

Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωσης (2025–26)
Ασκήσεις – Φυλλάδιο 4

(Παραδίδετε έξι από τις ασκήσεις. Ημερομηνία παράδοσης: 1 Φεβρουαρίου 2026)

1. Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και μ, ν δύο μέτρα στην $\mathcal{A}$ τέτοια ώστε $\mu(A) \leq \nu(A)$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Αποδείξτε ότι για κάθε $\mathcal{A}$ -μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ ισχύει ότι $\int_X f d\mu \leq \int_X f d\nu$.

2. Έστω $\delta > 0$ και $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\sin x}{x} + \frac{\delta x}{x+1}$ για κάθε $x > 0$. Αποδείξτε ότι, για κάθε $\alpha > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0, \alpha]} f(nx) d\lambda(x) = \delta \alpha.$$

3. Έστω $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f_n \rightarrow 0$ σχεδόν παντού στο $[0, 1]$ και $\int_{[0, 1]} |f_n|^2 d\lambda \leq 1$ για κάθε $n \geq 1$. Αποδείξτε ότι $\int_{[0, 1]} |f_n| d\lambda \rightarrow 0$.

4. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, $\{A_n\}$ ακολουθία συνόλων στην $\mathcal{A}$, και $k \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε το σύνολο B όλων των $x \in X$ που ανήκουν σε τουλάχιστον k από τα σύνολα A_n . Αποδείξτε ότι $B \in \mathcal{A}$ και ότι $\mu(B) \leq \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

5. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι, σχεδόν για κάθε $x \in [0, 1]$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f(x+n)$ συγκλίνει.

6. Έστω $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις με την ιδιότητα

$$\int_E |f_n| d\lambda \leq \sqrt{\lambda(E)}$$

για κάθε $n \geq 1$ και κάθε μετρήσιμο υποσύνολο E του $[0, 1]$. Αν $f_n \rightarrow f$ κατά σημείο, αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και ότι

$$\int_0^1 f_n d\lambda \rightarrow \int_0^1 f d\lambda.$$

7. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$. Υπολογίστε το

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |f(x+t) + f(x)| d\lambda(x).$$

[Υπόδειξη: Προσεγγίστε την f με συνεχείς συναρτήσεις που έχουν συμπαγή φορέα.]

8. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \sin(tx) d\lambda(x)$ είναι καλά ορισμένη και συνεχής.

[Υπόδειξη: Μπορείτε, αν θέλετε, να χρησιμοποιήσετε την αρχή της μεταφοράς.]

9. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Αποδείξτε ότι το μέτρο μ είναι πεπερασμένο αν και μόνο αν:

- (i) $\mu(X) = \sup\{\mu(A) : A \in \mathcal{A}, \mu(A) < \infty\}$ και
- (ii) για κάθε ακολουθία (f_n) μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων με $f_n \rightarrow 0$ ομοιόμορφα, ισχύει $\int f_n d\mu \rightarrow 0$.

10. Έστω $f_n \in L^2(\mathbb{R})$ συναρτήσεις τέτοιες ώστε $\int_{\mathbb{R}} f_n f_m d\lambda = 0$ για κάθε $m \neq n$ και $\int_{\mathbb{R}} f_n^2 d\lambda = 1$ για κάθε n .

(α) Αποδείξτε ότι για κάθε $N \in \mathbb{N}$ και κάθε $c_1, \dots, c_N \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$\left\| \sum_{n=1}^N c_n f_n \right\|_2^2 = \sum_{n=1}^N c_n^2.$$

(β) Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} f_n$ συγκλίνει στον $L^2(\mathbb{R})$.