

**ΣΗΜΜΥ**  
**Μαθηματική Ανάλυση**  
Επαναληπτικές Ασκήσεις

**Ασκηση 1.** Έστω  $x, y > 0$  τέτοιοι ώστε  $x > \gamma y$  για κάθε  $\gamma \in (0, 2)$ . Αποδείξτε ότι  $x \geq 2y$ .

**Ασκηση 2.** Αποδείξτε ότι το σύνολο

$$A = \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

είναι φραγμένο και βρείτε τα  $\sup A$  και  $\inf A$ . Εξετάστε αν το  $A$  έχει μέγιστο ή ελάχιστο στοιχείο.

**Ασκηση 3.** Έστω  $A, B$  μη κενά, άνω φραγμένα υποσύνολα του  $\mathbb{R}$  με την εξής ιδιότητα: για κάθε  $a \in A$  υπάρχει  $b \in B$  ώστε  $a < b$ . Αποδείξτε ότι  $\sup A \leq \sup B$ .

Δώστε παράδειγμα στο οποίο ικανοποιείται η υπόθεση και ισχύει  $\sup A = \sup B$ .

**Ασκηση 4.** Αποδείξτε ότι το σύνολο

$$A = \{ \sqrt[n]{2} : n \in \mathbb{N} \}$$

είναι φραγμένο και βρείτε τα  $\sup A$  και  $\inf A$ . Εξετάστε αν το  $A$  έχει μέγιστο ή ελάχιστο στοιχείο.

**Ασκηση 5.** Ορίζουμε μια ακολουθία  $(x_n)$  με  $1 < x_1 < 3$  και

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 3}{4}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Εξετάστε αν η  $(x_n)$  συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό και, αν ναι, βρείτε το  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

**Ασκηση 6.** Έστω  $(x_n)$  ακολουθία πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε  $x_n \rightarrow \frac{1}{2}$ . Ορίζουμε  $y_n = [x_n]$ , όπου  $[x]$  είναι το ακέραιο μέρος του  $x$ . Αποδείξτε ότι  $y_n \rightarrow 0$ .

**Ασκηση 7.** Έστω  $(a_n)$  ακολουθία πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής (αιτιολογήστε την απάντησή σας).

(α) Αν  $a_{n+1} - a_n \rightarrow 0$  τότε η  $(a_n)$  συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

(β) Αν η  $(a_n)$  είναι αύξουσα και έχει υποακολουθία  $(a_{k_n})$  τέτοια ώστε  $a_{k_n} \rightarrow x \in \mathbb{R}$  τότε  $a_n \rightarrow x$ .

(γ) Αν η  $(a_n)$  δεν είναι άνω φραγμένη τότε  $a_n \rightarrow +\infty$ .

**Ασκηση 8.** Έστω  $(a_k)$  ακολουθία πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής (αιτιολογήστε την απάντησή σας).

(α) Αν  $k^2 a_k \rightarrow 0$  τότε η σειρά  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  συγκλίνει.

(β) Αν η σειρά  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  συγκλίνει τότε η σειρά  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$  συγκλίνει.

(γ) Αν η σειρά  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  συγκλίνει τότε η σειρά  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k}$  συγκλίνει.

(δ) Αν η σειρά  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$  συγκλίνει τότε η σειρά  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^3$  συγκλίνει απολύτως.

**Ασκηση 9.** Έστω  $(a_k)$  και  $(b_k)$  ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Αποδείξτε ότι αν η σειρά  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  συγκλίνει απολύτως και η σειρά  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  συγκλίνει, τότε η σειρά  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$  συγκλίνει.

**Άσκηση 10.** Έστω  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  και  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ . Αποδείξτε ότι η  $f$  παίρνει ελάχιστη τιμή.

**Άσκηση 11.** Έστω  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν  $x_n \in [a, b]$  ώστε  $f(x_n) \rightarrow 0$ . Αποδείξτε ότι υπάρχει  $x_0 \in [a, b]$  ώστε  $f(x_0) = 0$ .

