

ΣΕΜΦΕ 2025
Μαθηματική Ανάλυση Ι
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 6 ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία διαμερίσεων (P_n) του $[a, b]$ τέτοια ώστε $\lim_{n \rightarrow \infty} L(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} U(f, P_n) = \int_a^b f(x) dx$.

Λύση. Από το Κριτήριο Riemann για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση P του $[a, b]$ με $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$. Άρα για " $\epsilon = \frac{1}{n}$ " μπορούμε να βρούμε μια διαμέριση P_n του $[a, b]$ με

$$U(f, P_n) - L(f, P_n) < \frac{1}{n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επιπλέον, από τον ορισμό του ολοκληρώματος, έχουμε

$$L(f, P_n) \leq \int_a^b f(x) dx \leq U(f, P_n)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς,

$$0 \leq \int_a^b f(x) dx - L(f, P_n) \leq U(f, P_n) - L(f, P_n) < \frac{1}{n}$$

Από το Κριτήριο των Ισοσυγκλινουσών ακολουθιών έπεται ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} L(f, P_n) = \int_a^b f(x) dx$ και $\lim_{n \rightarrow \infty} U(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (U(f, P_n) - L(f, P_n)) + \lim_{n \rightarrow \infty} L(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} L(f, P_n) = \int_a^b f(x) dx$.

Άσκηση 2. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη με $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αν $f(q) = 0$ για κάθε q ρητό στο $[a, b]$ δείξτε ότι $\int_a^b f(x) dx = 0$.

Λύση. Επειδή η f είναι ολοκληρώσιμη το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x) dx$ είναι ίσο με το κάτω ολοκλήρωμα $\underline{\int_a^b} f(x) dx$ που εξ ορισμού είναι το supremum του συνόλου όλων των κάτω αθροισμάτων της f . Τώρα, κάθε κάτω άθροισμα της f είναι ίσο με το 0. Πράγματι, έστω $P = \{a = x_0 < \dots < x_n = b\}$ μια διαμέριση του $[a, b]$. Τότε $L(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$ όπου $m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$. Από την πυκνότητα των ρητών σε κάθε $[x_{i-1}, x_i]$ υπάρχουν άπειροι ρητοί και άρα $m_i = 0$ για όλα τα $i = 1, \dots, n$. Συνοψίζοντας,

$$\int_a^b f(x) dx = \underline{\int_a^b} f(x) dx = \sup\{L(f, p) : P \text{ διαμέριση του } [a, b]\} = \sup\{0\} = 0$$

Άσκηση 3. (α) Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $f(x) = 0$ για όλα τα $x \in [a, b]$ εκτός από ένα σημείο δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και $\int_a^b f(x) dx = 0$.

(β) Γενικεύστε για συναρτήσεις $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες $f(x) = 0$ για όλα τα $x \in [a, b]$ εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων.

(γ) Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αν $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x)$ για όλα τα $x \in [a, b]$ εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων δείξτε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη και έχει το ίδιο ολοκλήρωμα με την f .

Λύση. (α) Έστω c το μοναδικό σημείο στο $[a, b]$ με $f(c) \neq 0$. Ας υποθέσουμε ότι $c \in (a, b)$ και $f(c) > 0$. Παρατηρούμε ότι σε κάθε υποδιάστημα I του $[a, b]$,

$$\inf\{f(x) : x \in I\} = \min\{f(x) : x \in I\} = 0$$

Αυτό συνεπάγεται ότι για κάθε διαμέριση P του $[a, b]$, είναι $L(f, P) = 0$. Άρα

$$\int_a^b f(x) dx = \sup\{L(f, P) : P \text{ διαμέριση του } [a, b]\} = \sup\{0\} = 0 \quad (1)$$

Επίσης σε κάθε υποδιάστημα I του $[a, b]$, η f είναι παντού μηδέν εκτός και αν $c \in I$. Άρα για κάθε διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ του $[a, b]$ το c θα ανήκει ή σε ένα ή το πολύ σε δύο διαδοχικά διαστήματα της μορφής $[x_{i-1}, x_i]$. Συνεπώς

$$0 \leq U(f, P) \leq 2f(c)\lambda(P)$$

όπου $\lambda(P) = \max\{x_i - x_{i-1} : 1 \leq i \leq n\}$ είναι η λεπτότητα της P . Άρα επιλέγοντας διαμερίσεις P με $\lambda(P) \rightarrow 0$ βλέπουμε ότι

$$\int_a^b f(x) dx = \inf\{U(f, P) : P \text{ διαμέριση του } [a, b]\} = 0 \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) έπεται ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και $\int_a^b f(x) dx = 0$.

