B \cup C$. Εφαρμόζοντας την υπόθεση για τα B και C βλέπουμε ότι

$$\varphi(E) = \varphi(B \cup C) = \varphi(B) + \varphi(C) = \varphi(E \cap A) + \varphi(E \cap A^c).$$

Αφού το $E \subseteq X$ ήταν τυχόν, έπεται ότι το A είναι φ -μετρήσιμο.

(β) Θα χρησιμοποιήσουμε την παρατήρηση ότι αν $a_1 \leq b_1$ και $a_2 \leq b_2$ τότε $\max\{a_1, a_2\} \leq \max\{b_1, b_2\}$.

Αρχικά παρατηρούμε ότι $\varphi(\emptyset) = \max\{\varphi_1(\emptyset), \varphi_2(\emptyset)\} = 0$, διότι $\varphi_1(\emptyset) = \varphi_2(\emptyset) = 0$.

Για τη μονοτονία, αν $A \subseteq B \subseteq X$ έχουμε ότι $\varphi_1(A) \leq \varphi_1(B)$ και $\varphi_2(A) \leq \varphi_2(B)$, οπότε η αρχική παρατήρηση μας δίνει

$$\varphi(A) = \max\{\varphi_1(A), \varphi_2(A)\} \leq \max\{\varphi_1(B), \varphi_2(B)\} = \varphi(B).$$

Για την αριθμήσιμη υποπροσθετικότητα, αν $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία υποσυνόλων του X έχουμε ότι

$$\varphi_i \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_i(A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n) \quad i = 1, 2.$$

Τότε, πάλι από την παρατήρηση,

$$\varphi \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \max \left\{ \varphi_1 \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right), \varphi_2 \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \right\} \leq \max \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_1(A_n), \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_2(A_n) \right\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n).$$

3. Λέμε ότι ένα $E \subseteq \mathbb{R}$ έχει σημείο συμπίκνωσης στο άπειρο αν για κάθε φραγμένο διάστημα $[a, b]$ το σύνολο $E \setminus [a, b]$ είναι υπεραριθμήσιμο. Ορίζουμε $\varphi : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$ με $\varphi(E) = 0$ αν το E είναι αριθμήσιμο, $\varphi(E) = 1$ αν το E είναι υπεραριθμήσιμο και δεν έχει σημείο συμπίκνωσης στο άπειρο, και $\varphi(E) = +\infty$ αν το E έχει σημείο συμπίκνωσης στο άπειρο. Αποδείξτε ότι η φ είναι εξωτερικό μέτρο στο $\mathbb{R}$ και ότι ένα $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι φ -μετρήσιμο αν και μόνο αν το A ή το $\mathbb{R} \setminus A$ είναι αριθμήσιμο.

Υπόδειξη: Δείχνουμε πρώτα ότι η φ είναι εξωτερικό μέτρο. Αρχικά, το κενό σύνολο $\emptyset$ είναι αριθμήσιμο, άρα $\varphi(\emptyset) = 0$ από τον ορισμό της φ .

Έστω $E \subseteq F \subseteq \mathbb{R}$. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

1. Αν το F είναι αριθμήσιμο, τότε και το E είναι αριθμήσιμο, άρα $\varphi(E) = 0 = \varphi(F)$.
2. Αν το F έχει σημείο συμπίκνωσης στο άπειρο, άρα $\varphi(F) = +\infty \geq \varphi(E)$ για οποιοδήποτε $E \subseteq \mathbb{R}$.
3. Αν το F είναι υπεραριθμήσιμο και δεν έχει σημείο συμπίκνωσης στο άπειρο, τότε $\varphi(F) = 1$ και υπάρχει φραγμένο διάστημα $[a, b]$ τέτοιο ώστε το $F \setminus [a, b]$ να είναι αριθμήσιμο. Τότε, το $E \setminus [a, b]$ είναι επίσης αριθμήσιμο, άρα το E δεν έχει σημείο συμπίκνωσης στο άπειρο, δηλαδή $\varphi(E) = 0$ ή $\varphi(E) = 1$. Σε κάθε περίπτωση, $\varphi(E) \leq \varphi(F)$.

Έτσι, έχουμε αποδείξει τη μονοτονία της φ .

