

ΣΑΤΜ 2025-2026
Μαθηματική Ανάλυση
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 6 ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y) = ax^4 + by^4$, όπου a, b μη μηδενικές σταθερές. (α) Δείξτε ότι το $(0, 0)$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο. (β) Αν a, b ομόσημα δείξτε ότι το $(0, 0)$ είναι ολικό ακρότατο της f . (γ) Αν a, b ετερόσημα δείξτε ότι το $(0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο.

Λύση. (i) Επειδή $f_x(x, y) = 4ax^3$ και $f_y(x, y) = 4by^3$ έχουμε ότι $f_x(x, y) = f_y(x, y) \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$. Άρα το $(0, 0)$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο.

(ii) Έστω $a > 0$ και $b > 0$. Τότε $f(x, y) = ax^4 + by^4 \geq 0 = f(0, 0)$ για όλα τα $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ και άρα το $(0, 0)$ είναι σημείο ολικού ελαχίστου. Αντίστοιχα αν $a < 0$ και $b < 0$ τότε $f(x, y) \leq 0$ για όλα τα $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ και στην περίπτωση αυτή το $(0, 0)$ είναι σημείο ολικού μεγίστου.

(iii) Έστω $a < 0$ και $b > 0$ (αντίστοιχα εργαζόμαστε αν $a > 0$ και $b < 0$). Τότε για όλα τα σημεία $(x, 0)$ στον x -άξονα έχουμε $f(x, 0) = ax^4 \leq 0$ ενώ για όλα τα σημεία $(0, y)$ στον y -άξονα $f(0, y) = by^4 \geq 0$. Άρα στον x -άξονα το $(0, 0)$ είναι σημείο ελαχίστου ενώ στον y -άξονα σημείο μεγίστου, οπότε το $(0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο.

Άσκηση 2. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x, y) = x^3 - xy + y^2$ ως προς τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία.

Λύση. Έχουμε $f_x(x, y) = 3x^2 - y$ και $f_y(x, y) = -x + 2y$. Το σύστημα

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 0 \\ f_y(x, y) &= 0 \end{aligned}$$

δίνει

$$\begin{aligned} 3x^2 - y &= 0 \\ x &= 2y \end{aligned}$$

και άρα $12y^2 - y = 0 \Leftrightarrow y(12y - 1) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ή $y = 1/12$. Συνεπώς τα κρίσιμα σημεία για την f είναι τα

$$(0, 0) \text{ και } \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)$$

Επειδή $f_{xx}(x, y) = 6x$, $f_{yy}(x, y) = 2$ και $f_{xy}(x, y) = -1$ έχουμε

$$\Delta(0, 0) = f_{xx}(0, 0)f_{yy}(0, 0) - f_{xy}^2(0, 0) = -1 < 0$$

και άρα το $(0, 0)$ είναι σαγματικό ενώ

$$\Delta\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right) = f_{xx}\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)f_{yy}\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right) - f_{xy}^2\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right) = 2 - 1 > 0$$

και άρα αφού επιπλέον $f_{xx}\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right) = 1 > 0$ στο $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)$ η f έχει τοπικό ελάχιστο.

Άσκηση 3. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x, y) = x^4 - 4xy + 2y^2 - 10$ ως προς τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία.

Λύση. Έχουμε $f_x(x, y) = 4x^3 - 4y$ και $f_y(x, y) = -4x + 4y$. Τα κρίσιμα σημεία της f είναι οι λύσεις του συστήματος $\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases}$ ή ισοδύναμα $\begin{cases} x^3 - y = 0 \\ -x + y = 0 = 0 \end{cases}$. Η δεύτερη εξίσωση δίνει $y = x$ και με

αντικατάσταση στην πρώτη παίρνουμε $x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = -1$. Αντίστοιχα έχουμε, $y = 0 \text{ ή } y = 1 \text{ ή } y = -1$, δηλαδή τα κρίσιμα σημεία είναι τα σημεία $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(-1, -1)$.