(β) Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ και έστω $c_1 < \dots < c_n \in [a, b]$ τέτοια ώστε $f(x) \neq 0$ αν και μόνο αν $x \neq c_i$ για κάποιο $i = 1, \dots, n$. Για κάθε $1 \leq i \leq n$, έστω $f_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x \neq c_i \\ f(c_i) & \text{αν } x = c_i \end{cases}$$

Από το (α) ερώτημα έχουμε $\int_a^b f_i(x) dx = 0$ για κάθε $1 \leq i \leq n$. Παρατηρούμε επίσης ότι $f = f_1 + \dots + f_n$ και άρα από την γραμμικότητα του Ολοκληρώματος

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b (f_1 + \dots + f_n)(x) dx = \int_a^b f_1(x) dx + \dots + \int_a^b f_n(x) dx = 0$$

(γ) Θέτουμε $h = f - g$. Τότε η h είναι παντού μηδέν εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων. Άρα από το (β) η h είναι ολοκληρώσιμη και $\int_a^b h = 0$. Επειδή $g = f - h$ από την γραμμικότητα του Ολοκληρώματος έχουμε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int_a^b g(x) dx = \int_a^b (f(x) - h(x)) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b h(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

Άσκηση 4. Αποδείξτε την ακόλουθη ισχυροποίηση του Θεμελιώδους Θεωρήματος του Ολοκληρωτικού Λογισμού: Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση και έστω $x_0 \in [a, b]$. Αν το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός τότε η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $F'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Λύση. Έστω $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Θέτουμε $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x)$ αν $x \neq x_0$ και $g(x_0) = \ell$. Η g είναι συνεχής στο x_0 και διαφέρει από την f το πολύ σε ένα σημείο. Από την Άσκηση 3 παραπάνω, η g είναι ολοκληρώσιμη και επιπλέον για κάθε $x \in [a, b]$, $\int_a^x g(t) dt = \int_a^x f(t) dt$. Άρα αν θέσουμε $G(x) = \int_a^x g(t) dt$ τότε $G(x) = F(x)$, για κάθε $x \in [a, b]$. Επειδή η g είναι συνεχής στο x_0 , από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού έχουμε ότι η $G(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με $G'(x_0) = g(x_0) = \ell$ και αφού $F(x) = G(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$ έπεται ότι $F'(x_0) = \ell$.

Άσκηση 5. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση με $\int_a^b f(x) dx \neq 0$. (α) Δείξτε ότι για κάθε $\lambda \in (0, 1)$ υπάρχει $\xi \in (a, b)$ με $\int_a^\xi f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$. (β) Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ με $\int_a^\xi f(t) dt = \int_\xi^b f(t) dt$.

Λύση. (α) Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού έχουμε ότι η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ είναι συνεχής με $F(a) = 0$ και $F(b) = \int_a^b f(t) dt$. Έστω ότι $F(b) > 0$ (αν $F(b) < 0$ εργαζόμαστε ομοίως) και έστω $\lambda \in (0, 1)$. Τότε $0 < \lambda F(b) < F(b)$ και άρα από το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών, υπάρχει $\xi \in (a, b)$ με $F(\xi) = \lambda F(b) \Leftrightarrow \int_a^\xi f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$.

(β) Από το (α) για $\lambda = 1/2$ υπάρχει $\xi \in (a, b)$ με $\int_a^\xi f(t) dt = \frac{1}{2} \int_a^b f(t) dt$. Άρα από την Προσθετικότητα του ολοκληρώματος

$$\int_\xi^b f(t) dt = \int_a^b f(t) dt - \int_a^\xi f(t) dt = \frac{1}{2} \int_a^b f(t) dt = \int_a^\xi f(t) dt$$

Άσκηση 6. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και έστω $F(x) = \int_a^x f(x) dx$ για κάθε $x \in [a, b]$. Δείξτε τα εξής:

(α) Η F είναι σταθερή αν και μόνο αν $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

(β) Η F είναι αύξουσα (αντίστοιχα φθίνουσα) αν και μόνο αν $f(x) \geq 0$ (αντ. $f(x) \leq 0$) για κάθε $x \in [a, b]$.

Λύση. (α) Η F είναι σταθερή συνάρτηση αν και μόνο αν $F'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

(β) Η F είναι αύξουσα αν και μόνο αν $F'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αντίστοιχα, η F είναι φθίνουσα αν και μόνο αν $F'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

Άσκηση 7. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Αν $\int_a^b f^2(x) dx = 0$ δείξτε ότι $f = 0$.

Λύση. Έστω $F(x) = \int_a^x f^2(t) dt$, $x \in [a, b]$. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού έχουμε ότι $F'(x) = f^2(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ και άρα η $F(x)$ είναι αύξουσα. Συνεπώς $F(a) \leq F(x) \leq F(b) \Leftrightarrow 0 \leq F(x) \leq \int_a^b f^2(x) dx = 0$ και άρα $F(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Άρα $f^2(x) = F'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

Άσκηση 8. (α) Έστω $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής με $h(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Δείξτε ότι $\int_a^b h(x) dx > 0$.

