

ΣΕΜΦΕ
Ασκήσεις στη Συναρτησιακή Ανάλυση
(6ο φυλλάδιο ασκήσεων)

Ασκηση 1. Έστω X χώρος με νόρμα. Να δείξετε ότι για κάθε $x \in X$ υπάρχει $f \in X^*$, τέτοιο ώστε $f(x) = \|x\|^2$ και $\|f\| = \|x\|$.

Ασκηση 2. Έστω X χώρος με νόρμα και Y ένας γνήσιος κλειστός υπόχωρος του X . Αν $x_0 \notin Y$ να δείξετε ότι υπάρχει $f \in X^*$, τέτοιο ώστε

$$\|f\| = \frac{1}{d(x_0, Y)}, f(x_0) = 1 \text{ και } f(y) = 0, \text{ για κάθε } y \in Y.$$

Ασκηση 3. Έστω M ένα υποσύνολο του χώρου με νόρμα X . Να δείξετε ότι ένα στοιχείο $x_0 \in X$ ανήκει στο σύνολο $\overline{\langle M \rangle}$ αν και μόνο αν $f(x_0) = 0$, για κάθε $f \in X^*$, τέτοιο ώστε $f|_M = 0$.

Ασκηση 4. Έστω X χώρος με νόρμα και Y ένας κλειστός υπόχωρος του X . Θα λέμε ότι το $z \in X$ είναι κάθετο στο Y , και γράφουμε $z \perp Y$, αν $d(z, Y) = \|z\|$. Να δείξετε ότι $z \perp Y$ αν και μόνο αν υπάρχει $0 \neq f \in X^*$ τέτοιο ώστε $f|_Y = 0$ και $|f(z)| = \|f\|\|z\|$. Επίσης να δείξετε ότι αν $Y \neq X$ και $x_0 \notin Y$, τότε το $y_0 \in Y$ είναι το πλησιέστερο στοιχείο του Y στο X (δλδ $0 < d(x_0, Y) = \|x_0 - y_0\|$) αν και μόνο αν $x_0 - y_0 \perp Y$.

Ασκηση 5. Έστω X χώρος με νόρμα, Y ένας υπόχωρος του X και

$$F = \{f \in X^* : \|f\| \leq 1, f|_Y = 0\}.$$

Να αποδείξετε ότι:

(i) Για κάθε $x \in X$

$$d(x, Y) = \sup_{f \in F} |f(x)|.$$

(ii)

$$\overline{Y} = \bigcap_{f \in F} \ker f.$$

(Υπόδειξη: να χρησιμοποιήσετε την άσκηση 2.)