Υπολογίζουμε τώρα τις δεύτερης τάξης μερικές παραγώγους της f και την ορίζουσα Δ του Εσσιανού πίνακα της f . Έχουμε $f_{xx}(x, y) = 12x^2$, $f_{xy}(x, y) = -4$, $f_{yy}(x, y) = 4$ και $\Delta(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}^2(x, y) = 48x^2 - 16$. Είναι $\Delta(0, 0) = -16 < 0$ και άρα το $(0, 0)$ σαγματικό σημείο. Επίσης $\Delta(1, 1) = \Delta(-1, -1) > 0$ και $f_{xx}(1, 1) = f_{xx}(-1, -1) > 0$. Άρα τα σημεία $(-1, -1)$ είναι σημεία τοπικού ελαχίστου.

Άσκηση 4. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x, y) = x^4 + 2x^2y + y^2 + \frac{2}{3}y^3$ ως προς τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία.

Λύση. Έχουμε $f_x(x, y) = 4x^3 + 4xy$, $f_y(x, y) = 2x^2 + 2y + 2y^2$. Επίσης $f_{xx}(x, y) = 12x^2 + 4y$, $f_{yy}(x, y) = 2 + 4y$, $f_{xy}(x, y) = 4y$. Τα κρίσιμα σημεία της f είναι οι λύσεις του συστήματος $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$. Έχουμε

$$f_x(x, y) = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + y) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } y = -x^2$$

Αν $x = 0$ τότε $f_y(x, y) = y + y^2 = 0 \Leftrightarrow y(1 + y) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ ή } y = -1$.

Αν $y = -x^2$ τότε $f_y(x, y) = 2x^2 - 2x^2 + 4x^4 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Άρα τα κρίσιμα σημεία είναι τα σημεία $(0, 0)$ και $(0, -1)$.

Επειδή $\Delta(0, -1) = (-4)^2 + 12 > 0$ και $f_{xx}(0, -1) - 4 < 0$ το $(0, -1)$ είναι τοπικό μέγιστο.

Για το $(0, 0)$ έχουμε ότι $\Delta(0, 0) = 0$. Για να δούμε αν είναι τοπικό ακρότατο παρατηρούμε ότι

$$f(x, y) = (x^2 + y)^2 + \frac{2}{3}y^3$$

Άρα για κάθε $(x, y) \neq (0, 0)$ στην παραβολή $y = -x^2$ έχουμε $f(x, y) < 0$ ενώ για κάθε (x, y) στην ευθεία $y = 0$ έχουμε $f(x, y) = x^4 > 0$. Οπότε το $(0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο.

Άσκηση 5. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x, y) = 8x^3 - 12xy + y^3$ ως προς τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία.

Λύση. Έχουμε $f_x(x, y) = 24x^2 - 12y$, $f_y(x, y) = -12x + 3y^2$. Τα κρίσιμα σημεία είναι οι λύσεις του συστήματος

$$\begin{cases} 24x^2 - 12y = 0 \\ -12x + 3y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - y = 0 \\ -4x + y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x^2 \\ -4x + (2x^2)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x^2 \\ 4x(x^3 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x^2 \\ x = 0 \text{ ή } x = 1 \end{cases}$$

και άρα παίρνουμε δύο κρίσιμα σημεία τα $(0, 0)$ και $(1, 2)$. Επειδή $f_{xx}(x, y) = 48x$, $f_{yy}(x, y) = 6y$, $f_{xy}(x, y) = -12$ και $\Delta(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - (f_{xy}(x, y))^2$, για το $(0, 0)$ έχουμε $\Delta(0, 0) < 0$ οπότε το $(0, 0)$ είναι σαγματικό. Αντίστοιχα $\Delta(1, 2) > 0$ και $f_{xx}(1, 2) > 0$ και άρα η f στο $(1, 2)$ έχει τοπικό ελάχιστο.