(β) Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς με $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Δείξτε ότι $\int_a^b f(x) dx > \int_a^b g(x) dx$.

Λύση. (α) Η h ως συνεχής σε κλειστό φραγμένο διάστημα λαμβάνει ελάχιστη τιμή. Άρα υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ με $h(x_0) \leq h(x)$, $\forall x \in [a, b]$. Επειδή η h λαμβάνει θετικές τιμές έχουμε $h(x_0) > 0$. Τώρα από την ιδιότητα της Μονοτονίας του Ολοκληρώματος,

$$h(x) \geq h(x_0) \Rightarrow \int_a^b h(x) dx \geq \int_a^b h(x_0) dx = h(x_0)(b - a) > 0$$

(β) Θέτουμε $h = f - g$. Η h είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών και $h(x) = f(x) - g(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Άρα από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε $\int_a^b h(x) dx > 0$. Από την άλλη μεριά, λόγω της

Γραμμικότητας του Ολοκληρώματος έχουμε $\int_a^b h(x) dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$.
 Συνεπώς $\int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx > 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx > \int_a^b g(x) dx$.

Άσκηση 9. Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής.

(α) Έστω $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής τέτοια ώστε $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 g(x) dx$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = g(\xi)$.

(β) Αν $\int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi}{4}$ δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \frac{1}{\xi^2 + 1}$.

Λύση. (α) Έχουμε

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 g(x) dx \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 g(x) dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (f(x) - g(x)) dx = 0$$

Θέτουμε $h = f - g$ και $H(x) = \int_0^x h(t) dt$. Η h είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών και άρα από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού, η H είναι παραγωγίσιμη με $H'(x) = h(x)$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Επειδή $H(1) = H(0) = 0$ από το Θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $H'(\xi) = h(\xi) = f(\xi) - g(\xi) = 0$.

(β) Έχουμε $\int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi}{4} = \arctan 1 - \arctan 0 = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx$ και το συμπέρασμα έπεται από το (α).

Άσκηση 10. Αποδείξτε ότι για κάθε $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχή και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $F : I \rightarrow \mathbb{R}$, n -φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με $F^{(n)} = f$ (με $F^{(n)}(x)$ συμβολίζουμε την n -τάξης παράγωγο της F).

Λύση. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έστω $P(n)$ η πρόταση:

Για κάθε $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχή υπάρχει $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ n -φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με $F^{(n)} = f$

Θα δείξουμε ότι η $P(n)$ ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Για $n = 1$ η $P(1)$ προκύπτει από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού (η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(x) dx$ ικανοποιεί την σχέση $F' = f$). Έστω τώρα ότι η $P(n)$ ισχύει για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Θα δείξουμε ότι τότε ισχύει και η $P(n+1)$. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και έστω $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ n -φορές παραγωγίσιμη με $F^{(n)} = f$. Η συνάρτηση F ως παραγωγίσιμη είναι και συνεχής και άρα (από την $P(1)$ για " $f = F$ ") υπάρχει $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με $G' = F$. Άρα

$$f = F^{(n)} = (G')^{(n)} = G^{(n+1)}$$

και συνεπώς η $P(n+1)$ ισχύει. Από την Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής η $P(n)$ ισχύει για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 11. Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής με $f(0) = 1$. Υπολογίστε τα όρια $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{1/n} f(t) dt$ και $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \int_0^{1/n} f(t) dt \right)$.

Λύση. Η συνάρτηση $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Συνεπώς $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = F(0) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = F'(0) = f(0)$. Από την Αρχή Μεταφοράς έχουμε ότι για κάθε $x_n \in (0, 1]$ με $x_n \rightarrow 0$ ισχύει ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} F(x_n) = F(0)$ και $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F(x_n) - F(0)}{x_n} = F'(0) = f(0)$. Ειδικότερα αν $x_n = \frac{1}{n}$ έχουμε

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{1/n} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} F\left(\frac{1}{n}\right) = F(0) = 0$$

και

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \int_{1/n}^1 f(t) dt \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F(\frac{1}{n}) - F(0)}{\frac{1}{n}} = F'(0) = f(0) = 2$$

Άσκηση 12. Υπολογίστε το όριο $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^n}{n!} \int_0^{n!/n^n} \arctan(e^{t^2}) dt \right)$.

