

Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωσης (2025–26)

Υποδείξεις για τις Ασκήσεις – Φυλλάδιο 1

1. Έστω X μη κενό σύνολο, $\mathcal{A}$ μια σ -άλγεβρα υποσυνόλων του X και $B \subset X$ τέτοιο ώστε $B \notin \mathcal{A}$. Αποδείξτε ότι η σ -άλγεβρα που παράγεται από την οικογένεια συνόλων $\mathcal{A} \cup \{B\}$ είναι η οικογένεια όλων των συνόλων της μορφής $(A_1 \cap B) \cup (A_2 \setminus B)$ όπου $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$.

Υπόδειξη: Ορίζουμε $\mathcal{F} = \{(A_1 \cap B) \cup (A_2 \setminus B) : A_1, A_2 \in \mathcal{A}\}$. Θα δείξουμε ότι η $\mathcal{F}$ είναι σ -άλγεβρα. Παρατηρούμε ότι αν $A \in \mathcal{A}$ τότε $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$, άρα $A \in \mathcal{F}$. Επίσης, $B = (X \cap B) \cup (\emptyset \setminus B)$, άρα $B \in \mathcal{F}$. Αυτό σημαίνει ότι $\mathcal{A} \cup \{B\} \subseteq \mathcal{F}$, άρα

$$\sigma(\mathcal{A} \cup \{B\}) \subseteq \mathcal{F}.$$

Από την άλλη πλευρά, είναι φανερό ότι αν $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ τότε $(A_1 \cap B) \cup (A_2 \setminus B) \in \sigma(\mathcal{A} \cup \{B\})$, άρα

$$\mathcal{F} \subseteq \sigma(\mathcal{A} \cup \{B\})$$

και έπεται το ζητούμενο.

Μένει να δείξουμε ότι η $\mathcal{F}$ είναι σ -άλγεβρα:

1. $X = (X \cap B) \cup (X \setminus B)$ και αφού $X \in \mathcal{A}$ έπεται ότι $X \in \mathcal{F}$.

2. Έστω $E \in \mathcal{F}$. Τότε, υπάρχουν $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ τέτοια ώστε $E = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \setminus B)$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} X \setminus E &= (A_1 \cap B)^c \cap (A_2 \cap B^c)^c = (A_1^c \cup B^c) \cap (A_2^c \cup B) \\ &= [(A_1^c \cap B^c) \cup (A_1^c \cap B)] \cap [(A_2^c \cap B) \cup (A_2^c \setminus B)] \\ &= [(A_1^c \setminus B) \cap (A_2^c \setminus B)] \cup [(A_1^c \cap B) \cap (A_2^c \cap B)] \\ &= ((A_1^c \cap A_2^c) \setminus B) \cup ((A_1^c \cap A_2^c) \cap B) \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

3. Έστω $E_n = (A_{1n} \cap B) \cup (A_{2n} \setminus B) \in \mathcal{F}$, όπου $A_{1n}, A_{2n} \in \mathcal{A}$. Τότε,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_{1n} \cap B) \right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_{2n} \setminus B) \right) = \left[\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{1n} \right) \cap B \right] \cup \left[\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{2n} \right) \setminus B \right] \in \mathcal{F},$$

διότι $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{1n} \in \mathcal{A}$ και $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{2n} \in \mathcal{A}$.

2. Έστω $n \geq 2$. Θεωρούμε την οικογένεια $\mathcal{A}_n$ όλων των υποσυνόλων E του $\mathbb{Z}$ που έχουν την εξής ιδιότητα:

«Αν για κάποιον $k \in \mathbb{Z}$ υπάρχει $s \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ τέτοιος ώστε $(kn + s) \in E$, τότε για κάθε $m \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ ισχύει ότι $(kn + m) \in E$.»

Αποδείξτε ότι η $\mathcal{A}_n$ είναι σ -άλγεβρα.

Υπόδειξη: Δείχνουμε πρώτα ότι $\mathbb{Z} \in \mathcal{A}_n$. Έστω $k \in \mathbb{Z}$. Τότε, υπάρχει $s \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ τέτοιος ώστε $(kn + s) \in \mathbb{Z}$ (οποιοσδήποτε s μας κάνει) και για κάθε $m \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ ισχύει ότι $(kn + m) \in \mathbb{Z}$.