Άσκηση 6. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x, y) = 2x^3 - 3x^2 + 2y^3 + 3y^2$ ως προς τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία.

Λύση. Έχουμε $f_x(x, y) = 6x^2 - 6x$, $f_y(x, y) = 6y^2 + 6y$. Άρα $f_x(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1$ και $f_y(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ ή } y = -1$. Συνεπώς έχουμε τα εξής τέσσερα κρίσιμα σημεία

$$(0, 0), (0, -1), (1, 0) \text{ και } (1, -1)$$

Είναι $f_{xx}(x, y) = 12x - 6$, $f_{xy}(x, y) = 0$ και $f_{yy}(x, y) = 12y + 6$. Άρα $\Delta = f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 = (12x - 6)(12y + 6)$.

Επειδή $\Delta(0, 0) = -36 < 0$ το $(0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο.

Επειδή $\Delta(0, -1) = 36 > 0$ και $f_{xx}(0, -1) = -6 < 0$ στο $(0, -1)$ η f έχει τοπικό μέγιστο.

Επειδή $\Delta(1, 0) = 36 > 0$ και $f_{xx}(1, 0) = 6 > 0$ στο $(1, 0)$ η f έχει τοπικό ελάχιστο.

Επειδή $\Delta(1, -1) = -36 < 0$ και $f_{xx}(1, -1) = -6 < 0$ το $(1, -1)$ είναι σαγματικό σημείο.

Άρα η f έχει ακριβώς ένα τοπικό μέγιστο στο σημείο $(0, -1)$ και ακριβώς ένα τοπικό ελάχιστο στο σημείο $(1, 0)$.

Άσκηση 7. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x, y) = x^4 - 4x^2y + 4y^2 - y^4$ ως προς τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία.

Λύση. Έχουμε

$$f_x(x, y) = 4x^3 - 8xy, \quad f_y(x, y) = -4x^2 + 8y - 4y^3$$

Τα κρίσιμα σημεία της f είναι οι λύσεις του συστήματος

$$\begin{cases} 4x^3 - 8xy = 0 \\ -4x^2 + 8y - 4y^3 = 0 \end{cases}$$

Η πρώτη εξίσωση δίνει

$$4x^3 - 8xy = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 2y) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } y = \frac{x^2}{2}$$

1) Αν $x = 0$ τότε από την δεύτερη εξίσωση παίρνουμε

$$-4x^2 + 8y - 4y^3 = 8y - 4y^3 = 0 \Leftrightarrow 4y(2 - y^2) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ ή } y = \pm\sqrt{2}$$

οπότε παίρνουμε τα σημεία $(0, 0)$, $(0, -\sqrt{2})$ και $(0, \sqrt{2})$.

2) Αντίστοιχα αν $y = \frac{x^2}{2}$ η δεύτερη εξίσωση δίνει

$$-4x^2 + 8y - 4y^3 = -4y^3 = 0 \Leftrightarrow y = 0$$

οπότε έχουμε πάλι το σημείο $(0, 0)$. Άρα τα κρίσιμα σημεία είναι τα εξής:

$$(0, 0), \quad (0, -\sqrt{2}) \text{ και } (0, \sqrt{2})$$

Προχωρούμε στην εύρεση των μερικών παραγώγων δεύτερης τάξης. Έχουμε

$$f_{xx}(x, y) = 12x^2 - 8y, \quad f_{yy}(x, y) = 8 - 12y^2, \quad f_{xy}(x, y) = -8x$$

και συνεπώς

$$\Delta(x, y) = (12x^2 - 8y)(8 - 12y^2) - 64x^2$$

οπότε

$$\Delta(0, y) = -8y(8 - 12y^2)$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

• Για το σημείο $(0, 0)$ έχουμε $\Delta(0, 0) = 0$ και άρα το Κριτήριο δεύτερης παραγώγου δεν αποφαινεται. Παρατηρούμε όμως ότι

$$f(x, y) = (x^4 - 4x^2y + 4y^2) - y^4 = (x^2 - 2y)^2 - y^4 = -y^4 < 0$$

όταν $y = x^2/2$ ενώ

$$f(x, 0) = x^4 > 0$$

Άρα το $(0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο.