Λύση. Η ακολουθία $a_n = \frac{n!}{n^n}$ συγκλίνει στο μηδέν. Πράγματι,

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \dots (n-1) \cdot n}{n \cdot n \dots n \cdot n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \dots \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n} \leq \frac{1}{n} \cdot 1 \cdot 1 \dots 1 = \frac{1}{n}$$

και άρα $0 \leq \frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από το Θεώρημα των Ισοσυγκλιουσών Ακολουθιών έπεται ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

Θέτουμε $f(t) = \arctan(e^{t^2})$, $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ για κάθε $t \in [0, 1]$ και $x_n = \frac{n!}{n^n}$. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού, η F είναι παραγωγίσιμη με $F' = f$ και όπως δείξαμε $x_n \rightarrow 0$. Άρα

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^n}{n!} \int_0^{n!/n^n} f(t) dt \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(x_n)}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(x_n) - F(0)}{x_n - 0} = F'(0) = f(0) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

Η ισότητα $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(x_n) - F(0)}{x_n - 0} = F'(0)$ οφείλεται στην Αρχή Μεταφοράς για όρια. Πράγματι, έχουμε $F'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0}$ και από την Αρχή Μεταφοράς αυτό είναι ισοδύναμο με το ότι για κάθε ακολουθία (x_n) με $x_n \neq 0$ και $x_n \rightarrow 0$ ισχύει ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(x_n) - F(0)}{x_n - 0} = F'(0)$.

Άσκηση 13. (α) Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$G(x) = \int_x^b f(t) dt$$

για κάθε $x \in [a, b]$ (αν $x = b$ θέτουμε $G(b) = \int_b^b f(x) dx = 0$). Δείξτε ότι $G'(x) = -f(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$.

(β) Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(0) = 1$ και $\int_0^1 f(x) dx = 0$. Δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{1/n}^1 f(t) dt = 0 \text{ και } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \int_{1/n}^1 f(t) dt \right) = -1$$

Λύση. (α) Από την Προσθετικότητα του Ολοκληρώματος έχουμε $\int_a^b f(t) dt = \int_a^x f(t) dt + \int_x^b f(t) dt$.

Άρα, θέτοντας $c = \int_a^b f(t) dt$ και $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ παίρνουμε $c = F(x) + G(x)$. Συνεπώς $G(x) = c - F(x)$. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού έχουμε ότι $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$ και άρα $G'(x) = (c - F)'(x) = -F'(x) = -f(x)$.

(β) Από το (α) η συνάρτηση $G(x) = \int_x^1 f(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με $G'(x) = -f(x)$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Συνεπώς $\lim_{x \rightarrow 0} G(x) = G(0) = \int_0^1 f(x) dx = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{G(x) - G(0)}{x} = G'(0) = -f(0)$. Από την Αρχή Μεταφοράς έχουμε ότι για κάθε $x_n \in (0, 1]$ με $x_n \rightarrow 0$ ισχύει ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} G(x_n) = G(0)$ και $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{G(x_n) - G(0)}{x_n} = G'(0) = -f(0)$. Άρα για $x_n = \frac{1}{n}$ έχουμε

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{1/n}^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} G\left(\frac{1}{n}\right) = G(0) = \int_0^1 f(x) dx = 0$$

και

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \int_{1/n}^1 f(t) dt \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{G\left(\frac{1}{n}\right) - G(0)}{\frac{1}{n}} = G'(0) = -f(0)$$

Άσκηση 14. Αποδείξτε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right) = \ln 2$.

Λύση. Από τον Ορισμό του ολοκληρώματος μέσω αθροισμάτων Riemann γνωρίζουμε ότι αν $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη τότε

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f(1)}{n}$$

Άρα για την συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{1+x}$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n}\right)}{n} \\ &= \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln 2. \end{aligned}$$

Άσκηση 15. Έστω $G : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $G(x) = \int_0^{\sqrt{\ln x}} e^{t^2} dt$, για κάθε $x > 1$. Δείξτε ότι η G είναι παραγωγίσιμη και βρείτε τον τύπο της G' .

Λύση. Αν $F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$, $x > 0$ και $\phi(x) = \sqrt{\ln x}$, $x > 1$, τότε $G(x) = F(\phi(x))$. Συνεπώς η G είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων, αφού $F'(x) = e^{x^2}$ και $\phi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{x}$. Από τον Κανόνα Αλυσίδας έχουμε

$$G'(x) = F'(\phi(x))\phi'(x) = e^{\ln x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}}.$$

Άσκηση 16. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και $h_1, h_2 : [a, b] \rightarrow [a, b]$ παραγωγίσιμες τέτοιες ώστε $h_1(x) < h_2(x)$ για κάθε $x \in I$. Ορίζουμε την συνάρτηση $H : I \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $H(x) = \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(t) dt$, για κάθε $x \in I$. Βρείτε την $H'(x)$ για κάθε $x \in I$.