Έστω τώρα $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Για να δείξουμε ότι

$$\varphi \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(E_n),$$

μπορούμε να υποθέσουμε ότι το δεξιό μέλος είναι πεπερασμένο. Τότε, κανένα E_n δεν έχει σημείο συμπίκνωσης στο άπειρο, και επίσης το σύνολο $M = \{n \in \mathbb{N} : E_n : \text{υπεραριθμήσιμο}\}$ είναι πεπερασμένο. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $M \neq \emptyset$ και $M = \{1, \dots, k\}$. Πράγματι, αν όλα τα E_n είναι αριθμήσιμα, τότε το ίδιο ισχύει για το $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ και η ανισότητα που θέλουμε να δείξουμε ισχύει ως ισότητα $0 = 0$. Μπορούμε επίσης να αναδιατάξουμε τα σύνολα ώστε τα υπεραριθμήσιμα να είναι τα $E_1, \dots, E_k$ για κάποιον $k \geq 1$. Τότε, τα E_s , $s > k$ είναι όλα αριθμήσιμα.

Για κάθε $s = 1, \dots, k$ υπάρχει διάστημα $[a_s, b_s]$ τέτοιο ώστε το $E_s \setminus [a_s, b_s]$ να είναι αριθμήσιμο. Αν ορίσουμε $a = \min\{a_1, \dots, a_k\}$ και $b = \max\{b_1, \dots, b_k\}$ τότε το

$$\bigcup_{s=1}^{\infty} E_s \setminus [a, b] \subseteq \bigcup_{s=1}^k (E_s \setminus [a_s, b_s]) \cup \bigcup_{s=k+1}^{\infty} E_s$$

είναι αριθμήσιμο, άρα το $\bigcup_{s=1}^{\infty} E_s$ είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο που δεν έχει σημείο συμπίκνωσης στο άπειρο. Έπεται ότι

$$\varphi\left(\bigcup_{s=1}^{\infty} E_s\right) = 1 \leq k = \sum_{s=1}^{\infty} \varphi(E_s).$$

Αυτό αποδεικνύει την υποπροσθετικότητα της φ , και έχουμε ότι η φ είναι εξωτερικό μέτρο.

Δείχνουμε τώρα ότι ένα $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι φ -μετρήσιμο αν και μόνο αν το A ή το $\mathbb{R} \setminus A$ είναι αριθμήσιμο.

($\Leftarrow$) Υποθέτουμε ότι το A είναι αριθμήσιμο. Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$. Θα δείξουμε ότι

$$\varphi(E) = \varphi(E \cap A) + \varphi(E \cap A^c).$$

Το $E \cap A$ είναι αριθμήσιμο, άρα $\varphi(E \cap A) = 0$. Πρέπει λοιπόν να δείξουμε ότι

$$\varphi(E) = \varphi(E \cap A^c).$$

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

1. Αν το E είναι αριθμήσιμο, τότε το $E \cap A^c$ είναι επίσης αριθμήσιμο, άρα $\varphi(E) = 0 = \varphi(E \cap A^c)$.
2. Αν το E είναι υπεραριθμήσιμο και δεν έχει σημείο συμπίκνωσης στο άπειρο, τότε το $E \cap A^c = E \setminus A$ είναι επίσης υπεραριθμήσιμο (διότι το A είναι αριθμήσιμο) και ως υποσύνολο του E δεν έχει ούτε αυτό σημείο συμπίκνωσης στο άπειρο. Άρα, $\varphi(E) = 1 = \varphi(E \cap A^c)$.
3. Αν το E είναι υπεραριθμήσιμο και έχει σημείο συμπίκνωσης στο άπειρο, τότε για κάθε φραγμένο διάστημα $[a, b]$ το $E \cap [a, b]$ είναι υπεραριθμήσιμο, άρα το $(E \setminus A) \cap [a, b]$ είναι επίσης υπεραριθμήσιμο (διότι το A είναι αριθμήσιμο). Άρα, το $E \setminus A$ έχει κι αυτό σημείο συμπίκνωσης στο άπειρο, και έπεται ότι $\varphi(E) = +\infty = \varphi(E \cap A^c)$.

Όμοια δουλεύουμε αν το A^c είναι αριθμήσιμο, δείχνοντας ότι $\varphi(E) = \varphi(E \cap A)$ για κάθε $E \subseteq \mathbb{R}$.