Έστω $E \in \mathcal{A}_n$. Υποθέτουμε ότι $\mathbb{Z} \setminus E \notin \mathcal{A}_n$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Πράγματι, αν $\mathbb{Z} \setminus E \notin \mathcal{A}_n$, τότε υπάρχουν $k \in \mathbb{Z}$ και $s \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ ώστε $(kn + s) \in \mathbb{Z} \setminus E$ αλλά δεν ισχύει ότι για κάθε $m \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ έχουμε $(kn + m) \in \mathbb{Z} \setminus E$. Όμως τότε, υπάρχει $m_0 \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ τέτοιος ώστε $(kn + m_0) \in E$, και αφού $E \in \mathcal{A}_n$ έπεται ότι για κάθε $m \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ ισχύει ότι $(kn + m) \in E$. Ειδικότερα, $kn + s \in E$, το οποίο είναι άτοπο.

Αυτό αποδεικνύει ότι αν $E \in \mathcal{A}_n$ τότε $\mathbb{Z} \setminus E \in \mathcal{A}_n$.

Τέλος, δείχνουμε ότι η $\mathcal{A}_n$ είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες ενώσεις. Έστω $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ ακολουθία συνόλων στην $\mathcal{A}_n$. Θα δείξουμε ότι $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{A}_n$. Ας υποθέσουμε ότι για κάποιον $k \in \mathbb{Z}$ υπάρχει $s \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

τέτοιος ώστε $(kn + s) \in \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$. Τότε, υπάρχει $j_0 \geq 1$ τέτοιος ώστε $(kn + s) \in E_{j_0}$. Αφού $E_{j_0} \in \mathcal{A}$, έχουμε ότι για κάθε $m \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ ισχύει ότι

$$(kn + m) \in E_{j_0} \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{A}$.

3. (α) Έστω X μη κενό σύνολο και $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}_{n+1} \subseteq \dots$ μια αύξουσα ακολουθία αλγεβρών στο X . Αποδείξτε ότι η οικογένεια $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$ είναι άλγεβρα στο X .

(β) Έστω X μη κενό σύνολο και $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}_{n+1} \subseteq \dots$ μια αύξουσα ακολουθία σ -άλγεβρων στο X . Είναι σωστό ότι η οικογένεια $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$ είναι σ -άλγεβρα στο X ;

Υπόδειξη: (α) Θέτουμε $\mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$. Παρατηρούμε ότι ισχύουν τα εξής:

- (i) Από την υπόθεση έχουμε ότι $X \in \mathcal{A}_n$ (και μάλιστα) για κάθε $n \geq 1$, άρα $X \in \mathcal{A}$.
- (ii) Αν $F \in \mathcal{A}$, τότε υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $F \in \mathcal{A}_m$, και αφού η $\mathcal{A}_m$ είναι άλγεβρα έχουμε $X \setminus F \in \mathcal{A}_m$, άρα $X \setminus F \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n = \mathcal{A}$.
- (iii) Αν $F_1, \dots, F_k \in \mathcal{A}$ τότε υπάρχουν $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ ώστε $F_j \in \mathcal{A}_{n_j}$ για κάθε $j = 1, \dots, k$. Αν θέσουμε $N = \max\{n_1, \dots, n_k\}$ τότε $\mathcal{A}_{n_j} \subseteq \mathcal{A}_N$ από την υπόθεση, άρα $F_j \in \mathcal{A}_N$ για κάθε $j = 1, \dots, k$. Αφού η $\mathcal{A}_N$ είναι άλγεβρα, έπεται ότι $F_1 \cup \dots \cup F_k \in \mathcal{A}_N$, άρα $F_1 \cup \dots \cup F_k \in \mathcal{A}$.

Από τα (i)–(iii) έπεται ότι η οικογένεια $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα.

(β) Δεν είναι απαραίτητα σωστό. Θεωρούμε το σύνολο $X = \mathbb{N}$ και τις εξής οικογένειες υποσυνόλων του $\mathbb{N}$:

$$\mathcal{A}_n = \{B \subseteq \mathbb{N} : B \subseteq \{1, \dots, n\} \text{ ή } \mathbb{N} \setminus B \subseteq \{1, \dots, n\}\}.$$

Είναι σαφές ότι $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}_{n+1} \subseteq \dots$ και μπορείτε να ελέγξετε ότι κάθε $\mathcal{A}_n$ είναι σ -άλγεβρα. Οι δύο πρώτες ιδιότητες ελέγχονται άμεσα και για την τρίτη θεωρήστε $B_k \in \mathcal{A}_n$, $k \geq 1$ και διακρίνετε δύο περιπτώσεις: αν όλα τα $B_k \subseteq \{1, \dots, n\}$ τότε $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \subseteq \{1, \dots, n\}$, ενώ αν υπάρχει m ώστε $\mathbb{N} \setminus B_m \subseteq \{1, \dots, n\}$ τότε $(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k)^c = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k^c \subseteq B_m^c \subseteq \{1, \dots, n\}$. Και στις δύο περιπτώσεις έπεται ότι $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathcal{A}_n$.

Τώρα, παρατηρήστε ότι

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n = \{B \subseteq \mathbb{N} : B \text{ πεπερασμένο ή } \mathbb{N} \setminus B \text{ πεπερασμένο}\}.$$

Αυτή όμως η οικογένεια, ας την πούμε $\mathcal{A}$, δεν είναι σ -άλγεβρα. Το σύνολο $\{2n : n \in \mathbb{N}\}$ δεν ανήκει στην $\mathcal{A}$, είναι όμως αριθμήσιμη ένωση μονοσυνόλων και όλα τα μονοσύνολα φυσικών ανήκουν στην $\mathcal{A}$.

4. (α) Έστω $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ η ακολουθία υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ που ορίζεται ως εξής: $A_n = (-\frac{1}{n}, 1)$ αν ο n είναι περιττός και $A_n = (-1, \frac{1}{n})$ αν ο n είναι άρτιος. Να βρείτε τα σύνολα $\liminf_n A_n$ και $\limsup_n A_n$.

(β) Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία συνόλων στην $\mathcal{A}$. Αν f και g είναι οι δείκτριες συναρτήσεις των συνόλων $\liminf_n A_n$ και $\limsup_n A_n$ αντίστοιχα, αποδείξτε ότι για κάθε $x \in X$ ισχύει ότι

$$f(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \chi_{A_n}(x) \quad \text{και} \quad g(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \chi_{A_n}(x).$$

Υπόδειξη: (α) Παρατηρούμε αρχικά ότι $A_n \subseteq (-1, 1)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $\limsup_n A_n \subseteq (-1, 1)$. Θα δείξουμε ότι ισχύει ισότητα. Πράγματι, αν $x \in [0, 1)$ τότε $x \in A_{2k-1}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, δηλαδή το x ανήκει σε άπειρα A_n , άρα $x \in \limsup_n A_n$. Αυτό δείχνει ότι $[0, 1) \subseteq \limsup_n A_n$. Ομοίως, αν $x \in (-1, 0]$ τότε $x \in A_{2k}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, δηλαδή το x ανήκει σε άπειρα A_n , άρα $x \in \limsup_n A_n$. Αυτό δείχνει ότι $(-1, 0] \subseteq \limsup_n A_n$, και τελικά $(-1, 1) \subseteq \limsup_n A_n$.

Δείχνουμε τώρα ότι $\liminf_n A_n = \{0\}$. Αρχικά, $0 \in A_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $0 \in \liminf_n A_n$. Έστω $x > 0$. Τότε, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\frac{1}{2k_0} < x$. Για κάθε $k \geq k_0$ έχουμε $\frac{1}{2k} < x$, άρα $x \notin A_{2k}$. Υπάρχουν λοιπόν άπειροι φυσικοί n τέτοιοι ώστε $x \notin A_n$, το οποίο σημαίνει ότι $x \notin \liminf_n A_n$. Όμοια δείχνουμε ότι αν $x < 0$ τότε $x \notin \liminf_n A_n$, και συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι $\liminf_n A_n = \{0\}$.

(β) Δείχνουμε μόνο τον πρώτο ισχυρισμό. Έχουμε $f(x) = 1$ ή $f(x) = 0$. Έχουμε $f(x) = 1$ αν και μόνο αν $x \in \liminf_n A_n$, δηλαδή αν και μόνο αν το x ανήκει σε όλα τελικά τα A_n , δηλαδή αν και μόνο αν η ακολουθία $\chi_{A_n}(x)$ είναι τελικά σταθερή και ίση με 1, ή ισοδύναμα $\liminf_n \chi_{A_n}(x) = 1$ (για την ισοδυναμία, παρατηρήστε ότι αν $\liminf_n \chi_{A_n}(x) = 1$ τότε όλοι τελικά οι $\chi_{A_n}(x)$ είναι μεγαλύτεροι από $1/2$ —εξηγήστε γιατί— άρα $\chi_{A_n}(x) = 1$ τελικά).