Λύση. Από την Προσθετικότητα του Ολοκληρώματος έχουμε ότι

$$\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(t) dt = \int_a^{h_2(x)} f(t) dt - \int_a^{h_1(x)} f(t) dt \quad (3)$$

για κάθε $x \in [a, b]$. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη με $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Παρατηρούμε ότι

$$\int_a^{h_2(x)} f(t) dt = F(h_2(x)) \text{ και ομοίως } \int_a^{h_1(x)} f(t) dt = F(h_1(x))$$

Άρα, αντικαθιστώντας στην (3) παίρνουμε

$$H(x) = F(h_2(x)) - F(h_1(x)) = (F \circ h_2)(x) - (F \circ h_1)(x)$$

και άρα από τον Κανόνα Αλυσίδας, $H'(x) = f'(h_2(x))h_2'(x) - f'(h_1(x))h_1'(x)$.

Άσκηση 17. Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$. Δείξτε τα εξής:

(α) $\int_a^b g(x) dx \neq 0$ και (β) υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{\int_a^b f(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} = \frac{f(\xi)}{g(\xi)}$$

Λύση. Θετούμε $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ και $G(x) = \int_a^x g(t) dt$ για κάθε $x \in [a, b]$. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού έχουμε ότι οι συναρτήσεις $F(x)$ και $G(x)$ είναι παραγωγίσιμες με $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$.

(α) Αν $\int_a^b g(x) dx \neq 0$ τότε $G(b) = \int_a^b g(x) dx = 0 = G(a)$ και άρα από το Θεώρημα Rolle θα υπήρχε $\xi \in (a, b)$ με $G'(\xi) = g(\xi) = 0$, άτοπο αφού $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$.

(β) Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Cauchy έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} \Leftrightarrow \frac{\int_a^b f(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} = \frac{f(\xi)}{g(\xi)}$$

Άσκηση 18. Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$. Δείξτε τα εξής:

(α) Για κάθε $c \in (a, b)$, $\int_c^b g(t) dt \neq 0$. (β) Υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $\frac{\int_a^\xi f(t) dt}{\int_\xi^b g(t) dt} = \frac{f(\xi)}{g(\xi)}$.

Λύση. (α) Έστω ότι για κάποιο $c \in (a, b)$, είχαμε $\int_c^b g(t) dt = 0$. Θεωρούμε την συνάρτηση $Q(x) = \int_c^x g(t) dt$, $x \in [c, b]$. Τότε $Q(c) = Q(b) = 0$ και άρα από το Θεώρημα Rolle θα υπήρχε $\xi \in (c, b)$ και άρα $\xi \in (a, b)$ με $Q'(\xi) = g(\xi) = 0$, άτοπο.

(β) Θεωρούμε την συνάρτηση $H(x) = F(x) \cdot G(x)$ όπου $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ και $G(x) = \int_x^b g(t) dt$ για κάθε $x \in [a, b]$. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού οι F και G είναι παραγωγίσιμες με $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = -g(x)$ (δείτε Άσκηση 13) για κάθε $x \in [a, b]$. Επομένως,

$$H'(x) = (F(x)G(x))' = F'(x)G(x) + F(x)G'(x) = f(x) \int_x^b g(t) dt - g(x) \int_a^x f(t) dt$$

Επίπλέον, $H(a) = H(b) = 0$. Άρα, από το Θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (a, b)$ με

$$H'(\xi) = 0 \Rightarrow f(\xi) \int_\xi^b g(t) dt = g(\xi) \int_a^\xi f(t) dt = 0 \quad (4)$$

Επειδή $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$ από το (α) ερώτημα έχουμε ότι $\int_\xi^b g(t) dt \neq 0$. Άρα διαιρώντας κατά μέλη την (4) με $g(\xi) \int_\xi^b g(t) dt$ παίρνουμε το ζητούμενο.

Άσκηση 19. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτησης. Αν $f(a) = 0$ και $\int_a^b f(t) dt = 0$ δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε

$$\int_a^\xi f(t) dt = f(\xi) \cdot (\xi - a)$$

(Υπόδειξη: Θεωρείστε την συνάρτηση $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με $\phi(a) = 0$ και $\phi(x) = \frac{\int_a^x f(t) dt}{x - a}$ για κάθε $x \in (a, b]$.)

Λύση. Έστω η συνάρτηση $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με $\phi(a) = f(a)$ και $\phi(x) = \frac{\int_a^x f(t) dt}{x - a}$ για κάθε $x \in (a, b]$. Έστω επίσης $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού έχουμε ότι η F είναι παραγωγίσιμη (και άρα και συνεχής) με $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

(α) Η ϕ είναι συνεχής στο $[a, b]$: Πράγματι, για $x \in (a, b]$, έχουμε $\phi(x) = F(x)/x - a$, οπότε η ϕ είναι συνεχής στο $(a, b]$ ως πηλίκο συνεχών. Επιπλέον, είναι συνεχής και στο a αφού

$$\lim_{x \rightarrow a} \phi(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} = F'(a) = f(a) = \phi(a)$$

(β) Η ϕ είναι παραγωγίσιμη στο (a, b) : Πράγματι, έστω $x \in (a, b)$. Τότε

$$\phi'(x) = \left(\frac{F(x)}{x - a} \right)' = \frac{F'(x) \cdot (x - a) - F(x) \cdot (x - a)'}{(x - a)^2} = \frac{(x - a)f(x) - F(x)}{(x - a)^2}$$