• Για το σημείο $(0, \sqrt{2})$ έχουμε

$$\Delta(0, \sqrt{2}) = -8\sqrt{2}(8 - 24) > 0$$

Επιπλέον $f_{xx}(0, \sqrt{2}) = -8\sqrt{2} < 0$. Από το Κριτήριο δεύτερης παραγώγου έχουμε ότι στο $(0, \sqrt{2})$ η f έχει τοπικό μέγιστο.

• Για το σημείο $(0, -\sqrt{2})$ έχουμε

$$\Delta(0, -\sqrt{2}) = 8\sqrt{2}(8 - 24) < 0$$

Από το Κριτήριο δεύτερης παραγώγου έχουμε ότι το $(0, -\sqrt{2})$ είναι σαγματικό σημείο της f .

Άρα η f έχει ένα μόνο τοπικό ακρότατο το $(0, \sqrt{2})$, που ειδικότερα είναι τοπικό μέγιστο.

Άσκηση 8. Υποθέτουμε ότι το πολυώνυμο Taylor δεύτερης τάξης μίας C^2 συνάρτησης $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με κέντρο το $(0, 0)$ δίνεται από τον τύπο $T_2(x, y) = x^2 - xy + y^2$. Δείξτε ότι η f έχει τοπικό ελάχιστο στο $(0, 0)$.

Λύση. Το πολυώνυμο Taylor δεύτερης τάξης της $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με κέντρο το $(0, 0)$ γενικά δίνεται από τον τύπο

$$T_2(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y + \frac{1}{2} [f_{xx}(0, 0)x^2 + 2f_{xy}(0, 0)xy + f_{yy}(0, 0)y^2]$$

Από την άλλη μεριά η υπόθεσή μας λέει ότι

$$T_2(x, y) = x^2 - xy + y^2 = \frac{1}{2}(2x^2 - 2xy + 2y^2)$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές παίρνουμε $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$, $f_{xx}(0, 0) = f_{yy}(0, 0) = 2$ και $f_{xy}(0, 0) = -1$. Άρα το $(0, 0)$ είναι κρίσιμο με $\Delta = f_{xx}(0, 0)f_{yy}(0, 0) - f_{xy}^2(0, 0) = 4 - 1 = 3 > 0$ και $f_{xx}(0, 0) > 0$. Από το Κριτήριο δεύτερης παραγώγου συμπεραίνουμε ότι το $(0, 0)$ είναι τοπικό ελάχιστο.

Άσκηση 9. Έστω η συνάρτηση $f(x, y) = x^2 + y^3$.

(α) Δείξτε ότι το $(0, 0)$ είναι κρίσιμο σημείο για την f .

(β) Δείξτε ότι η f δεν έχει τοπικό ακρότατο στο $(0, 0)$. Ειδικότερα, δείξτε ότι στον y -άξονα το $(0, 0)$ δεν είναι σημείο τοπικού ακροτάτου για την f .

(γ) Δείξτε ότι σε κάθε ευθεία διάφορη του y -άξονα που διέρχεται από το $(0, 0)$, το $(0, 0)$ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου για την f .

Λύση. (α) Έχουμε $f_x(x, y) = 2x$ και $f_y(x, y) = 3y^2$. Συνεπώς $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ και άρα το $(0, 0)$ είναι κρίσιμο σημείο. (β) Είναι $f(0, 0) = 0$ και στον y -άξονα $f(0, y) = y^3$. Άρα $f(0, y) < f(0, 0) < f(0, y')$ για κάθε $y < 0 < y'$ και άρα η f δεν παρουσιάζει στο $(0, 0)$ τοπικό ακρότατο. (γ) Όλες οι ευθείες που διέρχονται από το $(0, 0)$ εκτός του y -άξονα είναι της μορφής $y = \lambda x$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$. Η f σε αυτές παίρνει την μορφή $f(x, \lambda x) = x^2 + (\lambda x)^3 = x^2(1 + \lambda^3 x) > 0$ όταν το x είναι αρκετά κοντά στο 0. Άρα το $(0, 0)$ είναι σημείο στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο σε κάθε ευθεία που διέρχεται από αυτό διάφορη του y -άξονα.