Επίσης, έχουμε $f(x) = 0$ αν και μόνο αν $x \notin \liminf_n A_n$, δηλαδή αν και μόνο αν $x \notin A_n$ για άπειρους δείκτες n , δηλαδή αν και μόνο αν πάρχει υποακολουθία $\chi_{A_{k_n}}(x)$ σταθερή και ίση με 0, το οποίο συνεπάγεται ότι $\liminf_n \chi_{A_n}(x) = 0$. Αντίστροφα, παρατηρήστε ότι αν $\liminf_n \chi_{A_n}(x) = 0$ τότε υπάρχουν άπειροι $\chi_{A_n}(x)$ που είναι μικρότεροι από $1/2$ —εξηγήστε γιατί— άρα $\chi_{A_n}(x) = 0$ για άπειρους δείκτες n , άρα $x \notin \liminf_n A_n$, το οποίο σημαίνει ότι $f(x) = 0$.

5. (α) Δώστε παράδειγμα απεικόνισης $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow [0, +\infty]$ που είναι πεπερασμένα προσθετικό μέτρο αλλά δεν είναι (αριθμήσιμα προσθετικό) μέτρο.

(β) Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $\nu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ πεπερασμένα προσθετικό μέτρο. Αν το ν είναι επίσης αριθμήσιμα υποπροσθετικό, αποδείξτε ότι το ν είναι μέτρο.

Υπόδειξη: (α) Δοκιμάστε $\mu(A) = 0$ αν το A είναι πεπερασμένο και $\mu(A) = \infty$ αν το A είναι άπειρο σύνολο.

(β) Από την πεπερασμένη προσθετικότητα του ν έπεται ότι είναι και μονότονο: αν $E, F \in \mathcal{A}$ και $E \subseteq F$ τότε $\nu(E) \leq \nu(F)$.

Έστω $\{A_k\}_{k=1}^\infty$ ακολουθία ξένων συνόλων στην $\mathcal{A}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\sum_{k=1}^n \nu(A_k) = \nu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \leq \nu\left(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\right).$$

Έπεται ότι $\sum_{k=1}^\infty \nu(A_k) \leq \nu\left(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\right)$. Η αντίστροφη ανισότητα ισχύει αφού το ν έχει υποτεθεί αριθμήσιμα υποπροσθετικό. Άρα, $\nu\left(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\right) = \sum_{k=1}^\infty \nu(A_k)$. Έπεται ότι το ν είναι μέτρο.

6. (α) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $A, B, C \in \mathcal{A}$ τέτοια ώστε:

$$A \subseteq C, \quad B \subseteq C, \quad \mu(A) = \mu(C) < \infty.$$

Αποδείξτε ότι $\mu(A \cap B) = \mu(B)$.

(β) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας πλήρης χώρος μέτρου και έστω $A, B \subseteq X$. Αν $A \in \mathcal{A}$ και $\mu(A \Delta B) = 0$, αποδείξτε ότι $B \in \mathcal{A}$ και $\mu(B) = \mu(A)$.

Υπόδειξη: (α) Από τις $A \subseteq C$ και $\mu(A) = \mu(C) < \infty$ βλέπουμε ότι

$$\mu(A) = \mu(C) = \mu(A \cup (C \setminus A)) = \mu(A) + \mu(C \setminus A),$$

άρα $\mu(C \setminus A) = 0$. Τότε, από την $B \subseteq C$ έχουμε ότι $B \setminus A \subseteq C \setminus A$, άρα $\mu(B \setminus A) \leq \mu(C \setminus A) = 0$, δηλαδή $\mu(B \setminus A) = 0$. Τώρα,

$$\mu(A \cap B) \leq \mu(B) = \mu((A \cap B) \cup (B \setminus A)) = \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A) = \mu(A \cap B),$$

και έπεται ότι $\mu(A \cap B) = \mu(B)$.