(γ) $\phi(a) = \phi(b) = 0$: Πράγματι $\phi(a) = f(a) = 0$ και $\phi(b) = \frac{F(b)}{b - a} = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a} = 0$.
Από τα (α), (β), (γ) και το Θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (a, b)$ με $\phi'(\xi) = 0$. Άρα

$$\phi'(\xi) = \frac{(\xi - a)f(\xi) - F(\xi)}{(\xi - a)^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{f(\xi)}{\xi - a} = \frac{F(\xi)}{(\xi - a)^2} \Leftrightarrow f(\xi) = \frac{F(\xi)}{\xi - a} \Leftrightarrow \int_a^\xi f(t) dt = f(\xi)(\xi - a)$$

Άσκηση 20. Υπολογίστε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^5} e^{t^2} \sin(t^2) dt}{x^{15}}$.

Λύση. Θέτουμε $F(x) = \int_0^x e^{t^2} \sin(t^2) dt$. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού, έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = F(0) = 0$ και $F'(x) = e^{x^2} \sin(x^2)$. Άρα το

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^5} e^{t^2} \sin(t^2) dt}{x^{15}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x^5)}{x^{15}}$$

είναι απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Εφαρμόζοντας τον κανόνα de l' Hospital και τον Κανόνα Αλυσίδας, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^5} e^{t^2} \sin(t^2) dt}{x^{15}} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x^5)}{x^{15}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(F(x^5))'}{(x^{15})'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F'(x^5) \cdot (x^5)'}{15x^{14}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x^{10}} \sin(x^{10}) \cdot 5x^4}{15x^{14}} \\ &= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x^{10}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x^{10})}{x^{10}} = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Άσκηση 21. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx$.

Λύση. Έχουμε

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx &= \int \frac{1}{x^2 + 2x + 1 - 1 + 5} \\&= \int \frac{1}{(x+1)^2 + 4} \\&= \frac{1}{4} \int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + 1} dx \\&\stackrel{t=\frac{x+1}{2}, dt=dx/2}{=} \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2 + 1} dt = \frac{1}{2} \arctan t \\&= \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{x+1}{2} \right).\end{aligned}$$

Άσκηση 22. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{x^3 + x} dx$

Λύση. Έχουμε

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^3 + x} dx &= \int \frac{1}{x(x^2 + 1)} dx \\&= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1} \right) dx \\&= \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{x}{x^2 + 1} dx \\&= \ln |x| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)\end{aligned}$$

Άσκηση 23. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \frac{x}{x^2 + 4x + 5} dx$.

Λύση. Έχουμε $\int \frac{x}{x^2 + 4x + 5} dx = \int \frac{x}{x^2 + 4x + 4 + 1} dx = \int \frac{x}{(x+2)^2 + 1} dx$. Θέτουμε $t = x + 2$ και $dt = dx$. Οπότε $\int \frac{x}{x^2 + 4x + 5} dx = \int \frac{t-2}{t^2 + 1} dt = \int \frac{t}{t^2 + 1} dt - 2 \int \frac{1}{t^2 + 1} dt$. Για το πρώτο ολοκλήρωμα θέτουμε $u = t^2 + 1$ και άρα $du = 2t dt \Rightarrow t dt = du/2$. Συνεπώς, $\int \frac{t}{t^2 + 1} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} \ln u = \frac{1}{2} \ln(t^2 + 1) = \ln \sqrt{t^2 + 1} = \ln \sqrt{(x+2)^2 + 1}$. Για το δεύτερο έχουμε $\int \frac{1}{t^2 + 1} dt = \arctan t = \arctan(x+2)$. Άρα $\int \frac{x}{x^2 + 4x + 5} dx = \ln \sqrt{(x+2)^2 + 1} - 2 \arctan(x+2)$.

Άσκηση 24. Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής με $f(0) = 0$ και παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = 4$. Δείξτε ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$x^2 < \int_0^x f(t) dt < 3x^2,$$

για κάθε $x \in (0, \delta)$.

Λύση. α' τρόπος: Έστω $G(x) = \frac{\int_0^x f(t) dt}{x^2}$, $x \in (0, 1]$. Εφαρμόζοντας τον κανόνα de l' Hopital έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\int_0^x f(t) dt\right)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{2} f'(0) = 2$$

Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$0 < x < \delta \Rightarrow |G(x) - 2| < \epsilon \Rightarrow 2 - \epsilon < \frac{\int_0^x f(t) dt}{x^2} < 2 + \epsilon \Rightarrow (2 - \epsilon)x^2 < \int_0^x f(t) dt < (2 + \epsilon)x^2$$

Το ζητούμενο τώρα έπεται για $\epsilon = 1$.