Άσκηση 10. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 5$ ως προς τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία.

Λύση. Έχουμε $f_x(x, y) = 4x^3 - 4y$, $f_y(x, y) = 4y^3 - 4x$. Άρα $f_x(x, y) = 0 \Leftrightarrow x^3 = y$ και $f_y(x, y) = 0 \Leftrightarrow y^3 = x$. Συνεπώς

$$x^9 = x \Leftrightarrow x^9 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^8 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = -1$$

Συνεπώς αφού $y = x^3$ έχουμε τα εξής τρία κρίσιμα σημεία

$$(0, 0), (1, 1) \text{ και } (-1, -1)$$

Είναι $f_{xx}(x, y) = 12x^2$, $f_{xy}(x, y) = -4$ και $f_{yy}(x, y) = 12y^2$. Άρα $\Delta(x, y) = 144x^2y^2 - 16$.

Επειδή $\Delta(0, 0) = -16 < 0$ το $(0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο.

Επειδή $\Delta(1, 1) > 0$ και $f_{xx}(1, 1) = 12 > 0$ στο $(1, 1)$ η f έχει τοπικό ελάχιστο.

Ομοίως στο $(-1, -1)$ η f έχει τοπικό ελάχιστο.

Άσκηση 11. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2$ ως προς τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία.

Λύση. Είναι

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 6x$$

$$f_y(x, y) = 6xy - 6y$$

$$f_{xx}(x, y) = 6x - 6$$

$$f_{yy}(x, y) = 6x - 6$$

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 6y$$

και άρα $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Υπολογίζουμε τώρα τα κρίσιμα σημεία δηλαδή τις λύσεις του συστήματος

$$\begin{aligned}f_x(x, y) &= 3x^2 + 3y^2 - 6x = 0 \\f_y(x, y) &= 6xy - 6y = 0\end{aligned}$$

Η δεύτερη εξίσωση γράφεται $6y(x - 1) = 0$ και άρα

$$y = 0 \text{ ή } x = 1 \quad (1)$$

Για $y = 0$ από την πρώτη εξίσωση έχουμε $3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 3x(x - 2) = 0$ και άρα $x = 0$ ή $x = 2$. Συνεπώς τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα σημεία

$$(0, 0) \text{ και } (2, 0).$$

Ομοίως για $x = 1$ η πρώτη εξίσωση δίνει $3 + 3y^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 1 = 0$ και άρα $y = 1$ ή $y = -1$. Οπότε έχουμε και τα σημεία

$$(1, 1) \text{ και } (1, -1).$$

Συνολικά έχουμε τέσσερα πιθανά τοπικά ακρότατα: $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(1, 1)$ και $(1, -1)$. Τώρα για κάθε (x, y) είναι

$$\Delta(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - (f_{xy}(x, y))^2 = (6x - 6) \cdot (6x - 6) - 36y^2$$

Έχουμε

(1) $\Delta(0, 0) = 36 > 0$, $f_{xx}(0, 0) = -6 < 0$ και άρα στο $(0, 0)$ η f έχει τοπικό μέγιστο.

(2) $\Delta(2, 0) = 36 > 0$, $f_{xx}(2, 0) = 6 > 0$ και άρα στο $(2, 0)$ η f έχει τοπικό ελάχιστο.

(3) $\Delta(1, 1) = -36 < 0$ και άρα το $(1, 1)$ είναι σαγματικό.

(4) $\Delta(1, -1) = -36 < 0$ και άρα το $(1, -1)$ είναι σαγματικό.

