

ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
11ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Ασκηση 1. Έστω $n \geq 1$ και $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ συναρτήσεις n φορές παραγωγίσιμες στο $x_0 \in (a, b)$ ώστε $f(x_0) = f'(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $g(x_0) = g'(x_0) = \dots = g^{(n-1)}(x_0) = 0$ και $g^{(n)}(x_0) \neq 0$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}.$$

Ασκηση 2. Για καθεμία από τις δυναμοσειρές

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \\ \text{(ii)} \quad & 1 - x^3 + x^6 - x^9 + \dots \\ \text{(iii)} \quad & \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3 \cdot 2} + \frac{x^4}{4 \cdot 3} - \frac{x^5}{5 \cdot 4} + \dots \\ \text{(iv)} \quad & 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots \end{aligned}$$

να βρείτε την ακτίνα σύγκλισης R και το σύνολο σύγκλισης της δυναμοσειράς, καθώς και τύπο για τη συνάρτηση που ορίζεται από την δυναμοσειρά στο $(-R, R)$.

Ασκηση 3. Υπολογίστε τα παρακάτω αθροίσματα:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k} \pi^{2k}}{(2k)!}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^k}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k(k+1)}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{2^k k!}.$$

Ασκηση 4. Βρείτε το πολυώνυμο Taylor $T_{n,f,0}$ για τη συνάρτηση

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Ασκηση 5. (α) Υπολογίστε το ανάπτυγμα Taylor (με κέντρο το 0) της συνάρτησης

$$g(x) = \frac{e^x - 1}{x}.$$

Για ποιες τιμές του x συγκλίνει; Να βρεθούν οι $g^{(20)}(0)$ και $g^{(21)}(0)$.

(β) Υπολογίστε το ανάπτυγμα Taylor (με κέντρο το 0) της συνάρτησης $g(x) = (\sin x)^2$. Για ποιες τιμές του x συγκλίνει; Να βρεθούν οι $g^{(20)}(0)$ και $g^{(21)}(0)$. [Υπόδειξη: Υπολογίστε πρώτα το ανάπτυγμα της $f(x) = \cos(2x)$.]

Ασκηση 6. Υπολογίστε το ανάπτυγμα Taylor με κέντρο το 0 της

$$f(x) = \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$$

στο διάστημα $(-1, 1)$ και χρησιμοποιώντας το υπολογίστε το άθροισμα

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^{2k-1}(2k-1)}.$$

Άσκηση 7. Υπολογίστε το ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης $f(x) = e^{x^2/2} - e^{-x^2/2}$ με κέντρο το 0 στο $\mathbb{R}$, και χρησιμοποιώντας το αποδείξτε ότι

$$x^2 + \frac{x^6}{24} \leq e^{x^2/2} - e^{-x^2/2}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 8. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με

$$f(x) \geq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Υποθέτουμε ότι

$$f''(x) \leq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή.