

ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
8ο Φυλλάδιο Ασκήσεων (υποδείξεις)

Ασκηση 1. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $xf(x) \geq 0$. Να δείξετε ότι $f(0) = 0$.

Υπόδειξη. Από την υπόθεση βλέπουμε ότι αν $x > 0$ τότε $f(x) \geq 0$. Εφόσον η f είναι συνεχής στο 0, έπεται ότι

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \geq 0.$$

Ομοίως, από την υπόθεση βλέπουμε ότι αν $x < 0$ τότε $f(x) \leq 0$. Εφόσον η f είναι συνεχής στο 0, έπεται ότι

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \leq 0.$$

Συνδυάζοντας τις δύο ανισότητες βλέπουμε ότι $f(0) = 0$. □

Ασκηση 2. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση με $|f(x)| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(α) Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

(β) Δώστε παράδειγμα μιας τέτοιας f που να είναι ασυνεχής σε κάθε $x \neq 0$.

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι $|f(0)| \leq 0$, δηλαδή $f(0) = 0$. Έστω (x_n) ακολουθία στο $\mathbb{R}$ με $x_n \rightarrow 0$. Τότε, $|x_n| \rightarrow 0$ και από την $-|x_n| \leq f(x_n) \leq |x_n|$ και το κριτήριο παρεμβολής έπεται ότι $f(x_n) \rightarrow 0 = f(0)$. Από την αρχή της μεταφοράς η f είναι συνεχής στο 0.

(β) Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ -x & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$ ικανοποιεί την $|f(x)| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και είναι ασυνεχής σε κάθε $x \neq 0$. Αυτό μπορούμε να το δούμε θεωρώντας ακολουθία ρητών $q_n \rightarrow x$ και ακολουθία αρρήτων $\xi_n \rightarrow x$. Αν η f ήταν συνεχής στο x , από την αρχή της μεταφοράς θα είχαμε

$$f(x) = \lim f(q_n) = \lim q_n = x \quad \text{και} \quad f(x) = \lim f(\xi_n) = \lim(-\xi_n) = -x,$$

δηλαδή $x = -x$, το οποίο είναι άτοπο αφού $x \neq 0$. □

Ασκηση 3. (α) Έστω $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \geq 0$, αποδείξτε ότι η g διατηρεί πρόσημο: ή $g(x) > 0$ για κάθε $x \geq 0$ ή $g(x) < 0$ για κάθε $x \geq 0$.

(β) Έστω $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ συνεχής συνάρτηση. Αν $f(x) \neq x$ για κάθε $x \geq 0$, αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Υπόδειξη: (α) Αφού $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \geq 0$, αν η g δεν διατηρεί πρόσημο, θα υπάρχουν $x_1, x_2 \geq 0$ ώστε $g(x_1) < 0$ και $g(x_2) > 0$. Όμως τότε, εφαρμόζοντας το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής μπορούμε να βρούμε ξ ανάμεσα στα x_1 και x_2 για το οποίο $g(\xi) = 0$. Έτσι οδηγούμαστε σε άτοπο (από την υπόθεση έχουμε $g(\xi) \neq 0$).

(β) Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x) - x$. Από την υπόθεση έχουμε $f(x) \neq x$ για κάθε $x \geq 0$. Από το (α), η g διατηρεί πρόσημο. Αφού $g(0) = f(0) > 0$, συμπεραίνουμε ότι $g(x) > 0$ για κάθε $x \geq 0$. Συνεπώς, $f(x) > x$ για κάθε $x \geq 0$. Έπεται ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. □

Ασκηση 4. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : [\alpha, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη. Αποδείξτε ότι υπάρχει το όριο

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

και είναι πραγματικός αριθμός.

[Υπόδειξη: να χρησιμοποιήσετε την αρχή της πληρότητας.]