β' τρόπος: Έχουμε

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 4$$

Άρα, όπως παραπάνω, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$0 < x < \delta \Rightarrow 4 - \epsilon < \frac{f(x)}{x} < 4 + \epsilon \Rightarrow (4 - \epsilon)x < f(x) < (4 + \epsilon)x$$

Από την ιδιότητα μονοτονίας του ολοκληρώματος,

$$\begin{aligned} 0 < t < x < \delta \Rightarrow (4 - \epsilon)t < f(t) < (4 + \epsilon)t \Rightarrow (4 - \epsilon) \int_0^x t dt < \int_0^x f(t) dt < (4 + \epsilon) \int_0^x t dt \\ \Rightarrow \frac{4 - \epsilon}{2} x^2 < \int_0^x f(t) dt < \frac{4 + \epsilon}{2} x^2 \end{aligned}$$

και συνεπώς για $\epsilon = 2$ έχουμε το ζητούμενο.

Άσκηση 25. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \frac{e^x}{e^{3x} + e^{2x}} dx$.

Λύση. Θέτουμε $y = e^x$, $dy = e^x dx$. Έχουμε

$$\int \frac{e^x}{e^{3x} + e^{2x}} dx = \int \frac{1}{y^3 + y^2} dy = \int \frac{1}{y^2(y + 1)} dy$$

Διασπάμε σε απλά κλάσματα και παίρνουμε

$$\frac{1}{y^2(y + 1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y^2} + \frac{C}{y + 1}$$

$$Ay(y + 1) + B(y + 1) + Cy^2 = 1$$

$$(A + C)y^2 + (A + B)y + B = 1$$

Άρα $A + C = 0$, $A + B = 0$ και $C = 1$. Εύκολα βλέπουμε ότι $B = 1$, $A = -1$ και άρα

$$\frac{1}{y^2(y + 1)} = -\frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y + 1}$$

$$\int \frac{1}{y^2(y + 1)} dy = -\int \frac{1}{y} dy + \int \frac{1}{y^2} dy + \int \frac{1}{y + 1} dy = -\ln|y| - \frac{1}{y} + \ln|y + 1|$$

Οπότε

$$\int \frac{e^x}{e^{3x} + e^{2x}} dx = -\ln(e^x) - \frac{1}{e^x} + \ln(e^x + 1) = -x - \frac{1}{e^x} + \ln(e^x + 1)$$

Άσκηση 26. Έστω $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$ γνησίως αύξουσα συνεχής και με συνεχή παράγωγο. Δείξτε ότι

$$\int_c^d f^{-1}(x) dx = bd - ac - \int_a^b f(x) dx$$

Λύση. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x = f(t)$, $t \in [a, b]$ και ολοκλήρωση κατά μέρη, έχουμε

$$\begin{aligned}\int_c^d f^{-1}(x) dx &= \int_a^b f^{-1}(f(t))f'(t) dt = \int_a^b t f'(t) dt \\ &= [t f(t)]_a^b - \int_a^b t' f(t) dt \\ &= bd - ac - \int_a^b f(t) dt\end{aligned}$$

Άσκηση 27. Έστω $I_n = \int_0^{2\pi} \cos^n x dx$, $n \geq 0$. Δείξτε ότι $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ για κάθε $n \geq 2$.

Λύση. Έχουμε $I_0 = \int_0^{2\pi} dx = 2\pi$ και $I_1 = \int_0^{2\pi} \cos x dx = \int_0^{2\pi} (\sin x)' dx = [\sin x]_0^{2\pi} = 0$. Για κάθε $n \geq 2$ έχουμε

$$\begin{aligned}I_n &= \int_0^{2\pi} \cos^n x dx = \int_0^{2\pi} \cos^{n-1} x (\sin x)' dx \\ &= [\cos^{n-1} x \sin x]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (\cos^{n-1} x)' \sin x dx \\ &= -(n-1) \int_0^{2\pi} \cos^{n-2} x (\cos x)' \sin x dx \\ &= (n-1) \int_0^{2\pi} \cos^{n-2} x \sin^2 x dx \\ &= (n-1) \int_0^{2\pi} \cos^{n-2} x (1 - \cos^2 x) dx \\ &= (n-1) \int_0^{2\pi} \cos^{n-2} x dx - (n-1) \int_0^{2\pi} \cos^n x dx \\ &= (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n\end{aligned}$$

και άρα

$$I_n = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n \Rightarrow I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

για κάθε $n \geq 2$.