Άσκηση 12. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x, y) = x^4 - 4xy + 2y^2 - 1$ ως προς τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία.

Λύση. Έχουμε $f_x(x, y) = 4x^3 - 4y$, $f_y(x, y) = -4x + 4y$. Άρα $f_x(x, y) = 0 \Leftrightarrow x^3 = y$ και $f_y(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = x$. Συνεπώς

$$x^3 = x \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = -1$$

Συνεπώς αφού $y = x$ έχουμε τα εξής τρία κρίσιμα σημεία

$$(0, 0), (1, 1) \text{ και } (-1, -1)$$

Είναι $f_{xx}(x, y) = 12x^2$, $f_{xy}(x, y) = -4$ και $f_{yy}(x, y) = 4$. Άρα $\Delta(x, y) = 48x^2 - 16$.

Επειδή $\Delta(0, 0) = -16 < 0$ το $(0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο.

Επειδή $\Delta(1, 1) = \Delta(-1, -1) > 0$ και $f_{xx}(1, 1) = f_{xx}(-1, -1) = 12 > 0$ στα σημεία $(1, 1)$ και $(-1, -1)$ η f έχει τοπικό ελάχιστο.

Άσκηση 13. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x, y) = x^3 + y^3 - (x - y)^3$ ως προς τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία.

Λύση. Έχουμε

$$\begin{aligned}f_x(x, y) &= 3x^2 - 3(x - y)^2 \\f_y(x, y) &= 3y^2 + 3(x - y)^2 \\f_{xx}(x, y) &= 6x - 6(x - y) \\f_{yy}(x, y) &= 6y + 6(x - y) \\f_{xy}(x, y) &= f_{yx}(x, y) = 6(x - y)\end{aligned}$$

όλες συνεχείς.

Βρίσκουμε τώρα τα κρίσιμα σημεία λύνοντας το σύστημα

$$f_x(x, y) = 3x^2 - 3(x - y)^2 = 0$$

$$f_y(x, y) = 3y^2 + 3(x - y)^2 = 0$$

Με πρόσθεση κατά μέλη δίνει ότι $x^2 + y^2 = 0$ και άρα το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f είναι το $(0, 0)$.

Επειδή $\Delta(0, 0) = f_{xx}(0, 0)f_{yy}(0, 0) - (f_{xy}(0, 0))^2 = 0$ δεν μπορούμε να αποφανθούμε από το Κριτήριο Δεύτερης Παραγώγου αν το $(0, 0)$ είναι ή όχι τοπικό ακρότατο. Όμως παρατηρούμε ότι

$$(\alpha) f(0, 0) = 0,$$

$$(\beta) \text{ για κάθε } x = y > 0, \text{ είναι } f(x, y) = 2x^3 > 0 \text{ και}$$

$$(\gamma) \text{ για κάθε } x = y < 0 \text{ είναι } f(x, y) = 2x^3 < 0.$$

Συνεπώς σε κάθε περιοχή του $(0, 0)$ μπορούμε να βρούμε δύο σημεία που η τιμή της f στο ένα από αυτά να είναι μικρότερη του $f(0, 0)$ ενώ η τιμή στο άλλο να είναι μεγαλύτερη του $f(0, 0)$, πράγμα που σημαίνει ότι το $(0, 0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο. Άρα η f δεν έχει τοπικά ακρότατα.

Άσκηση 14. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy$ ως προς τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία.