(β) Έχουμε $A \setminus B \subseteq A \Delta B$ και $B \setminus A \subseteq A \Delta B$. Αφού ο $(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι πλήρης χώρος μέτρου και $\mu(A \Delta B) = 0$, έπεται ότι $A \setminus B, B \setminus A \in \mathcal{A}$ και $\mu(A \setminus B) = \mu(B \setminus A) = 0$. Τότε, $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{A}$ και $B = (A \cap B) \cup (B \setminus A) \in \mathcal{A}$. Επίσης,

$$\mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A) = \mu(A \cap B) = \mu(A \cap B) + \mu(A \setminus B) = \mu(A).$$

7. Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $\mathcal{D}$ οικογένεια μέτρων στην $\mathcal{A}$ με την εξής ιδιότητα: αν $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{D}$ τότε υπάρχει $\mu_3 \in \mathcal{D}$ τέτοιο ώστε $\mu_3 \geq \max\{\mu_1, \mu_2\}$. Ορίζουμε

$$\nu(A) = \sup\{\mu(A) : \mu \in \mathcal{D}\}, \quad A \in \mathcal{A}.$$

Αποδείξτε ότι το ν είναι μέτρο στην $\mathcal{A}$.

Υπόδειξη: Από τον ορισμό του ν ελέγχουμε εύκολα ότι $\nu(\emptyset) = 0$ και ότι το ν είναι μονότονο: αν $A, B \in \mathcal{A}$ και $A \subseteq B$ τότε $\mu(A) \leq \mu(B) \leq \nu(B)$ για κάθε $\mu \in \mathcal{D}$, άρα

$$\nu(A) = \sup\{\mu(A) : \mu \in \mathcal{D}\} \leq \nu(B).$$

Έστω $(A_n)_{n=1}^\infty$ ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων στην $\mathcal{A}$. Για κάθε $\mu \in \mathcal{D}$ έχουμε

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) = \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n) \leq \sum_{n=1}^\infty \nu(A_n),$$

και παίρνοντας supremum ως προς $\mu \in \mathcal{D}$ βλέπουμε ότι

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) = \sup\left\{\mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) : \mu \in \mathcal{D}\right\} \leq \sum_{n=1}^\infty \nu(A_n).$$

Για την αντίστροφη ανισότητα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\nu(\bigcup_{n=1}^\infty A_n) < \infty$. Τότε, λόγω μονοτονίας του ν , έχουμε $\nu(A_n) < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Σταθεροποιούμε $N \in \mathbb{N}$ και για τυχόν $\epsilon > 0$ βρίσκουμε $\mu_n \in \mathcal{D}$, $1 \leq n \leq N$, ώστε $\mu_n(A_n) > \nu(A_n) - \epsilon/N$. Από την υπόθεση της άσκησης έπεται ότι υπάρχει $\mu \in \mathcal{D}$ τέτοιο ώστε $\mu \geq \max\{\mu_1, \dots, \mu_N\}$. Τότε,

$$\sum_{n=1}^N \nu(A_n) - \epsilon < \sum_{n=1}^N \mu_n(A_n) \leq \sum_{n=1}^N \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^N A_n\right) \leq \nu\left(\bigcup_{n=1}^N A_n\right) \leq \nu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right).$$

Αφού το $\epsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι $\sum_{n=1}^\infty \nu(A_n) \leq \nu(\bigcup_{n=1}^\infty A_n)$, και αφήνοντας το $N \rightarrow \infty$ παίρνουμε

$$\sum_{n=1}^\infty \nu(A_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \nu(A_n) \leq \nu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right).$$

Αφού το ν είναι αριθμήσιμα προσθετικό, είναι μέτρο στην $\mathcal{A}$.

8. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ ακολουθία συνόλων στην $\mathcal{A}$ τέτοια ώστε $\mu(A_n) \rightarrow 0$ και $\sum_{n=1}^\infty \mu(A_{n+1} \setminus A_n) < +\infty$. Αποδείξτε ότι $\mu(\limsup A_n) = 0$.