Άσκηση 28. Αν $I_n = \frac{1}{(x^2 + 1)^n} dt$ δείξτε ότι

$$I_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{2n}\right) I_n + \frac{1}{2n} \cdot \frac{t}{(x^2 + 1)^n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Λύση. Έχουμε $(\arctan x)' = \frac{1}{x^2 + 1}$ και

$$\left(\frac{1}{(x^2 + 1)^n}\right)' = -\frac{n(x^2 + 1)^{n-1} 2x}{(x^2 + 1)^{2n}} = -2n \cdot \frac{x}{(x^2 + 1)^{n+1}} \quad (5)$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}} dx &= \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^{n+1}} \\
 &= \int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^{n+1}} dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}} dx \\
 &= \int \frac{1}{(x^2+1)^n} dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}} dx \\
 &= I_n - \int x \cdot \frac{x}{(x^2+1)^{n+1}} dx \\
 &\stackrel{(5)}{=} I_n + \frac{1}{2n} \int x \cdot \left(\frac{1}{(x^2+1)^n} \right)' dx \\
 &= I_n + \frac{1}{2n} \left(x \cdot \frac{1}{(x^2+1)^n} - \int (x)' \cdot \frac{1}{(x^2+1)^n} dx \right) \\
 &= I_n + \frac{1}{2n} \left(\frac{x}{(x^2+1)^n} - I_n \right) \\
 &= \left(1 - \frac{1}{2n} \right) I_n + \frac{1}{2n} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^n}.
 \end{aligned}$$

Άσκηση 29. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \arctan t \, dt$.

Λύση.

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \arctan t \, dt &= \int_1^e (t)' \arctan t \, dt = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 t(\arctan t)' \, dt \\
 &= [t \arctan t]_0^1 - \int_0^1 t \cdot \frac{1}{t^2+1} \, dt \\
 &\stackrel{(u=t^2+1, du=2t dt)}{=} \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{u} \, du \\
 &= \frac{\pi}{4} - [\ln u]_1^2 \\
 &= \frac{\pi}{4} - \ln 2
 \end{aligned}$$

Άσκηση 30. (α) Δείξτε ότι $\int \cosh^2 t \, dt = \frac{\cosh t \sinh t + t}{2}$.

(β) Δείξτε ότι

$$\int \sqrt{1+x^2} \, dx = \frac{x\sqrt{1+x^2} + \ln(x + \sqrt{x^2+1})}{2}.$$

(γ) Βρείτε το μήκος της καμπύλης της γραφικής παράστασης της $f(x) = x^2$, $x \in [0, 1]$.

Λύση. (α) Έχουμε

$$\begin{aligned}
 I = \int \cosh^2 t \, dt &= \int \cosh t (\sinh t)' \, dt = \cosh t \sinh t - \int (\cosh t)' \sinh t \, dt \\
 &= \cosh t \sinh t - \int \sinh^2 t \, dt \\
 &= \cosh t \sinh t - \int (\cosh^2 t - 1) \, dt \\
 &= \cosh t \sinh t - \int \cosh^2 t \, dt + t = \cosh t \sinh t + t - I
 \end{aligned}$$

και άρα $I = \frac{\cosh t \sinh t + t}{2}$.

(β) Έχουμε

$$(\cosh u)^2 - (\sinh u)^2 = 1$$

και άρα αφού $\cosh u \geq 1 > 0$ για όλα τα $u \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι

$$\cosh u = \sqrt{1 + \sinh^2 u}$$

Επίσης, η $\sinh x$ έχει αντίστροφη που δίνεται από τον τύπο

$$\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

Άρα για $u = \sinh^{-1} x$ παίρνουμε

$$\sinh(\sinh^{-1} x) = x \text{ και } \cosh(\sinh^{-1} x) = \sqrt{1 + x^2}$$

Θέτοντας $x = \sinh t \Leftrightarrow t = \sinh^{-1} x$ και άρα $dx = (\sinh t)' dt = \cosh t dt$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 + x^2} dx &= \int \sqrt{1 + \sinh^2 t} \cosh t dt = \int \cosh^2 t dt \\ &= \frac{1}{2} (\cosh t \cdot \sinh t + t) \\ &= \frac{1}{2} (\cosh(\sinh^{-1} x) \cdot \sinh(\sinh^{-1} x) + \sinh^{-1} x) \\ &= \frac{1}{2} (\cosh(\sinh^{-1} x) \cdot x + \sinh^{-1} x) \\ &= \frac{1}{2} (x\sqrt{1 + x^2} + \sinh^{-1} x) \\ &= \frac{1}{2} (x\sqrt{1 + x^2} + \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})) \end{aligned}$$

(γ) Έχουμε

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 \sqrt{1 + y^2} dy$$

όπου θέσαμε $y = 2x$ και $dy = 2dx$. Από το (β) έχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^2 \sqrt{1 + y^2} dy &= \frac{1}{2} \left[\left(y\sqrt{1 + y^2} + \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) \right) \right]_0^2 \\ &= \frac{1}{2} (2\sqrt{5} + \ln(2 + \sqrt{5})) \\ &= \sqrt{5} + \ln \sqrt{2 + \sqrt{5}} \end{aligned}$$