($\Rightarrow$) Δείχνουμε ότι αν το A και το A^c είναι υπεραριθμήσιμα σύνολα τότε το A δεν είναι φ -μετρήσιμο. Θεωρώντας τις τομές $A \cap [-n, n]$ και $A^c \cap [-n, n]$ βλέπουμε εύκολα ότι υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε το $A \cap [-N, N]$ και το $A^c \cap [-N, N]$ να είναι υπεραριθμήσιμα σύνολα. Αφού το $[-N, N]$ και τα δύο αυτά σύνολα είναι φραγμένα, δεν μπορούν να έχουν σημείο συμπίκνωσης στο άπειρο, άρα

$$\varphi([-N, N]) = 1 \neq 1 + 1 = \varphi([-N, N] \cap A) + \varphi([-N, N] \cap A^c).$$

Έπεται ότι το A δεν είναι φ -μετρήσιμο.

4. Έστω μ ένα πεπερασμένο μέτρο στην $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $E \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(E) = 0$ ισχύει ότι $\mu(E) = 0$. Αποδείξτε ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $E \subseteq \mathbb{R}$ και $\lambda(E) < \delta$ τότε $\mu(E) < \varepsilon$.

Υπόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ τέτοιο ώστε $\lambda(E) < \delta$ αλλά $\mu(E) \geq \varepsilon$. Εφαρμόζοντας το παραπάνω με $\delta_n = 1/2^n$, $n \in \mathbb{N}$, βρίσκουμε ακολουθία $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ στην $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ με

$$\lambda(E_n) < \frac{1}{2^n} \quad \text{και} \quad \mu(E_n) \geq \varepsilon \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Ορίζουμε $E = \limsup E_n$. Εφόσον $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) < 1 < \infty$, από το λήμμα Borel-Cantelli συμπεραίνουμε ότι $\lambda(E) = 0$. Άρα, $\mu(E) = 0$. Όμως,

$$\mu(E) = \mu(\limsup E_n) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right),$$

όπου $F_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$, και παρατηρούμε ότι: $\mu(F_n) \geq \mu(E_n) \geq \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι φθίνουσα, και $\mu(F_1) \leq \mu(\mathbb{R}) < \infty$. Έπεται ότι

$$\mu(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(F_n) \geq \varepsilon > 0,$$

και έχουμε καταλήξει σε άτοπο.

5. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι το A είναι Lebesgue μετρήσιμο αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν ανοικτά σύνολα U και V τέτοια ώστε $A \subseteq U$, $U \setminus A \subseteq V$ και $\lambda(V) < \varepsilon$.

Υπόδειξη: Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\lambda^*(A) < \infty$ (εξηγήστε γιατί).

($\implies$) Από την εξωτερική κανονικότητα του μέτρου Lebesgue, υπάρχει ανοικτό σύνολο U τέτοιο ώστε $A \subseteq U$ και

$$\lambda(U \setminus A) = \lambda(U) - \lambda(A) < \varepsilon/2.$$

Το $U \setminus A$ είναι επίσης μετρήσιμο, άρα, πάλι από την εξωτερική κανονικότητα του μέτρου Lebesgue, υπάρχει ανοικτό σύνολο V τέτοιο ώστε $U \setminus A \subseteq V$ και $\lambda(V) < \lambda(U \setminus A) + \varepsilon/2 < \varepsilon$.

($\impliedby$) Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda^*(E) < +\infty$, και $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε ανοικτά σύνολα U και V τέτοια ώστε $A \subseteq U$, $U \setminus A \subseteq V$ και $\lambda(V) < \varepsilon$.

Θεωρούμε τυχόν $\delta > 0$ και ανοικτό σύνολο G τέτοιο ώστε $\lambda(G) \leq \lambda^*(E) + \delta$. Έχουμε

$$\lambda^*(E) + \delta \geq \lambda(G) = \lambda(G \cap U) + \lambda(G \cap U^c) \geq \lambda^*(E \cap U) + \lambda^*(E \cap U^c),$$

και αφού το $\delta > 0$ ήταν τυχόν,

$$\lambda^*(E) \geq \lambda^*(E \cap U) + \lambda^*(E \cap U^c).$$

Από την $E \cap A^c = (E \cap U^c) \cup (E \cap (U \setminus A))$ έχουμε

$$\lambda^*(E \cap A^c) \leq \lambda^*(E \cap U^c) + \lambda^*(E \cap (U \setminus A)) \leq \lambda^*(E \cap U^c) + \lambda(V) < \lambda^*(E \cap U^c) + \varepsilon,$$

και από την $E \cap A \subseteq E \cap U$ έχουμε $\lambda^*(E \cap A) \leq \lambda^*(E \cap U)$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω, βλέπουμε ότι

$$\lambda^*(E) \geq \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \cap A^c) - \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι

$$\lambda^*(E) \geq \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \cap A^c),$$

και από γνωστή παρατήρηση αυτό είναι αρκετό για να συμπεράνουμε ότι το A είναι Lebesgue μετρήσιμο.

