

Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωσης (2025–26)
Ασκήσεις – Φυλλάδιο 3

(Παραδίδετε έξι από τις ασκήσεις. Ημερομηνία παράδοσης: 21 Δεκεμβρίου 2025)

1. (α) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αν $\mu(X) > 0$, αποδείξτε ότι υπάρχει $E \in \mathcal{A}$ με $\mu(E) > 0$ τέτοιο ώστε η f να είναι φραγμένη στο E .

(β) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι αν $\int |f| d\mu < +\infty$ τότε $\mu(\{x \in X : |f(x)| = +\infty\}) = 0$.

2. Έστω $X \neq \emptyset$ και $\mathcal{A}$ μια σ -άλγεβρα στο X . Θεωρούμε $A \subseteq X$ και ορίζουμε $\mathcal{F}_A = \{E \in \mathcal{A} : A \subseteq E \text{ ή } A \cap E = \emptyset\}$. Θεωρήστε γνωστό ότι η $\mathcal{F}_A$ είναι σ -άλγεβρα.

Έστω τώρα $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η f είναι $\mathcal{F}_A$ -μετρήσιμη αν και μόνο αν η f είναι $\mathcal{A}$ -μετρήσιμη και η f είναι σταθερή στο A .

3. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου με $\mu(X) > 0$ και $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x, y \in A$ να ισχύει ότι $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$.

4. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πιθανότητας και $(f_n)_{n=1}^\infty$, f ολοκληρώσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f_n(x) \rightarrow f(x)$ για κάθε $x \in X$ και $\int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu$. Αποδείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $E \in \mathcal{A}$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε, για κάθε $n \geq n_0$,

$$\left| \int_{X \setminus E} f_n d\mu \right| \leq \varepsilon \quad \text{και} \quad |f_n(x)| \leq |f(x)| + 1 \quad \text{για κάθε } x \in E.$$

5. (α) Έστω $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε

$$\int_{[0,1]} |f_n|^2 d\lambda \leq \frac{1}{n^2}$$

για κάθε $n \geq 1$. Αποδείξτε ότι $f_n \rightarrow 0$ σχεδόν παντού. [Υπόδειξη: Θεώρημα Beppo Levi.]

(β) Έστω $f_n : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f_n \rightarrow 0$ κατά σημείο και

$$\int_{[0,1]} f_n d\lambda = 1$$

για κάθε $n \geq 1$. Αν $g := \sup_n f_n$, αποδείξτε ότι

$$\int_{[0,1]} g d\lambda = +\infty.$$

6. (α) Υπολογίστε το $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx$.

(β) Αποδείξτε την ταυτότητα $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^n} = \int_0^1 x^{-x} dx$.

7. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση και έστω ότι η f' είναι φραγμένη στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι

$$\int_0^1 f'(x) dx = f(1) - f(0).$$

8. Έστω $f_n : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι, για κάποιους $\alpha_n > 0$, ισχύουν οι

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x) d\lambda(x) = \alpha_n^2 \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty.$$

Αποδείξτε ότι:

(α) Αν $E_n = \{x \in \mathbb{R} : f_n(x) > \alpha_n\}$ τότε $\lim_{N \rightarrow \infty} \lambda(\bigcup_{n=N}^{\infty} E_n) = 0$.

(β) Η ακολουθία $\frac{f_n(x)}{\alpha_n}$ είναι φραγμένη σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

9. Έστω $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη και μετρήσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$F(t) = \int_0^1 |t - g(x)| dx$$

είναι παραγωγίσιμη στο $t_0 \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν $\lambda(\{x \in [0, 1] : g(x) = t_0\}) = 0$.

10. Έστω $X \neq \emptyset$ και $(Y, \mathcal{B})$ ένας μετρήσιμος χώρος. Έστω $f : X \rightarrow Y$ συνάρτηση. Ορίζουμε

$$\mathcal{A} = \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}.$$

(α) Αποδείξτε ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ -άλγεβρα.

(β) Έστω $g : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$ μη αρνητική Borel μετρήσιμη. Αποδείξτε ότι υπάρχει Borel μετρήσιμη συνάρτηση $h : (Y, \mathcal{B}) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $g = h \circ f$.

(γ) Αποδείξτε ότι το ίδιο ισχύει και χωρίς την υπόθεση ότι η g είναι μη αρνητική.

[Υπόδειξη: Για το (β) ξεκινήστε, αν θέλετε, με απλές συναρτήσεις.]