

ΣΕΜΦΕ 2025
Μαθηματική Ανάλυση Ι
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 5- ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1. Δείξτε ότι το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ δεν υπάρχει.

Λύση. Αρκεί να βρούμε δύο ακολουθίες (x_n) και (x'_n) τέτοιες ώστε $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = +\infty$ ενώ $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n)$. Έστω $x_n = 2\pi n$ και $x'_n = 2\pi n + \frac{\pi}{2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = +\infty$ αλλά $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(x_n) = 0$ και $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(x'_n) = 1$.

Άσκηση 2. (α) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτησης. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ δείξτε ότι η f είναι επί. Ομοίως δείξτε ότι το ίδιο συμβαίνει αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

(β) Δείξτε ότι κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

Λύση. (α) Έστω ότι υπήρχε $y_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x) \neq y_0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τότε λόγω συνέχειας της f από το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών θα είχαμε ότι είτε (1) $f(x) < y_0$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$, είτε (2) $f(x) > y_0$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$. Αν συμβαίνει το (1) σημαίνει ότι η f είναι άνω φραγμένη και άρα δεν μπορεί να ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ή $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$. Ομοίως αν ισχύει το (2) σημαίνει ότι η f είναι κάτω φραγμένη και συνεπώς δεν μπορεί να ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ή $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$. Άρα και στις δύο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα για κάθε $y \in \mathbb{R}$ υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x) = y$, δηλαδή η f είναι επί.

(β) Έστω $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ πολυώνυμο όπου $a_n \neq 0$ και n περιττός. Υποθέτουμε ότι $a_n > 0$ (αν $a_n < 0$ η απόδειξη είναι παρόμοια). Τότε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (a_n x^n) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (a_n x^n) = +\infty$$

και αντίστοιχα

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty$$

Συνεπώς η $p(x)$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του ερωτήματος (α) και άρα είναι επί. Ειδικότερα, υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ με $p(x_0) = 0$.

Άσκηση 3. Έστω (a, b) ένα ανοικτό μη κενό διάστημα του $\mathbb{R}$. Βρείτε μια συνάρτηση $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ 1-1 και επί και τέτοια ώστε η f και η f^{-1} είναι παραγωγίσιμες.

Λύση. Έστω $f(x) = \frac{1}{a-x} + \frac{1}{b-x}$ για κάθε $x \in (a, b)$. Επειδή $f'(x) = \frac{1}{(a-x)^2} + \frac{1}{(b-x)^2} > 0$ έχουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow b-} f(x) = +\infty$. Άρα από το Θεώρημα Ενδιάμεσων τιμών η f είναι επί. Από το Θεώρημα της παραγώγου της αντίστροφης συνάρτησης η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη.

Άσκηση 4. Έστω I διάστημα του $\mathbb{R}$ και $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η f δεν είναι μονότονη συνάρτηση αν και μόνο αν υπάρχουν $x_1, x_2 \in I$ με $f'(x_1) \cdot f'(x_2) < 0$.

Λύση. Η f δεν είναι αύξουσα και άρα μπορούμε να βρούμε $a < b$ στο I με $f(a) > f(b)$. Ομοίως, η f δεν είναι φθίνουσα και άρα υπάρχουν $c < d$ στο I με $f(c) < f(d)$. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχουν $x_1 \in (a, b)$ και $x_2 \in (c, d)$ με $f'(x_1) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < 0$ και $f'(x_2) = \frac{f(d) - f(c)}{d - c} > 0$, οπότε $f'(x_1) \cdot f'(x_2) < 0$.

Αντίστροφα, έστω ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in I$ με $f'(x_1) \cdot f'(x_2) < 0$. Όπως γνωρίζουμε αν μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f είναι αύξουσα τότε $f'(x) \geq 0$ για όλα τα $x \in I$ και αντίστοιχα αν είναι φθίνουσα τότε $f'(x) \leq 0$ για όλα τα $x \in I$. Άρα αν η f ήταν μονότονη τότε θα είχαμε $f'(x_1)f'(x_2) \geq 0$ για κάθε $x_1, x_2 \in I$, άτοπο. Συνεπώς η f δεν είναι μονότονη.

Άσκηση 5. (α) Αν $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ δείξτε ότι η f είναι γνησίως μονότονη. (β) Ισχύει το αντίστροφο?

