

ΣΕΜΦΕ 2025
Μαθηματική Ανάλυση Ι
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 6

Άσκηση 1. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία διαμερίσεων (P_n) του $[a, b]$ τέτοια ώστε $\lim_{n \rightarrow \infty} L(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} U(f, P_n) = \int_a^b f(x) dx$.

Άσκηση 2. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη με $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αν $f(q) = 0$ για κάθε q ρητό στο $[a, b]$ δείξτε ότι $\int_a^b f(x) dx = 0$.

Άσκηση 3. (α) Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $f(x) = 0$ για όλα τα $x \in [a, b]$ εκτός από ένα σημείο δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και $\int_a^b f(x) dx = 0$.

(β) Γενικεύστε για συναρτήσεις $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες $f(x) = 0$ για όλα τα $x \in [a, b]$ εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων.

(γ) Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αν $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x)$ για όλα τα $x \in [a, b]$ εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων δείξτε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη και έχει το ίδιο ολοκλήρωμα με την f .

Άσκηση 4. Αποδείξτε την ακόλουθη ισχυροποίηση του Θεμελιώδους Θεωρήματος του Ολοκληρωτικού Λογισμού: Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση και έστω $x_0 \in [a, b]$. Αν το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός τότε η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $F'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Άσκηση 5. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση με $\int_a^b f(x) dx \neq 0$. (α) Δείξτε ότι για κάθε $\lambda \in (0, 1)$ υπάρχει $\xi \in (a, b)$ με $\int_a^\xi f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$. (β) Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ με $\int_a^\xi f(t) dt = \int_\xi^b f(t) dt$.

Άσκηση 6. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και έστω $F(x) = \int_a^x f(x) dx$ για κάθε $x \in [a, b]$. Δείξτε τα εξής:

(α) Η F είναι σταθερή αν και μόνο αν $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

(β) Η F είναι αύξουσα (αντίστοιχα φθίνουσα) αν και μόνο αν $f(x) \geq 0$ (αντ. $f(x) \leq 0$) για κάθε $x \in [a, b]$.

Άσκηση 7. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Αν $\int_a^b f^2(x) dx = 0$ δείξτε ότι $f = 0$.

Άσκηση 8. (α) Έστω $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής με $h(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Δείξτε ότι $\int_a^b h(x) dx > 0$.

(β) Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς με $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Δείξτε ότι $\int_a^b f(x) dx > \int_a^b g(x) dx$.

Άσκηση 9. Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής.

(α) Έστω $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής τέτοια ώστε $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 g(x) dx$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = g(\xi)$.

(β) Αν $\int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi}{4}$ δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \frac{1}{\xi^2 + 1}$.

Άσκηση 10. Αποδείξτε ότι για κάθε $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχή και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $F : I \rightarrow \mathbb{R}$, n -φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με $F^{(n)} = f$ (με $F^{(n)}(x)$ συμβολίζουμε την n -τάξης παράγωγο της F).

Άσκηση 11. Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής με $f(0) = 1$. Υπολογίστε τα όρια $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{1/n} f(t) dt$ και $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \int_0^{1/n} f(t) dt \right)$.

Άσκηση 12. Υπολογίστε το όριο $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^n}{n!} \int_0^{n^{1/n}} \arctan(e^{t^2}) dt \right)$.

Άσκηση 13. (α) Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$G(x) = \int_x^b f(t) dt$$

για κάθε $x \in [a, b]$ (αν $x = b$ θέτουμε $G(b) = \int_b^b f(x) dx = 0$). Δείξτε ότι $G'(x) = -f(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$.

(β) Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(0) = 1$ και $\int_0^1 f(x) dx = 0$. Δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{1/n}^1 f(t) dt = 0 \text{ και } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \int_{1/n}^1 f(t) dt \right) = -1$$

Άσκηση 14. Αποδείξτε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right) = \ln 2$.

Άσκηση 15. Έστω $G : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $G(x) = \int_0^{\sqrt{\ln x}} e^{t^2} dt$, για κάθε $x > 1$. Δείξτε ότι η G είναι παραγωγίσιμη και βρείτε τον τύπο της G' .

Άσκηση 16. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και $h_1, h_2 : [a, b] \rightarrow [a, b]$ παραγωγίσιμες τέτοιες ώστε $h_1(x) < h_2(x)$ για κάθε $x \in I$. Ορίζουμε την συνάρτηση $H : I \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $H(x) = \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(t) dt$, για κάθε $x \in I$. Βρείτε την $H'(x)$ για κάθε $x \in I$.

Άσκηση 17. Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$. Δείξτε τα εξής:
(α) $\int_a^b g(x) dx \neq 0$ και (β) υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{\int_a^b f(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} = \frac{f(\xi)}{g(\xi)}$$

Άσκηση 18. Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$. Δείξτε τα εξής:

(α) Για κάθε $c \in (a, b)$, $\int_c^b g(t) dt \neq 0$. (β) Υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $\frac{\int_a^\xi f(t) dt}{\int_\xi^b g(t) dt} = \frac{f(\xi)}{g(\xi)}$.

Άσκηση 19. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν $f(a) = 0$ και $\int_a^b f(t) dt = 0$ δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε

$$\int_a^\xi f(t) dt = f(\xi) \cdot (\xi - a)$$

(Υπόδειξη: Θεωρείστε την συνάρτηση $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με $\phi(a) = 0$ και $\phi(x) = \frac{\int_a^x f(t) dt}{x - a}$ για κάθε $x \in (a, b]$.)

Άσκηση 20. Υπολογίστε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^5} e^{t^2} \sin(t^2) dt}{x^{15}}$.

Άσκηση 21. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx$.

Άσκηση 22. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{x^3 + x} dx$

Άσκηση 23. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \frac{x}{x^2 + 4x + 5} dx$.

Άσκηση 24. Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής με $f(0) = 0$ και παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = 4$. Δείξτε ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$x^2 < \int_0^x f(t) dt < 3x^2,$$

για κάθε $x \in (0, \delta)$.

Άσκηση 25. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \frac{e^x}{e^{3x} + e^{2x}} dx$.

Άσκηση 26. Έστω $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$ γνησίως αύξουσα συνεχής και με συνεχή παράγωγο. Δείξτε ότι

$$\int_c^d f^{-1}(x) dx = bd - ac - \int_a^b f(x) dx$$

Άσκηση 27. Έστω $I_n = \int_0^{2\pi} \cos^n x dx$, $n \geq 0$. Δείξτε ότι $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ για κάθε $n \geq 2$.

Άσκηση 28. Αν $I_n = \frac{1}{(x^2 + 1)^n} dt$ δείξτε ότι

$$I_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{2n}\right) I_n + \frac{1}{2n} \cdot \frac{t}{(x^2 + 1)^n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 29. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \arctan t dt$.

Άσκηση 30. (α) Δείξτε ότι $\int \cosh^2 t dt = \frac{\cosh t \sinh t + t}{2}$.

(β) Δείξτε ότι

$$\int \sqrt{1+x^2} dx = \frac{x\sqrt{1+x^2} + \ln(x + \sqrt{x^2+1})}{2}.$$

(γ) Βρείτε το μήκος της καμπύλης της γραφικής παράστασης της $f(x) = x^2$, $x \in [0, 1]$.