**Άσκηση 12.** Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής. Αν είναι αληθής αποδείξτε την και αν είναι ψευδής δώστε αντιπαράδειγμα.

(α) Υπάρχει συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  που είναι συνεχής στο 0 και ασυνεχής σε όλα τα άλλα σημεία.

(β) Αν η  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ικανοποιεί την  $|f(x)| \leq x^2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , τότε είναι συνεχής στο 0.

(γ) Αν η  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχής, και αν  $f(0) = 0$  και  $f(1) = 1$ , τότε το σύνολο τιμών της  $f$  είναι το  $[0, 1]$ .

**Άσκηση 13.** Έστω  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  και για κάθε  $x > 0$  ισχύει  $|f'(x)| \leq \frac{1}{x^2}$ . Αποδείξτε ότι:

(i) Η σειρά  $\sum_{k=1}^{\infty} |f(k+1) - f(k)|$  συγκλίνει.

(ii) Η  $f$  είναι φραγμένη.

**Άσκηση 14.** Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε  $a_n = f(1/n)$  για κάθε  $n = 1, 2, \dots$ . Αποδείξτε ότι:

(1) Αν η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  συγκλίνει τότε  $f(0) = 0$ .

(2) Αν υπάρχει η  $f'(0)$  και αν η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  συγκλίνει τότε  $f'(0) = 0$ . [Υπόδειξη: παρατηρήστε ότι  $f'(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} n a_n$ .]

**Άσκηση 15.** Έστω  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ολοκληρώσιμη συνάρτηση με  $\int_a^b g(x) dx > 0$ . Αποδείξτε ότι υπάρχει διάστημα  $[\gamma, \delta] \subseteq [a, b]$  τέτοιο ώστε  $g(x) > 0$  για κάθε  $x \in [\gamma, \delta]$ . [Υπόδειξη: Εξηγήστε πρώτα γιατί υπάρχει διαμέριση  $P$  του  $[a, b]$  τέτοια ώστε  $L(g, P) > 0$ .]

**Άσκηση 16.** Έστω  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι

$$\left( \int_a^b f(t) \sin t \, dt \right)^2 + \left( \int_a^b f(t) \cos t \, dt \right)^2 \leq (b-a) \int_a^b |f(t)|^2 \, dt.$$

**Άσκηση 17.** Έστω  $b > a > 0$ . Υπολογίστε (με αιτιολόγηση) το

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{\sin(nx)}{x} dx.$$

**Άσκηση 18.** Έστω  $f : [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  συνεχής και φθίνουσα. Αποδείξτε ότι η ακολουθία  $a_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx$  συγκλίνει.

**Άσκηση 19.** Έστω  $f : [0, +\infty)$  παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή παράγωγο  $f'$  και  $f(0) = 0$ . Αποδείξτε, ότι για κάθε  $x > 0$ ,

$$|f(x)|^2 \leq x \int_0^x |f'(t)|^2 dt.$$

**Άσκηση 20.** Έστω  $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε το  $\int_0^\infty f(t) dt$  να υπάρχει και να είναι πεπερασμένο. Αποδείξτε ότι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{x/2}^x f(t) dt = 0$ . Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι η  $f$  είναι φθίνουσα, αποδείξτε ότι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x f(x)) = 0$ .

**Άσκηση 21.** Έστω  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχής. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{2\varepsilon}^{4\varepsilon} \frac{f(x)}{x} dx = f(0) \cdot \ln 2.$$

[Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι  $\int_a^{2a} \frac{1}{x} dx = \ln 2$  για κάθε  $a > 0$ .]

**Άσκηση 22.** Έστω  $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$  συνάρτηση με συνεχή παράγωγο και  $f(0) = 0$ . Δείξτε ότι

$$\int_0^a |f(t)f'(t)| dt \leq \frac{a}{2} \int_0^a |f'(t)|^2 dt.$$