

Αναλυτική Γεωμετρία και Γραμμική Άλγεβρα

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΣΕΜΦΕ (2025-2026)

1. Έστω τα διανύσματα $\vec{u} = (2, 3, 5)$ και $\vec{a} = (-1, 4, 0)$.

(i) Να επαληθευτεί η τριγωνική ανισότητα και η ανισότητα Cauchy-Schwarz για τα δύο διανύσματα.

(ii) Να βρεθεί η ορθογώνια προβολή του $\vec{u}$ στο $\vec{a}$ καθώς και η ανάλυση ως $\vec{u} = \text{proj}_{\vec{a}}\vec{u} + \vec{u}_2$ με $\vec{u}_2 \perp \vec{a}$.

(iii) Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 0 \\ -x + 4y = 0 \end{cases}$$
 με διανυσματικό λογισμό.

2. Να βρείτε τον αναλυτικό τύπο του εσωτερικού γινομένου $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ ως προς το σύστημα συντεταγμένων $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ του $\mathbb{R}^3$, με $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$, $\|\vec{w}\| = 4$ και $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = 30^\circ$, $\widehat{(\vec{u}, \vec{w})} = 60^\circ$, $\widehat{(\vec{v}, \vec{w})} = 45^\circ$.

3. Να υπολογιστούν οι γωνίες του τριγώνου ABC αν $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} - 6\vec{j}$ και $\overrightarrow{AC} = 3\vec{i} + \vec{j}$, όπου $(\vec{i}, \vec{j})$ είναι ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων.

4. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\lambda\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{j} + \lambda\vec{k}$, $\vec{c} = \lambda\vec{j} + \vec{k}$ για $\lambda \in \mathbb{R}$. Να προσδιορίσετε τις τιμές του λ , αν υπάρχουν, για τις οποίες τα παραπάνω διανύσματα είναι (a) κάθετα ανά δύο μεταξύ τους, (b) συγγραμμικά, και (c) συνεπίπεδα.

5. Να αποδείξετε ότι για τυχαία διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ ισχύουν τα ακόλουθα.

(i) Για $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \neq \vec{0}$, αν $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle$ και $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$, τότε ισχύει $\vec{b} = \vec{c}$.

(ii) $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 \mid \vec{b} \mid \vec{c}) = (\vec{a}_1 \mid \vec{b} \mid \vec{c}) + (\vec{a}_2 \mid \vec{b} \mid \vec{c})$ και ομοίως για $\vec{b} = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$, $\vec{c} = \vec{c}_1 + \vec{c}_2$.

(iii) Αν $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, τότε $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$ και $(\vec{a} \mid \vec{b} \mid \vec{c}) = 0$.

(iv) Αν $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ συνεπίπεδα, τότε $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = \vec{0}$.

6. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\vec{x} + \vec{x} \times \vec{a} = \vec{b}$, όπου $\vec{a}, \vec{b}$ είναι γνωστά διανύσματα, έχει μοναδική λύση ως προς $\vec{x}$ η οποία και να βρεθεί.

7. Έστω τα επίπεδα $(\Pi_1) : 2x - y + 3z - 4 = 0$ και $(\Pi_2) \perp (2, -1, 3)$ με $(0, 2, 0) \in \Pi_2$.

(i) Να βρείτε την αναλυτική εξίσωση του (Π_2) , και τη διανυσματική και παραμετρικές του (Π_1) .

(ii) Να βρείτε την απόσταση των δύο επιπέδων.

(iii) Να βρεθεί το ίχνος του $P_0(0, -4, 0)$ στο Π_2 .

(iv) Ποια είναι η σχετική θέση του επιπέδου που ορίζεται από τα (μη συνευθειακά) σημεία $P_1(5, 0, 1)$, $P_2(3, 1, -8)$ και $P_3(7, -1, 0)$ με το Π_1 ; Αν τέμνονται, να βρείτε τη μεταξύ τους γωνία.

8. Δίνονται οι ευθείες $(\epsilon_1) : \begin{cases} x + y + z - 9 = 0 \\ x + 2y - z - 6 = 0 \end{cases}$ και $(\epsilon_2) : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 5 - 2t \\ z = 3t \end{cases}$ με $t \in \mathbb{R}$.

- (i) Να βρείτε τη διανυσματική και παραμετρικές εξισώσεις της ϵ_1 , και τις αναλυτικές της ϵ_2 .
- (ii) Να βρεθεί η απόσταση του σημείου $P(13, -2, 1)$ από την ευθεία ϵ_1 .
- (iii) Να βρείτε την εξίσωση του επιπέδου Π που ορίζουν οι ϵ_1 και ϵ_2 , καθώς και το παράλληλό του Π_0 που είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.
- (iv) Ποια η σχετική θέση της ϵ_1 με την ϵ_3 που δίνεται από την εξίσωση $\vec{r} = \kappa(1, 0, 0) + (0, 1, 0)$; Να βρεθεί η μεταξύ τους απόσταση.

9. Δίνονται οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & x \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$.

- (i) Να υπολογιστούν όποιοι από τους πίνακες $A^2, A^T A, B^T B, AA^T + A^T A, A^T A - B^T B$ ορίζονται.
- (ii) Να υπολογιστεί η τιμή του x για την οποία ισχύει $A^T A - B^T B = 2C$, όπου $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

10. Έστω δύο τετραγωνικοί πίνακες $A, B \in M_n(k)$.