Λύση. (α) (α' τρόπος) Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής έχουμε ότι η f είναι 1-1. Πράγματι, έστω $x_1 \neq x_2$. Τότε, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχει ξ μεταξύ των x_1, x_2 με $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(\xi)$ και άρα, αφού $f'(\xi) \neq 0$ έπεται ότι $f(x_1) \neq f(x_2)$. Άρα η f είναι γνησίως μονότονη ως συνεχής και 1-1.

(β' τρόπος) Από το Θεώρημα Darboux έχουμε ότι η f' διατηρεί πρόσημο. Άρα είτε $f'(x) > 0$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα είτε $f'(x) < 0$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα.

(β) Το αντίστροφο δεν ισχύει. Πχ. η $f(x) = x^3$ είναι γνησίως μονότονη αλλά $f'(0) = 0$.

Άσκηση 6. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη. Αν η f' είναι μη σταθερή συνάρτηση δείξτε ότι λαμβάνει και ρητές και άρρητες τιμές.

Λύση. Αφού η f' είναι μη σταθερή υπάρχουν $x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R}$ με $f'(x_1) \neq f'(x_2)$. Έστω $a = f'(x_1)$ και $b = f'(x_2)$. Από Θεώρημα Darboux η f' έχει την ιδιότητα των ενδιάμεσων τιμών, δηλαδή η f' λαμβάνει όλες τις τιμές μεταξύ των a και b . Από την πυκνότητα των αρρήτων στο $\mathbb{R}$ μεταξύ των a και b υπάρχουν (άπειροι) ρητοί και (άπειροι) άρρητοι και άρα η f' λαμβάνει (άπειρες) ρητές και (άπειρες) άρρητες τιμές.

Άσκηση 7. Βρείτε όλες τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f'(x) \in \mathbb{N}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση. Αν η f' λαμβάνει δύο διαφορετικές τιμές, τότε θα λαμβάνει και τιμές εκτός του $\mathbb{N}$ αφού ικανοποιεί την ιδιότητα των ενδιάμεσων τιμών (Θεώρημα Darboux). Άρα αν $f'(x) \in \mathbb{N}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θα πρέπει $f'(x) = n_0$ για κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$ και για όλα τα $x \in \mathbb{R}$. Άρα $f(x) = n_0 x + c$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 8. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x \leq 0 \\ x + 1, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

Δείξτε ότι δεν υπάρχει $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $F' = f$.

Λύση. Κάνοντας την γραφική παράσταση της f βλέπουμε ότι η f δεν ικανοποιεί την ιδιότητα των ενδιάμεσων τιμών διότι $f(x) \leq 0$, για $x \leq 0$ και $f(x) > 1$ για $x > 0$. Άρα, από Θεώρημα Darboux, δεν μπορεί η f να είναι η παράγωγος κάποιας συνάρτησης.

Άσκηση 9. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε η f είναι σταθερή στο $(x - \delta, x + \delta)$. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση.

Λύση. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ τυχαίο. Έστω $\delta > 0$ τέτοιο ώστε η f είναι σταθερή στο $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Τότε $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$ για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ και άρα $f'(x_0) = 0$. Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη και $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η f είναι σταθερή.

Άσκηση 10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ x^2 & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$. Αποδείξτε ότι $f'(0) = 0$.

Λύση. Έστω (x_n) ακολουθία με $x_n \neq 0$ και $x_n \rightarrow 0$. Έστω $n \in \mathbb{N}$. Έχουμε

$$\frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = \begin{cases} 0 & \text{αν } x_n \text{ ρητός} \\ \frac{x_n^2}{x_n} = x_n & \text{αν } x_n \text{ άρρητος} \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι και στις δύο περιπτώσεις έχουμε ότι $\left| \frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} \right| \leq |x_n|$ και άρα $\lim_n \frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = 0$. Συνεπώς για κάθε ακολουθία (x_n) με $x_n \neq 0$ και $x_n \rightarrow 0$ έχουμε ότι

$$\lim_n \frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = 0$$

Από την Αρχή μεταφοράς για όρια έπεται ότι

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$$

Άσκηση 11. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $x_0 \in \mathbb{R}$. Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 \in \mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$. Αν το $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ υπάρχει (πεπερασμένο ή άπειρο) δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = f'(x_0)$.

Λύση. Από τον ορισμό της παραγώγου έχουμε $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Λόγω συνέχειας της f στο x_0 , $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$ και άρα το παραπάνω όριο είναι απροσδιοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$. Από τον Κανόνα de l'Hospital παίρνουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x) - f(x_0))'}{(x - x_0)'} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$$

Άσκηση 12. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και $x_0 \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

1. Τα πλευρικά όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x)$ υπάρχουν.
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = f'(x_0)$.
3. Η f' είναι συνεχής στο x_0 .