6. Κατασκευάστε ένα ανοικτό σύνολο $U \subset [0, 1]$ με τις εξής ιδιότητες:

(α) Το U είναι πυκνό στο $[0, 1]$.

(β) $\lambda(U) < 1$.

(γ) Για κάθε ανοικτό διάστημα $(a, b) \subset [0, 1]$ ισχύει ότι $\lambda(U \cap (a, b)) > 0$.

Υπόδειξη: Ορίζουμε $D = \mathbb{Q} \cap (0, 1) = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ μια αρίθμηση των ρητών του $(0, 1)$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $\delta_n = 1/2^{n+2}$ και $I_n = (q_n - \delta_n, q_n + \delta_n) \cap [0, 1]$. Κάθε I_n είναι ανοικτό στο $[0, 1]$ και $\lambda(I_n) \leq 2\delta_n = 1/2^{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε το σύνολο

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Το U είναι πυκνό στο $[0, 1]$ διότι $D \subseteq U$ και $\overline{D} = [0, 1]$, άρα $\overline{U} = [0, 1]$.

Για το μέτρο του U , από την υποπροσθετικότητα του λ έχουμε

$$\lambda(U) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} < 1.$$

Τέλος, έστω $(a, b) \subset [0, 1]$ ανοικτό διάστημα. Υπάρχει $q_n \in D \cap (a, b)$. Τότε,

$$(q_n - \delta, q_n + \delta) \subseteq I_n \cap (a, b),$$

όπου $\delta = \min\{\delta_n, q_n - a, b - q_n\} > 0$. Άρα, $\lambda(U \cap (a, b)) \geq \lambda(I_n \cap (a, b)) \geq 2\delta > 0$.

7. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Αποδείξτε ότι

$$\lambda_2(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(B_n) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right\}$$

όπου το infimum παίρνεται πάνω από όλες τις αριθμήσιμες καλύψεις του A από ανοικτούς δίσκους $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ και $\alpha(B) = \pi r^2$ για έναν δίσκο ακτίνας r . Συμπεράνατε ότι: αν T είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^2$ τότε $\lambda_2(A) = \lambda_2(T(A))$.

Υπόδειξη: Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το A είναι φραγμένο, και άρα $\lambda(A) < +\infty$. Έστω $\varepsilon > 0$. Από την εξωτερική κανονικότητα του μέτρου Lebesgue, υπάρχει φραγμένο ανοικτό σύνολο G τέτοιο ώστε $A \subseteq G$ και $\lambda(G) < \lambda(A) + \varepsilon$. Θα δείξουμε ότι

$$G = N \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \right)$$

όπου $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία ξένων ανοικτών δίσκων και $\lambda(N) = 0$. Αυτό μπορεί να γίνει ως εξής. Γνωρίζουμε ότι το G γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$, όπου κάθε I_k είναι δυαδικό ημιανοικτό τετράγωνο (Λήμμα 4.2.3). Θεωρούμε τον ανοικτό δίσκο R_k που εγγράφεται στο I_k . Αν a_k είναι το μήκος της ακμής του I_k τότε η ακτίνα του R_k είναι $a_k/2$, δηλαδή

$$\lambda(R_k) = \pi a_k^2/4 = (\pi/4)\lambda(I_k).$$

Συνεπώς, η ένωση $\bigcup_{k=1}^{\infty} R_k$ έχει μέτρο ίσο με $(\pi/4)\lambda(G)$. Θεωρούμε τώρα το $G \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{R_k}$, το οποίο είναι ανοικτό και έχει μέτρο $\leq (1 - \pi/4)\lambda(G)$, και επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία. Στο δεύτερο βήμα, θα ορίσουμε μια νέα ακολουθία ανοικτών δίσκων που περιέχονται στο G και το σύνολο που θα απομείνει θα έχει μέτρο $\leq (1 - \pi/4)^2\lambda(G)$. Μετά από άπειρα βήματα θα εξαντλήσουμε το G , με την εξαίρεση ενός συνόλου μέτρου 0 και των περιφερειών των δίσκων που θα έχουμε επιλέξει, που επίσης θα έχουν συνολικά μέτρο 0. Μαζεύοντας όλους τους δίσκους (από όλα τα βήματα) σε μια ακολουθία $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$, έχουμε τελικά ότι

$$G = N \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \right)$$

όπου $\lambda(N) = 0$.

