

ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
9ο Φυλλάδιο Ασκήσεων (υποδείξεις)

Ασκηση 1. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

- (α) Αν η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και αν $f(0) = f'(0) = 0$, τότε $\lim_{n \rightarrow \infty} nf(1/n) = 0$.
- (β) Αν η $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0, 2]$ και $f(0) = f(1) = f(2) = 0$, τότε υπάρχει $x_0 \in (0, 2)$ ώστε $f''(x_0) = 0$.
- (γ) Αν η $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0 \in (a, b)$, παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$ και αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$, τότε $f'(x_0) = \ell$.
- (δ) Αν η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο 0, τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε η f να είναι συνεχής στο $(-\delta, \delta)$.

Υπόδειξη: (α) Σωστό. Αφού $f(0) = f'(0) = 0$, έχουμε

$$0 = f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}.$$

Από την αρχή της μεταφοράς για το όριο, αν $x_n \neq 0$ και $x_n \rightarrow 0$, τότε $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{x_n} = 0$. Θεωρώντας την ακολουθία $x_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$, παίρνουμε $\lim_{n \rightarrow \infty} nf(1/n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(1/n)}{1/n} = 0$.

(β) Σωστό. Εφαρμόζοντας το θεώρημα Rolle για την f στα $[0, 1]$ και $[1, 2]$, βρίσκουμε $y_1 \in (0, 1)$ με $f'(y_1) = 0$ και $y_2 \in (1, 2)$ με $f'(y_2) = 0$. Εφαρμόζοντας πάλι το θεώρημα Rolle για την f' στο $[y_1, y_2]$, βρίσκουμε $x_0 \in (y_1, y_2)$ με $f''(x_0) = 0$. Τέλος, $0 < y_1 < x_0 < y_2 < 2$, δηλαδή $x_0 \in (0, 2)$.

(γ) Σωστό. Αρκεί να δείξουμε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell$. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $0 < |y - x_0| < \delta$, τότε $|f'(y) - \ell| < \varepsilon$. Έστω $x \in (a, b)$ με $x_0 < x < x_0 + \delta$. Από τις υποθέσεις μας έπεται ότι f είναι συνεχής στο $[x_0, x]$ και παραγωγίσιμη στο (x_0, x) , οπότε, εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής στο $[x_0, x]$, βρίσκουμε $y_x \in (x_0, x)$ ώστε $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(y_x)$. Όμως, $0 < |y_x - x_0| < |x - x_0| < \delta$, άρα $|f'(y_x) - \ell| < \varepsilon$. Συνεπώς,

$$(*) \quad \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \ell \right| = |f'(y_x) - \ell| < \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν και η $(*)$ ισχύει για κάθε $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, συμπεραίνουμε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell$.

Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι το όριο από αριστερά ισούται με ℓ , άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , και $f'(x_0) = \ell$.

(δ) Λάθος. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$ αν $x \in \mathbb{Q}$ και $f(x) = -x^2$ αν $x \notin \mathbb{Q}$. Η f είναι ασυνεχής σε κάθε $x \neq 0$, άρα δεν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε η f να είναι συνεχής στο $(-\delta, \delta)$. Όμως, η f είναι παραγωγίσιμη στο 0: έχουμε

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x} \right| = \frac{|f(x)|}{|x|} = \frac{|x^2|}{|x|} = |x| \rightarrow 0 \quad \text{όταν } x \rightarrow 0,$$

άρα $f'(0) = 0$. □

Ασκηση 2. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x}{2} + x^2 \cos \frac{1}{x}$ αν $x \neq 0$ και $f(0) = 0$. Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και $f'(0) > 0$ αλλά δεν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε η f να είναι γνησίως αύξουσα στο $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Υπόδειξη: Η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και $f'(0) = \frac{1}{2} > 0$ (εξηγήστε το με τον ορισμό της παραγώγου). Ας υποθέσουμε ότι για κάποιο $\delta > 0$, η f είναι αύξουσα στο $(0, \delta)$. Τότε, $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (0, \delta)$. Δηλαδή, $\frac{1}{2} + 2x \cos \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x} \geq 0$ για κάθε $x \in (0, \delta)$. Επιλέγουμε $n \in \mathbb{N}$ αρκετά μεγάλο ώστε $x_n = \frac{1}{2\pi n + \pi/2} < \delta$ και παρατηρούμε ότι $f'(x_n) = \frac{1}{2} + \frac{2}{2\pi n + \pi/2} \cos(2\pi n + \pi/2) - \sin(2\pi n + \pi/2) = -\frac{1}{2} < 0$, άτοπο. $\square$

