

ΣΕΜΦΕ
Συναρτησιακή Ανάλυση
 Λύσεις του 5ου φυλλαδίου ασκήσεων

Άσκηση 1. Έστω $T \in B(X, Y)$. Να δείξετε ότι

(i)

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup \{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\} \\ &= \sup \{\|Tx\| : \|x\| = 1\} .\end{aligned}$$

(ii)

$$\|T\| = \inf \{M > 0 : \|Tx\| \leq M\|x\|, \text{ για κάθε } x \in X\} .$$

Λύση.

(i) Έχουμε ότι

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \|T(\frac{x}{\|x\|})\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} .$$

Συνεπώς

$$\sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \|T\| .$$

(ii) Το σύνολο

$$\{M > 0 : \|Tx\| \leq M\|x\|, \text{ για κάθε } x \in X\}$$

αποτελείται από τα άνω φράγματα του συνόλου

$$A = \left\{ \frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \neq 0 \right\} .$$

Το συμπέρασμα είναι άμεσο αφού εξ ορισμού η $\|T\|$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A .

□

Άσκηση 2 (Πολλαπλασιαστικός τελεστής). Θεωρούμε τον $X = C[a, b]$ εφοδιασμένο με την $\|\cdot\|_\infty$ και $g \in X$. Ορίζουμε $T : X \rightarrow X$ με τύπο

$$Tf(x) = g(x)f(x), \text{ για κάθε } x \in [a, b] .$$

Να δείξετε ότι $T \in B(X)$.

Λύση. Αν $f, h \in X$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε

$$T(f+h)(x) = (f+h)(x)g(x) = f(x)g(x) + h(x)g(x) = Tf(x) + Th(x)$$

και

$$T(\lambda f)(x) = (\lambda f)(x)g(x) = \lambda f(x)g(x) = \lambda Tf(x)$$

και άρα ο T είναι γραμμικός. Επίσης έχουμε

$$\|Tf\|_{\infty} = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)g(x)| \leq \|g\|_{\infty} \|f\|_{\infty}$$

και συνεπώς ο T είναι φραγμένος με $\|T\| \leq \|g\|_{\infty}$. □

Άσκηση 3 (Τελεστής δεξιάς μετατόπισης). Έστω $S : l^1 \rightarrow l^1$ με τύπο

$$S(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots).$$

Να δείξετε ότι ο S είναι φραγμένος και να βρείτε τη νόρμα του.

Λύση. Αν $x = (x_n) \in l^1$, τότε

$$\|Sx\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \|x\|_1$$

και άρα ο S φραγμένος με $\|S\| = 1$. □

Άσκηση 4. Έστω $T : (c_{00}, \|\cdot\|_{\infty}) \rightarrow (c_{00}, \|\cdot\|_{\infty})$ με τύπο

$$T(x) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, \dots), \text{ για κάθε } x = (x_n) \in c_{00}.$$

Δείξτε ότι ο T είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής και βρείτε τη νόρμα του. Στη συνέχεια να δείξετε ότι $\ker T = \{0\}$.

Λύση. Ο T είναι γραμμικός (ελέγξτε το). Έχουμε ότι

$$\|T(x)\|_{\infty} = \sup_n |x_n - x_{n+1}| \leq \sup_n (|x_n| + |x_{n+1}|) \leq 2\|x\|_{\infty}.$$

Άρα ο T είναι φραγμένος με $\|T\| \leq 2$. Για $x = (1, -1, 0, 0, 0, \dots)$ έχουμε ότι $\|T(x)\|_{\infty} = 2$ και αφού $\|x\|_{\infty} = 1$ έχουμε ότι $\|T\| = 2$.

Αν $x = (x_n) \in \ker T$, τότε $T(x) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, \dots) = (0, 0, \dots)$ και συνεπώς $x_1 = x_2 = x_3 = \dots$. Όμως αφού $x \in c_{00}$ θα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $x_n = 0$, για κάθε $n \geq n_0$ και συνεπώς $x_n = 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα $\ker T = \{0\}$. □