Άρα η f' είναι ασυνεχής σε ένα σημείο x_0 αν και μόνο αν ένα τουλάχιστον από τα πλευρικά όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x)$ δεν υπάρχει. Ισοδύναμα, οι ασυνέχειες της f' είναι όλες γ' είδους.

Λύση. (1) $\Rightarrow$ (2): Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ και άρα

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \quad (1)$$

Επειδή η f είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη) έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0^+} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} (f(x) - f(x_0)) = 0$ και άρα τα παραπάνω πλευρικά όρια είναι απροσδιοριστίες της μορφής $\frac{0}{0}$. Άρα, αν υποθέσουμε ότι τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x)$ υπάρχουν, από κανόνα de l'Hospital, έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{(f(x) - f(x_0))'}{(x - x_0)'} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) \quad (2)$$

και ομοίως

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{(f(x) - f(x_0))'}{(x - x_0)'} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) \quad (3)$$

Από τις (1)-(3) παίρνουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = f'(x_0)$$

(2) $\Rightarrow$ (3): Αφού $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = f'(x_0)$ η f' είναι συνεχής στο x_0 .

(3) $\Rightarrow$ (1): Αφού η f' είναι συνεχής στο x_0 έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = f'(x_0)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = f'(x_0)$.

Άσκηση 13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, αν $x \neq 0$ και $f(0) = 0$. Δείξτε ότι (α) η f είναι παραγωγίσιμη (β) το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ δεν υπάρχει.

Λύση. Για κάθε $x \neq 0$ έχουμε $f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.
Επίσης για $x = 0$ έχουμε

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

(από Θεώρημα Παρεμβολής, αφού $-x \leq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$). Τέλος, για να διαπιστώσουμε ότι το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right)$$

δεν υπάρχει, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Αρχή Μεταφοράς θεωρώντας τις ακολουθίες $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ και $y_n = \frac{1}{2n\pi + \pi}$. Έχουμε $x_n, y_n \neq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ και $\lim_{n \rightarrow \infty} f'(x_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f'(y_n)$ αφού $f(x_n) = -1$ και $f(y_n) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 14. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση και έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε η $f''(x_0)$ υπάρχει. Δείξτε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + x) + f(x_0 - x) - 2f(x_0)}{x^2} = f''(x_0) \quad (4)$$

Λύση. Λόγω συνέχειας της f το όριο στην (4) είναι απροσδιοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$. Εφαρμόζοντας τον Κανόνα Hospital έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + x) + f(x_0 - x) - 2f(x_0)}{x^2} &\stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[f(x_0 + x) + f(x_0 - x) - 2f(x_0)]'}{(x^2)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + x) - f'(x_0 - x)}{2x} \end{aligned}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + x) - f'(x_0 - x)}{2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + x) - f'(x_0) + f'(x_0) - f'(x_0 - x)}{2x} \\ &= \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + x) - f'(x_0)}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x_0) - f'(x_0 - x)}{-x} \right) \\ &= \frac{1}{2} (f''(x_0) + f''(x_0)) = f''(x_0) \end{aligned}$$

Άσκηση 15. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, τρεις φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'''(x) = 12$ δείξτε ότι υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $x^3 < f(x) < 3x^3$ για όλα τα $x > M$.

Λύση. Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ μπορούμε να εφαρμόσουμε επαναληπτικά τον κανόνα De l'Hospital για την συνάρτηση $\frac{f(x)}{x^3}$ ως εξής

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^3} \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{3x^2} \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f''(x)}{6x} \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'''(x)}{6} = 2$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^3} = 2$, που εξ ορισμού του ορίου συνάρτησης στο $+\infty$ σημαίνει ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε

$$x > M \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{x^3} - 2 \right| < \epsilon \Leftrightarrow 2 - \epsilon < \frac{f(x)}{x^3} < 2 + \epsilon$$

Τώρα για $\epsilon = 1$ έπεται το ζητούμενο.

Άσκηση 16. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με την δεύτερη παράγωγο συνεχή στο 0. Έστω ότι υπάρχει ακολουθία (x_n) θετικών αριθμών με $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ και $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x_n) - x_n}{x_n^2} = 1$.

- (i) Δείξτε ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x_n)}{x_n} = 1$ και $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = 0$.
- (ii) Υπολογίστε τις τιμές $f(0)$ και $f'(0)$.
- (iii) Χρησιμοποιώντας τον Τύπο Taylor υπολογίστε την $f''(0)$.