Υπόδειξη: Αφού η f είναι άνω φραγμένη το σύνολο τιμών της θα είναι άνω φραγμένο (και μη κενό) υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και άρα από την αρχή της πληρότητας θα έχει supremum το οποίο συμβολίζουμε με L . Αν $\varepsilon > 0$, τότε υπάρχει $x_0 \in [\alpha, +\infty)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) > L - \varepsilon$. Τότε όμως λόγω μονοτονίας έχουμε ότι

$$f(x) \geq f(x_0) > L - \varepsilon, \text{ για κάθε } x \geq x_0.$$

Επιπλέον αφού το L είναι supremum, $f(x) \leq L < L + \varepsilon$, για κάθε $x \in [\alpha, +\infty)$. Επομένως

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon, \text{ για κάθε } x \geq x_0$$

δηλαδή $|f(x) - L| < \varepsilon$, για κάθε $x \geq x_0$, το οποίο μας δίνει το συμπέρασμα. $\square$

Άσκηση 5. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτησης, και $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $y \in [a, b]$ ώστε

$$f(y) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}.$$

Υπόδειξη. Η f είναι συνεχής στο $[a, b]$, άρα παίρνει ελάχιστη τιμή m και μέγιστη τιμή M στο $[a, b]$. Για κάθε $i = 1, \dots, n$ έχουμε $m \leq f(x_i) \leq M$, άρα

$$m \leq \alpha := \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n} \leq M.$$

Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής υπάρχει $y \in [a, b]$ ώστε $f(y) = \alpha$. $\square$

Άσκηση 6. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο 0 και ότι $f(x/2) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή.

Υπόδειξη: Έστω $x \neq 0$. Χρησιμοποιώντας την υπόθεση (και με επαγωγή) δείχνουμε ότι

$$f(x) = f(x/2) = f(x/2^2) = \dots = f(x/2^n)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έχουμε $\frac{x}{2^n} \rightarrow 0$ και η f είναι συνεχής στο 0. Από την αρχή της μεταφοράς, $f(x/2^n) \rightarrow f(0)$. Αφού $f(x) = f(x/2^n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η ακολουθία $(f(x/2^n))$ είναι σταθερή, με όλους τους όρους της ίσους με $f(x)$. Έπεται ότι $f(x) = f(0)$ και, αφού το $x \neq 0$ ήταν τυχόν, η f είναι σταθερή. $\square$

Άσκηση 7. Έστω $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτησης τέτοια ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$. Αποδείξτε ότι η f είναι φραγμένη. Παίρνει η f απαραίτητα μέγιστη τιμή;

Υπόδειξη: Εφαρμόζοντας τον ορισμό του ορίου με $\varepsilon = 1 > 0$, βρίσκουμε $M > 0$ ώστε για κάθε $x > M$ να ισχύει ότι $|f(x) - 1| < 1$. Τότε, για κάθε $x \in [M, +\infty)$ έχουμε ότι

$$|f(x)| \leq |f(x) - 1| + 1 < 1 + 1 = 2.$$

Η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[0, M]$, άρα είναι φραγμένη σε αυτό: υπάρχει $A > 0$ τέτοιος ώστε, για κάθε $x \in [0, M]$ να ισχύει ότι

$$|f(x)| \leq A.$$

Αν ορίσουμε $B = \max\{2, A\}$, διακρίνοντας περιπτώσεις ($x \in [0, M]$ ή $x \in [M, +\infty)$) βλέπουμε ότι για κάθε $x \in [0, +\infty)$ ισχύει ότι $|f(x)| \leq B$. Δηλαδή, η f είναι φραγμένη.

Η f δεν παίρνει απαραίτητα μέγιστη τιμή: μπορεί, για παράδειγμα, να είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα με $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ (ως γνησίως αύξουσα δεν μπορεί να παίρνει μέγιστη τιμή, εξηγήστε γιατί). Μια τέτοια συνάρτηση είναι η $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 1 - \frac{1}{x+1}$. $\square$