Στη συνέχεια μπορούμε να καλύψουμε το N από μια άλλη ακολουθία $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ ανοικτών δίσκων με

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha(C_n) < \varepsilon$$

(εξηγήστε γιατί: βρείτε πρώτα ανοικτό $U \supset N$ με $\lambda(U) < \varepsilon/2$, γράψτε το U ως αριθμήσιμη ένωση μη επικαλυπτόμενων ημιανοικτών τετραγώνων και στη συνέχεια καλύψτε το U , άρα και το N , με τους περιγεγραμμένους

δίσκους αυτών των τετραγώνων). Φτιάχνοντας μια ακολουθία $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ που αποτελείται από όλους τους δίσκους D_n και C_n μαζί, έχουμε $A \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty B_n$ και

$$\sum_{n=1}^\infty \alpha(B_n) = \sum_{n=1}^\infty \alpha(D_n) + \sum_{n=1}^\infty \alpha(C_n) < \lambda(G) + \varepsilon < \lambda(A) + 2\varepsilon,$$

και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται το ζητούμενο.

8. Έστω D πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι αν το $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμο σύνολο και $\lambda(A \Delta (A+x)) = 0$ για κάθε $x \in D$, τότε $\lambda(A) = 0$ ή $\lambda(\mathbb{R} \setminus A) = 0$.

Υπόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτουμε ότι $\lambda(A) > 0$ και $\lambda(A^c) > 0$. Τότε, μπορούμε να βρούμε συμπαγή σύνολα $E \subseteq A$ και $F \subseteq A^c$ τέτοια ώστε $\lambda(E) > 0$ και $\lambda(F) > 0$. Δείχνουμε ότι η συνάρτηση

$$g(x) = \lambda((E+x) \cap F) = \int_{\mathbb{R}} \chi_E(t-x) \chi_F(t) d\lambda(t)$$

είναι συνεχής. Επίσης (απλή συνέπεια του θεωρήματος Fubini)

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) d\lambda(x) = \lambda(E)\lambda(F) > 0.$$

Άρα, το σύνολο $\{x \in \mathbb{R} : g(x) > 0\}$ περιέχει κάποιο μη τετριμμένο διάστημα I . Αφού το D είναι πυκνό, μπορούμε να επιλέξουμε $x_0 \in D \cap I$. Τότε,

$$\lambda((E+x_0) \cap F) > 0.$$

Όμως, $E \subseteq A$ και $F \subseteq A^c$, άρα

$$(E+x_0) \cap F \subseteq (A+x_0) \cap A^c \subseteq A \Delta (A+x_0),$$

δηλαδή

$$g(x_0) = \lambda(A \Delta (A+x_0)) > 0,$$

το οποίο είναι άτοπο, διότι $x_0 \in D$.

9. Αποδείξτε ότι υπάρχει φθίνουσα ακολουθία $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ συνόλων $A_n \subset [0, 1]$ τέτοια ώστε $\lambda^*(A_n) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\bigcap_{n=1}^\infty A_n = \emptyset$.

Υπόδειξη: Στο $[0, 1]$ θεωρούμε τη σχέση ισοδυναμίας $x \sim y$ αν και μόνο αν $x-y \in \mathbb{Q}$, και στη συνέχεια ορίζουμε $N \subset [0, 1]$ που περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο από κάθε κλάση ισοδυναμίας. Ορίζουμε επίσης $T = [0, 1] \setminus N$. Μπορούμε να δείξουμε ότι $\lambda^*(T) = 1$. Αν όχι, τότε υπάρχει μετρήσιμο $A \supseteq T$ με $\lambda(A) = \lambda^*(T) < 1$. Τότε το $B = [0, 1] \setminus A$ είναι μετρήσιμο και $\lambda(B) > 0$. Από το λήμμα του Steinhaus, το $B - B$ περιέχει διάστημα. Όμως $B \subseteq N$, άρα $B - B \subseteq N - N$. Αυτό οδηγεί σε άτοπο, διότι το $N - N$ δεν περιέχει διάστημα.