Λύση. (i) Έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{f(x_n) - x_n}{x_n^2} &= \frac{\frac{f(x_n)}{x_n} - 1}{x_n} \\ \Rightarrow \frac{f(x_n)}{x_n} - 1 &= x_n \cdot \frac{f(x_n) - x_n}{x_n^2} \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x_n)}{x_n} - 1 \right) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x_n) - x_n}{x_n^2} = 0 \end{aligned}$$

οπότε $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x_n)}{x_n} = 1$. Επίσης, $f(x_n) = \frac{f(x_n)}{x_n} \cdot x_n$ και άρα με όμοιο τρόπο έπεται ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = 0$.

- (ii) Επειδή $x_n \rightarrow 0$ από Αρχή Μεταφοράς,

$$f(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = 0$$

και

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x_n)}{x_n} = 1$$

- (iii) Από τον τύπο του Taylor (για $x = x_n$ και κέντρο $a = 0$) έχουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $\xi_n \in (0, x_n)$ τέτοιο ώστε

$$f(x_n) = f(0) + f'(0)x_n + \frac{f''(\xi_n)}{2}x_n^2 = x_n + \frac{f''(\xi_n)}{2}x_n^2 \Rightarrow f''(\xi_n) = 2 \frac{f(x_n) - x_n}{x_n^2}$$

Αφού $0 < \xi_n < x_n$ και $x_n \rightarrow 0$ από Θεώρημα Ισοσυγκλινουσών Ακολουθιών, έπεται ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} \xi_n = 0$. Άρα, αφού η f'' είναι συνεχής, από Αρχή Μεταφοράς,

$$f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f''(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f''(\xi_n) = 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x_n) - x_n}{x_n^2} = 2$$

Άσκηση 17. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη. Αν η f και η f'' είναι φραγμένες δείξτε ότι και η f' είναι φραγμένη.

Λύση. Έστω $M_0, M_2 > 0$ τέτοια ώστε $|f(x)| \leq M_0$ και $|f''(x)| \leq M_2$. Με χρήση του Τύπου Taylor θα δείξουμε ότι

$$|f'(x)| \leq 2M_0 + \frac{M_2}{2}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Πράγματι, έστω $a \in \mathbb{R}$. Από τον Τύπο του Taylor έχουμε ότι για κάθε $x \neq a$ υπάρχει ξ μεταξύ των a και x τέτοιο ώστε

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - a)^2$$

Άρα για $x = a + 1$ έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (a, a + 1)$ τέτοιο ώστε

$$f(a + 1) = f(a) + f'(a) + \frac{f''(\xi)}{2}$$

ισοδύναμα,

$$f'(a) = f(a+1) - f(a) - \frac{f''(\xi)}{2}$$

Συνεπώς

$$|f'(a)| \leq |f(a+1)| + |f(a)| + \frac{|f''(\xi)|}{2} \leq 2M_0 + \frac{M_2}{2}.$$

Άσκηση 18. Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = 0$, $f'(0) = 2$ και $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$. Δείξτε ότι υπάρχουν $\xi_1 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ και $\xi_2 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ τέτοια ώστε $f''(\xi_1) = f''(\xi_2)$.

Λύση. Απο τον τύπο Taylor έχουμε ότι για κάθε $x, a \in [0, 1]$ με $x \neq a$ υπάρχει ξ γνήσια μεταξύ των a, x τέτοιο ώστε

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x - a) + \frac{f''(\xi)}{2!} \cdot (x - a)^2. \quad (5)$$

Έστω $x = 1/2$. Τότε για $a = 0$ έχουμε ότι υπάρχει $\xi_1 \in (0, 1/2)$ με

$$f(1/2) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot \frac{1}{2} + \frac{f''(\xi_1)}{2!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{f''(\xi_1)}{8}$$

Ομοίως για $a = 1$ υπάρχει $\xi_2 \in (1/2, 1)$

$$f(1/2) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!} \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right) + \frac{f''(\xi_2)}{2!} \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 = 1 + \frac{f''(\xi_2)}{8}$$

Άρα $f(1/2) = 1 + \frac{f''(\xi_1)}{8} = 1 + \frac{f''(\xi_2)}{8}$ οπότε και $f''(\xi_1) = f''(\xi_2)$.