- (i) Να δείξετε ότι ισχύει $tr(\lambda A) = \lambda tr(A)$ και $tr(AB) = tr(BA)$.
- (ii) Να δείξετε ότι δεν υπάρχουν τέτοιοι πίνακες που να ικανοποιούν τη σχέση $AB - BA = I_n$.

11. Έστω οι στοιχειώδεις $n \times n$ πίνακες $E(i, j)$, που προκύπτουν από τον I_n εφαρμόζοντας την γραμμοπράξη $\Gamma_i \leftrightarrow \Gamma_j$, $D(i, \lambda) = \text{diag}(1, \dots, \lambda, \dots, 1)$, που προκύπτουν από τον I_n μέσω $\Gamma_i \rightarrow \lambda \Gamma_i$, και $M(i, j, \lambda)$, που προκύπτουν από τον I_n μέσω $\Gamma_i \rightarrow \Gamma_i + \lambda \Gamma_j$. Έστω $A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ και $B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

- (i) Πώς σχετίζονται οι πίνακες $E(i, j)A$ και $BE(i, j)$ με τους A και B αντίστοιχα;
- (ii) Πώς σχετίζονται οι πίνακες $D(i, \lambda)A$ και $BD(i, \lambda)$ με τους A και B αντίστοιχα;
- (iii) Πώς σχετίζεται ο πίνακας $M(i, j, \lambda)A$ με τον A ;
- (iv) Να βρείτε στοιχειώδη $n \times n$ πίνακα S , έτσι ώστε ο πίνακας BS να αντικαθιστά την i -στήλη του B από το άθροισμά της με το λ -πολλαπλάσιο της j -στήλης.
- (v) Να βρείτε στοιχειώδη $n \times n$ πίνακα L , έτσι ώστε ο πίνακας LA να έχει στην i -γραμμή του την j -γραμμή του A και παντού αλλού 0, ενώ ο πίνακας BL να έχει στην j -στήλη του την i -γραμμή του B και παντού αλλού 0.

12. Έστω ο μη μηδενικός πίνακας $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ με $\det(A) = 0$.

- (i) Να αποδείξετε ότι $A^3 = (a + d)^2 A$.
- (ii) Αν $A^3 = 0$, να αποδείξετε ότι και ο $A^2 = 0$.
- (iii) Αν $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -\frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix}$, να βρείτε τον A^9 .

13. Να υπολογίσετε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & 2 & 1 \\ 0 & x & -1 \end{pmatrix}$ να είναι αντιστρέψιμος.

Για τις τιμές αυτές του x , υπολογίστε τον A^{-1} και μέσω του προσαρτημένου και μέσω Gauss-Jordan, και συγκρίνετε τις δυο μεθόδους.

14. Να βρείτε τις λύσεις της $\det(\lambda I_4 - A) = 0$, για $a \in \mathbb{R}$, με $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a-3 & a-1 & 3-a & -1 \\ a-4 & a-3 & 5-a & -1 \\ -2 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

15. Να δείξετε ότι $\det(A) = (a_1 + \dots + a_n)x^{n-1}$, με $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ -x & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x & x \end{pmatrix}$ και $a_i \in \mathbb{R}$.

16. Να διερευνήστε τις λύσεις του συστήματος
$$\begin{cases} x + ay + b^2z = 1 \\ x + ay + abz = a \\ bx + a^2y + a^2bz = a^2b \end{cases} \quad \text{για τα διάφορα } a, b \in \mathbb{R}.$$

17. Να δείξετε ότι για δύο υποχώρους $V_1, V_2 \leq V$ ενός k -διανυσματικού χώρου V , ισχύει πως $V_1 \cup V_2 \leq V \Leftrightarrow V_1 \subseteq V_2$ ή $V_2 \subseteq V_1$.

18. Έστω V k -γραμμικός χώρος και έστω $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in V$ γραμμικά ανεξάρτητα. Έστω επιπλέον $\vec{v} \in V$ τέτοιο ώστε $\vec{v} \notin [\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k]$. Να δείξετε ότι $\vec{v}, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ γραμμικά ανεξάρτητα.

19. Να βρείτε μία βάση και την διάσταση του γραμμικού χώρου $\mathbb{C}^2$ πάνω από το σώμα $\mathbb{R}$ και μία βάση και την διάστασή του πάνω από το σώμα $\mathbb{C}$.

20. Έστω V k -διανυσματικός χώρος, και $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ μια βάση του V .

(i) Να δείξετε ότι $V = [\vec{v}_1] \oplus [\vec{v}_2] \oplus [\vec{v}_3] = [\vec{v}_1, \vec{v}_2] \oplus [\vec{v}_3]$.

(ii) Να δείξετε ότι το σύνολο $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_1 - \vec{v}_2 + 2\vec{v}_3\}$ είναι επίσης μια βάση του V .

21. Έστω $W_1 = [(2, 0, 3), (1, -1, 1)]$ και $W_2 = \{(x, y, z) \mid x - 2y + 3z = 0\}$ υποσύνολα του $\mathbb{R}^3$.

(i) Να δείξετε ότι είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$.

(ii) Να βρεθεί μία βάση και η διάσταση των υποχώρων $W_1, W_2, W_1 + W_2, W_1 \cap W_2$ του $\mathbb{R}^3$.

(iii) Είναι το άθροισμα ευθύ; Αν όχι, να γραφεί το στοιχείο $(1, 0, 0)$ με δύο διαφορετικούς τρόπους ως άθροισμα των στοιχείων των W_1 και W_2 .

(iv) Να δώσετε για όλους τους υποχώρους που αναφέρθηκαν γεωμετρικές ερμηνείες.