Υπόδειξη: Παρατηρούμε ότι, για κάθε $N \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι

$$\bigcup_{n=N}^\infty A_n = A_N \cup \left(\bigcup_{n=N+1}^\infty (A_n \setminus A_{n-1})\right).$$

Πράγματι, αν $x \in \bigcup_{n=N}^{\infty} A_n$ τότε είτε $x \in A_N$ ή υπάρχει ο ελάχιστος $n > N$ ώστε $x \in A_n$ και τότε $x \in A_n \setminus A_{n-1}$. Αυτό δείχνει τον εγκλεισμό $\subseteq$, ενώ ο αντίστροφος εγκλεισμός ελέγχεται εύκολα. Έπεται ότι $\mu(\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n) \leq \mu(A_N) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \mu(A_n \setminus A_{n-1})$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $\mu(A_n) \rightarrow 0$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_{n+1} \setminus A_n) < +\infty$, υπάρχει $M \in \mathbb{N}$ ώστε $\sum_{n=M+1}^{\infty} \mu(A_n \setminus A_{n-1}) < \varepsilon$ και $\mu(A_N) < 1$ για κάθε $N \geq M$. Τότε, για κάθε $N \geq M$ έχουμε ότι $\mu(\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n) \leq \mu(A_N) + \varepsilon < 1 + \varepsilon$. Αφήνοντας το $N \rightarrow \infty$ παίρνουμε

$$\mu(\limsup A_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n\right) \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \mu(A_N) + \varepsilon = \varepsilon,$$

και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται το ζητούμενο.

9. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πιθανότητας και $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$. Αποδείξτε ότι

$$0 \leq \sum_{k=1}^n \mu(A_k) - \mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \leq \sum_{1 \leq k < m \leq n} \mu(A_k \cap A_m).$$

Υπόδειξη: Με επαγωγή ως προς n . Αν $n = 2$ τότε παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \mu(A_1) + \mu(A_2) &= (\mu(A_1 \cap A_2) + \mu(A_1 \setminus A_2)) + (\mu(A_1 \cap A_2) + \mu(A_2 \setminus A_1)) \\ &= (\mu(A_1 \cap A_2) + \mu(A_1 \setminus A_2) + \mu(A_2 \setminus A_1)) + \mu(A_1 \cap A_2) = \mu(A_1 \cup A_2) + \mu(A_1 \cap A_2), \end{aligned}$$

άρα το ζητούμενο ισχύει ως ισότητα (χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι τα $A_1 \cap A_2, A_1$ και A_2 είναι ξένα και η ένωση τους είναι το $A_1 \cup A_2$).

Για το επαγωγικό βήμα, εφαρμόζοντας το βήμα $n = 2$ για τα $\bigcup_{k=1}^n A_k$ και A_{n+1} , γράφουμε

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) &= \mu\left(\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \cup A_{n+1}\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) + \mu(A_{n+1}) - \mu\left(\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \cap A_{n+1}\right) \\ &= \mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) + \mu(A_{n+1}) - \mu\left(\bigcup_{k=1}^n (A_k \cap A_{n+1})\right), \end{aligned}$$

Παρατηρήστε επίσης ότι

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^n (A_k \cap A_{n+1})\right) \leq \sum_{k=1}^n \mu(A_k \cap A_{n+1}).$$

Χρησιμοποιώντας και την επαγωγική υπόθεση για τα $A_1, \dots, A_n$, συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{k=1}^{n+1} \mu(A_k) - \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n+1} \mu(A_k) - \mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) - \mu(A_{n+1}) + \mu\left(\bigcup_{k=1}^n (A_k \cap A_{n+1})\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \mu(A_k) - \mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) + \sum_{k=1}^n \mu(A_k \cap A_{n+1}) \\ &\leq \sum_{1 \leq k < m \leq n} \mu(A_k \cap A_m) + \sum_{k=1}^n \mu(A_k \cap A_{n+1}) \\ &= \sum_{1 \leq k < m \leq n+1} \mu(A_k \cap A_m). \end{aligned}$$

10. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πιθανότητας και $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία συνόλων στην $\mathcal{A}$, τέτοια ώστε $\mu(\liminf_n A_n) > 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει υπακολουθία $\{A_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ της $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^N A_{k_n}\right) > 0 \text{ για κάθε } N \in \mathbb{N}.$$

Υπόδειξη: Θέτουμε $B_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$. Τότε, η $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι αύξουσα ακολουθία συνόλων στην $\mathcal{A}$ και

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right) = \mu\left(\liminf_n A_n\right) > 0,$$

άρα υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\mu(B_m) > 0$. Αν ορίσουμε $k_n = m + n - 1$, τότε

$$\bigcap_{n=1}^N A_{k_n} = \bigcap_{k=m}^{m+N-1} A_k \supseteq \bigcap_{k=m}^{\infty} A_k = B_m,$$

άρα

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^N A_{k_n}\right) \geq \mu(B_m) > 0$$

για κάθε $N \in \mathbb{N}$.