Άσκηση 3. Αποδείξτε ότι

$$(\alpha) \quad \sin(2 \arcsin x) = 2x\sqrt{1-x^2}, \text{ για κάθε } x \in [-1, 1].$$

$$(\beta) \quad \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} = 2 \arctan x, \text{ για κάθε } x \geq 0.$$

Υπόδειξη: (α) Έχουμε ότι

$$\sin(2 \arcsin x) = 2 \sin(\arcsin x) \cos(\arcsin x) = 2x\sqrt{1 - (\sin(\arcsin x))^2} = 2x\sqrt{1-x^2},$$

για κάθε $x \in [-1, 1]$.

(β) Η συνάρτηση $\arccos$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$ και συνεπώς η συνάρτηση

$$f(x) = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \neq 0$. Έχουμε λοιπόν για κάθε $x > 0$

$$\begin{aligned} \left(\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} \right)' &= \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)^2}} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)' \\ &= \frac{2}{1+x^2} = (2 \arctan x)'. \end{aligned}$$

Συνεπώς, υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε για κάθε $x > 0$ να έχουμε ότι

$$\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} = 2 \arctan x + c.$$

Θέτοντας $x = 1$ στην παραπάνω σχέση βρίσκουμε ότι $c = 0$. Τέλος, η ισότητα προφανώς ισχύει και για $x = 0$ και συνεπώς

$$\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} = 2 \arctan x, \text{ για κάθε } x \geq 0.$$

$\square$

Άσκηση 4. (α) Έστω $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα: $|f'(x)| \leq \frac{1}{x}$ για κάθε $x > 1$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x + \sqrt{x}) - f(x)] = 0$.

(β) Έστω $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η f' είναι φραγμένη. Αποδείξτε ότι: για κάθε $\alpha > 1$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha} = 0.$$

Υπόδειξη: (α) Έστω $x > 1$. Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής στο διάστημα $[x, x + \sqrt{x}]$: υπάρχει $y_x \in (x, x + \sqrt{x})$ ώστε

$$f(x + \sqrt{x}) - f(x) = f'(y_x)\sqrt{x}.$$

Όμως $y_x > x > 1$, άρα $|f'(y_x)| \leq \frac{1}{y_x} < \frac{1}{x}$. Δηλαδή,

$$|f(x + \sqrt{x}) - f(x)| < \frac{1}{x} \cdot \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Έπεται ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x + \sqrt{x}) - f(x)) = 0$.

(β) Υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f'(y)| \leq M$ για κάθε $y > 0$. Έστω $x > 1$. Από το θεώρημα μέσης τιμής, υπάρχει $y_x \in (1, x)$ ώστε

$$|f(x) - f(1)| = |f'(y_x)(x - 1)| \leq M(x - 1).$$

Τότε, για κάθε $x > 1$,

$$\frac{|f(x)|}{x^\alpha} \leq \frac{|f(x) - f(1)|}{x^\alpha} + \frac{|f(1)|}{x^\alpha} \leq M \frac{x - 1}{x^\alpha} + \frac{|f(1)|}{x^\alpha}.$$

Αν $\alpha > 1$ έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|f(1)|}{x^\alpha} = 0.$$

Συνεπώς, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha} = 0$ (εξηγήστε γιατί). □

Άσκηση 5. (α) Αποδείξτε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$.

(β) Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) = x$.

(γ) Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$.

Υπόδειξη: (α) Από την $e^{x-1} \geq x$ έπεται ότι

$$x - 1 = \ln(e^{x-1}) \geq \ln x.$$

Εφαρμόζοντας αυτή την ανισότητα για τον $\frac{1}{x} > 0$, παίρνουμε

$$-\ln x = \ln\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} - 1,$$

δηλαδή

$$1 - \frac{1}{x} \leq \ln x.$$

(β) Εφαρμόζοντας την ανισότητα του (α) για τον θετικό αριθμό $1 + \frac{x}{n}$ παίρνουμε

$$\frac{x/n}{1 + (x/n)} \leq \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \leq \frac{x}{n}.$$

Συνεπώς,

$$\frac{x}{1 + \frac{x}{n}} \leq n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \leq x.$$

Το κριτήριο των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών δείχνει ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = x.$$

(γ) Από το (β) έχουμε

$$\ln\left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right) \rightarrow x$$

όταν το $n \rightarrow \infty$. Η $y \mapsto e^y$ είναι συνεχής συνάρτηση, οπότε η αρχή της μεταφοράς δείχνει ότι

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^{\ln\left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right)} \rightarrow e^x$$

όταν το $n \rightarrow \infty$. □

Άσκηση 6. (α) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f(0) = f'(0) = 0$ και $f''(x) + f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. [Υπόδειξη: Θεωρήστε την $g = f^2 + (f')^2$.]