Λύση. Έχουμε,

$$f_x(x, y) = 4x^3 - 4x + 4y$$

$$f_y(x, y) = 4y^3 - 4y + 4x$$

$$f_{xx}(x, y) = 12x^2 - 4$$

$$f_{yy}(x, y) = 12y^2 - 4$$

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 4$$

Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία λύνοντας το σύστημα

$$f_x(x, y) = 4x^3 - 4x + 4y = 0$$

$$f_y(x, y) = 4y^3 - 4y + 4x = 0$$

με πρόσθεση κατά μέλη δίνει ότι $x^3 = -y^3$ ισοδύναμα

$$y = -x$$

Αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση βρίσκουμε ότι $4x^3 - 8x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 2) = 0$ και άρα

$$x = 0 \text{ ή } x = \sqrt{2} \text{ ή } x = -\sqrt{2}$$

Συνεπώς τα πιθανά τοπικά ακρότατα είναι τα σημεία

$$(0, 0), \quad (\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \text{ και } (-\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

Έχουμε

$$\Delta(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - (f_{xy}(x, y))^2 = (12x^2 - 4) \cdot (12y^2 - 4) - 16$$

(1) $\Delta(0, 0) = 0$ και άρα δεν μπορούμε να αποφανθούμε από το Κριτήριο Δεύτερης Παραγώγου για το αν το $(0, 0)$ είναι ή όχι τοπικό ακρότατο. Όμως παρατηρούμε ότι

$$(\alpha) f(0, 0) = 0,$$

(β) για κάθε $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ έπεται ότι $f(x, 0) = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2) \geq 0$ και

(γ) για κάθε $x = y$ έχουμε $f(x, y) = f(x, x) = 2x^4 \geq 0$.

Τα παραπάνω δείχνουν ότι το $(0, 0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f πάνω στον x -άξονα, ενώ στην ευθεία $y = x$ είναι ολικό μέγιστο. Άρα το $(0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο.

(2) Όπως εύκολα βλέπουμε

$$\Delta(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \Delta(\sqrt{2}, \sqrt{2}) > 0$$

και $f_{xx}(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = f_{xx}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) > 0$ οπότε στα σημεία $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ και $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ η f έχει αυστηρό τοπικό ελάχιστο. Άρα η f έχει ακριβώς δύο τοπικά ακρότατα που είναι και τα δύο αυστηρά τοπικά ελάχιστα.

Άσκηση 15. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x, y) = 4x^2 - x^4 - y^4$ ως προς τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία.

Λύση. Βρίσκουμε πρώτα τα κρίσιμα σημεία της f :

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 8x - 4x^3 = 4x(2 - x^2) = 0 \\ f_y(x, y) = -4y^3 = 0 \end{cases}$$

Άρα $x = 0$ ή $x = \pm\sqrt{2}$ και $y = 0$. Συνεπώς τα κρίσιμα σημεία είναι τα σημεία $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, 0)$ και $(-\sqrt{2}, 0)$. Επίσης $f_{xx}(x, y) = 8 - 12x^2$, $f_{yy}(x, y) = -12y^2$, $f_{xy}(x, y) = 0$. Άρα $\Delta(x, y) = (8 - 12x^2)(-12y^2)$ και συνεπώς $\Delta(0, 0) = \Delta(\sqrt{2}, 0) = \Delta(-\sqrt{2}, 0) = 0$ Άρα το Κριτήριο της Δεύτερης Παραγώγου δεν μπορεί να αποφανθεί για κανένα κρίσιμο σημείο.

Για το $(0, 0)$ έχουμε $f(0, 0) = 0$. Παρατηρούμε ότι (α) $f(0, y) = -y^4 \leq 0$ και άρα το $(0, 0)$ είναι μέγιστο στον y -άξονα και (β) $f(x, 0) = 4x^2 - x^4 \geq 0$ για κάθε $x \in (-2, 2)$, δηλαδή το $(0, 0)$ είναι τοπικό ελάχιστο στον x -άξονα. Συνεπώς το $(0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο.

Επίσης, παρατηρούμε ότι $f(\sqrt{2}, 0) = f(-\sqrt{2}, 0) = 4$ και για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = 4x^2 - x^4 - y^4 = -(-4x^2 + x^4 + 4) - y^4 + 4 = 4 - (x^2 - 2)^2 - y^4 \leq 4$$

Άρα η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στα σημεία $(\pm\sqrt{2}, 0)$.