

ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
9ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Ασκηση 1. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

- (α) Αν η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και αν $f(0) = f'(0) = 0$, τότε $\lim_{n \rightarrow \infty} n f(1/n) = 0$.
- (β) Αν η $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0, 2]$ και $f(0) = f(1) = f(2) = 0$, τότε υπάρχει $x_0 \in (0, 2)$ ώστε $f''(x_0) = 0$.
- (γ) Αν η $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0 \in (a, b)$, παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$ και αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$, τότε $f'(x_0) = \ell$.
- (δ) Αν η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο 0, τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε η f να είναι συνεχής στο $(-\delta, \delta)$.

Ασκηση 2. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x}{2} + x^2 \cos \frac{1}{x}$ αν $x \neq 0$ και $f(0) = 0$. Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και $f'(0) > 0$ αλλά δεν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε η f να είναι γνησίως αύξουσα στο $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Ασκηση 3. Αποδείξτε ότι

- (α) $\sin(2 \arcsin x) = 2x\sqrt{1-x^2}$, για κάθε $x \in [-1, 1]$.
- (β) $\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} = 2 \arctan x$, για κάθε $x \geq 0$.

Ασκηση 4. (α) Έστω $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα: $|f'(x)| \leq \frac{1}{x}$ για κάθε $x > 1$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x + \sqrt{x}) - f(x)] = 0$.

(β) Έστω $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η f' είναι φραγμένη. Αποδείξτε ότι: για κάθε $\alpha > 1$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha} = 0.$$

Ασκηση 5. (α) Αποδείξτε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$.

(β) Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) = x$.

(γ) Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$.

Ασκηση 6. (α) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f(0) = f'(0) = 0$ και $f''(x) + f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. [Υπόδειξη: Θεωρήστε την $g = f^2 + (f')^2$.]

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ και $f''(x) + f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $f(x) = \cos x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Ασκηση 7. Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(0) = 0$. Υποθέτουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ και $0 \leq f'(x) \leq 2f(x)$ για κάθε $x \in (0, 1)$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή και ίση με 0 στο $[0, 1]$.

Ασκηση 8. (α) Αποδείξτε ότι η εξίσωση $\tan x = x$ έχει ακριβώς μία λύση σε κάθε διάστημα της μορφής $I_k = \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$.

(β) Έστω a_k η λύση της παραπάνω εξίσωσης στο διάστημα I_k , $k \in \mathbb{N}$. Βρείτε, αν υπάρχει, το όριο $\lim_{k \rightarrow \infty} (a_{k+1} - a_k)$ και δώστε γεωμετρική ερμηνεία.