Άσκηση 19. Έστω $f(x) = x + \sin x \cos x$ και $g(x) = f(x)e^{\sin x}$, $x \in \mathbb{R}$. (α) Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$. (β) Βρείτε το λάθος στην παρακάτω "απόδειξη": Έχουμε $f'(x) = 1 + \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x$ και

$$g'(x) = 2 \cos^2 x e^{\sin x} + (x + \sin x \cos x) e^{\sin x} \cos x = \cos x \cdot e^{\sin x} (2 \cos x + x + \sin x \cos x)$$

Άρα από τον κανόνα de l' Hospital

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \cos^2 x}{\cos x \cdot e^{\sin x} (2 \cos x + x + \sin x \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \cos x}{e^{\sin x} (2 \cos x + x + \sin x \cos x)} = 0 \end{aligned}$$

Λύση. (α) Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{\sin x}}$$

Άρα το όριο δεν υπάρχει αφού αν $x_n = 2n\pi$ και $x'_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ έχουμε $x_n, x'_n \rightarrow +\infty$ αλλά

$$\frac{1}{e^{\sin x_n}} \rightarrow 1$$

ενώ

$$\frac{1}{e^{\sin x'_n}} \rightarrow \frac{1}{e}$$

(β) Έχουμε

$$f'(x) = 1 + \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x$$

και

$$g'(x) = \cos x \cdot e^{\sin x} (2 \cos x + x + \sin x \cos x)$$

Άρα η $g'(x) = 0$ για άπειρα $x = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow +\infty$ και συνεπώς ο κανόνας de l'Hospital δεν εφαρμόζεται.

Άσκηση 20. (Αντίστροφο Θεώρημα Μέσης Τιμής) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση και έστω $J = f'(\mathbb{R})$ το σύνολο τιμών της f' . Έστω $\xi \in \mathbb{R}$ με το $f'(\xi)$ εσωτερικό σημείο του $J = f'(\mathbb{R})$ (θυμίζουμε ότι από το Θεώρημα Darboux το $J = f'(\mathbb{R})$ είναι διάστημα). Δείξτε ότι υπάρχουν $x_1 < x_2$ στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi)$. Ισχύει το ίδιο αν το $f'(\xi)$ είναι άκρο του J ;

Λύση. Έστω ότι το $f'(\xi)$ δεν είναι άκρο του $J = f'(\mathbb{R})$. Θέτουμε $\lambda = f'(\xi)$ και Άρα θα υπάρχουν $a < b$ με τις τιμές $f'(a)$ και $f'(b)$ εκατέρωθεν του λ . Ας υποθέσουμε ότι $f'(a) < \lambda < f'(b)$ (αν $f'(b) < \lambda < f'(a)$ η απόδειξη είναι όμοια).

Ορίζουμε $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x) - \lambda x$, για κάθε $x \in [a, b]$. Παρατηρούμε ότι για $x_1 \neq x_2$,

$$\frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \lambda$$

και άρα αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχουν $x_1 < x_2$ στο $[a, b]$ με $g(x_1) = g(x_2)$.

Η g ως συνεχής στο $[a, b]$ λαμβάνει ελάχιστη τιμή σε κάποιο $c \in [a, b]$. Αφού $g'(a) < 0 < g'(b)$ έπεται ότι $c \neq a, b$ (πράγματι, επειδή $\frac{g(x) - g(a)}{x - a} < 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για $a < x < a + \delta$ να ισχύει $\frac{g(x) - g(a)}{x - a} < 0 \Rightarrow g(x) < g(a)$ και άρα $c \neq a$. Ομοίως μπορούμε να δείξουμε ότι $c \neq b$. Άρα η ελάχιστη τιμή

της g λαμβάνεται σε ένα $c \in (a, b)$. Έστω $\eta = \frac{g(c) + m}{2}$, όπου $m = \min\{g(a), g(b)\}$. Τότε $g(c) < \eta < g(a)$ και άρα από Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών υπάρχει $x_1 \in (a, c)$ με $g(x_1) = \eta$. Ομοίως $g(c) < \eta < g(b)$ και άρα υπάρχει $x_2 \in (c, b)$ με $g(x_2) = \eta$. Άρα υπάρχουν $x_1 < x_2$ στο (a, b) με $g(x_1) = g(x_2)$.

Δεν ισχύει το ίδιο αν το $f'(\xi)$ είναι άκρο του $J = f'(\mathbb{R})$. Πχ. αν $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$ τότε $f'(x) = 3x^2$ και $f'(\mathbb{R}) = [0, +\infty)$. Για $\xi = 0$ δεν υπάρχουν $x_1 < x_2$ με $f'(0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. Πράγματι, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα έπεται ότι $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$ για κάθε $x_1 < x_2$ ενώ $f'(0) = 0$.