Τώρα, θεωρούμε μια αρίθμηση $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $N_n = (N + q_n) \bmod 1$. Αυτό σημαίνει ότι $N_n = ((N + q_n) \cap [0, 1]) \cup (-1 + ((N + q_n) \setminus [0, 1]))$. Τότε, $N_n \subset [0, 1]$, τα N_n είναι ξένα, $[0, 1] = \bigcup_{n=1}^\infty N_n$, και αν θέσουμε $T_n = [0, 1] \setminus N_n$ ισχύει ότι $\lambda^*(T_n) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε

$$A_n = \bigcup_{k=n}^\infty T_k.$$

Η $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ είναι φθίνουσα ακολουθία υποσυνόλων του $[0, 1]$ και έχουμε

$$\lambda^*(A_n) \geq \lambda^*(T_n) = 1,$$

άρα $\lambda^*(A_n) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Όμως, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, διότι $[0, 1] \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n = [0, 1]$.

10. Έστω E Lebesgue μετρήσιμο σύνολο στον $\mathbb{R}^k$ με $\lambda_k(E) < +\infty$, το οποίο έχει την ακόλουθη ιδιότητα: για κάθε $x \in E$ υπάρχει $\rho(x) > 0$ τέτοιος ώστε, για κάθε $0 < r < \rho(x)$,

$$\lambda_k(E \cap B(x, r)) \geq \frac{1}{2} \lambda_k(B(x, r)),$$

όπου $B(x, r)$ είναι η ανοικτή μπάλα με κέντρο x και ακτίνα r . Αποδείξτε ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μετρήσιμο σύνολο $F \subseteq E$ τέτοιο ώστε $\lambda_k(E \setminus F) \leq \varepsilon$ και υπάρχει $t > 0$, ανεξάρτητος από το x , τέτοιος ώστε, για κάθε $x \in F$ και για κάθε $0 < r \leq t$,

$$\lambda_k(E \cap B(x, r)) \geq \frac{1}{2} \lambda_k(B(x, r)).$$

Ισχύει η προηγούμενη πρόταση αν $\lambda_k(E) = +\infty$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Υπόδειξη: Για κάθε $m \geq 1$ θεωρούμε το σύνολο

$$E_m = \left\{ x \in E : \lambda_k(E \cap B(x, t)) \geq \frac{1}{2} \lambda_k(B(x, r)) \text{ για κάθε } r \leq \frac{1}{m^2} \right\}.$$

Τότε, η ακολουθία $\{E_m\}_{m=1}^{\infty}$ είναι αύξουσα και $E = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$. Έστω $\varepsilon > 0$. Από τη συνέχεια του μέτρου, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\lambda_k(E_m) \geq \lambda(E) - \varepsilon$, και αφού $\lambda(E) < \infty$ έπεται ότι

$$\lambda_k(E \setminus E_m) = \lambda_k(E) - \lambda_k(E_m) \leq \varepsilon.$$

Θέτουμε $F = E_m$. Τότε, $F \subseteq E$, $\lambda_k(E \setminus F) \leq \varepsilon$, και αν θέσουμε $t = 1/m^2$ τότε από τον ορισμό του E_m βλέπουμε ότι, για κάθε $x \in F$ και για κάθε $0 < r \leq t$,

$$\lambda_k(E \cap B(x, r)) \geq \frac{1}{2} \lambda_k(B(x, r)).$$

Η παραπάνω πρόταση δεν ισχύει απαραίτητα αν $\lambda_k(E) = +\infty$. Στο $\mathbb{R}$ θεωρούμε το σύνολο

$$E = \bigcup_{k=3}^{\infty} \left[k, k + \frac{1}{k} \right],$$

για το οποίο $\lambda(E) = +\infty$. Για κάθε $x \in E \cap \{x \geq k\}$ έχουμε

$$\lambda \left(E \cap B(x, \frac{3}{k}) \right) < \frac{1}{2} \lambda \left(B(x, \frac{3}{k}) \right)$$

και $\lambda(E \cap \{x \geq k\}) = +\infty$ για κάθε $k \geq 3$.