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ και $f''(x) + f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $f(x) = \cos x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη: (α) Θεωρήστε την $g = f^2 + (f')^2$. Τότε,

$$g' = 2ff' + 2f'f'' = 2f'(f + f'') = 0,$$

δηλαδή η g είναι σταθερή. Αφού $g(0) = [f(0)]^2 + [f'(0)]^2 = 0$, συμπεραίνουμε ότι

$$g(x) = [f(x)]^2 + [f'(x)]^2 = 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως, $f(x) = f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β) Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) - \cos x$ ικανοποιεί τις $g(0) = 0$, $g'(0) = 0$ και $g''(x) + g(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Από το (α) έπεται ότι $f(x) - \cos x = g(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Άσκηση 7. Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(0) = 0$. Υποθέτουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ και $0 \leq f'(x) \leq 2f(x)$ για κάθε $x \in (0, 1)$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή και ίση με 0 στο $[0, 1]$.

Υπόδειξη: Θεωρήστε τη συνάρτηση $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = e^{-2x}f(x)$. Αφού $g'(x) = e^{-2x}(f'(x) - 2f(x)) \leq 0$, η g είναι φθίνουσα. Όμως, $g(0) = 0$ και $g \geq 0$ (διότι $f(0) = 0$ και $f \geq 0$ από τις υποθέσεις). Αναγκαστικά, $g \equiv 0$ και έπεται ότι $f \equiv 0$ στο $[0, 1]$. $\square$

Άσκηση 8. (α) Αποδείξτε ότι η εξίσωση $\tan x = x$ έχει ακριβώς μία λύση σε κάθε διάστημα της μορφής $I_k = (k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$.

(β) Έστω a_k η λύση της παραπάνω εξίσωσης στο διάστημα I_k , $k \in \mathbb{N}$. Βρείτε, αν υπάρχει, το όριο $\lim_{k \rightarrow \infty} (a_{k+1} - a_k)$ και δώστε γεωμετρική ερμηνεία.

Υπόδειξη. (α) Θεωρήστε τη συνάρτηση $f_k : I_k \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_k(x) = \tan x - x$. Παρατηρήστε ότι

$$\lim_{x \rightarrow (k\pi - \frac{\pi}{2})^+} f_k(x) = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow (k\pi + \frac{\pi}{2})^+} f_k(x) = +\infty.$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής μπορείτε να δείξετε ότι υπάρχει $a_k \in I_k$ ώστε $f_k(a_k) = \tan a_k - a_k = 0$. Η λύση είναι μοναδική γιατί η $f_k(x) = \tan x - x$ είναι γνησίως αύξουσα στο I_k : παρατηρήστε ότι $f'_k(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 > 0$ αν $x \neq k\pi$ και $= 0$ στο σημείο $k\pi$.

(β) Έστω $\varepsilon > 0$. Από την $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$ έπεται ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε αν $x > M$ τότε $0 < \frac{\pi}{2} - \arctan x < \varepsilon$.

Υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $k \geq k_0$ να ισχύει $k\pi - \frac{\pi}{2} > M$. Τότε, αν θεωρήσουμε τη λύση a_k της εξίσωσης $\tan x = x$ στο I_k , έχουμε $a_k > M$ και $\arctan a_k = a_k - k\pi$. Άρα,

$$0 < \frac{\pi}{2} - (a_k - k\pi) < \varepsilon.$$

Όμοια,

$$0 < \frac{\pi}{2} - (a_{k+1} - (k+1)\pi) < \varepsilon.$$

Έπεται ότι

$$|a_{k+1} - a_k - \pi| < \varepsilon.$$

Το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, άρα $\lim_{k \rightarrow \infty} (a_{k+1} - a_k) = \pi$. $\square$